

MBX114E: Diszkrét matematika III.

(előadásvázlat, 2007. május 18.)

Maróti Miklós

4. LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

A diszkrét matematika II tárgyából a következő fogalmakat kell tudni: **homogén lineáris egyenletrendszer** és annak **megoldáshalmaza**, vektorterek **izomorfizmusa** és **automorfizmusa**, **bázisátmenet mátrixa**.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

4.1. Definíció. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. A $\varphi : U \rightarrow V$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezzük (vagy **vektortér homomorfizmusnak**), ha bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(u + v)\varphi = u\varphi + v\varphi \quad \text{és} \quad (\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi).$$

Az U -ból V -be menő lineáris leképezések halmazát $\text{Hom}(U, V)$ jelöli. Az U -ból U -ba menő lineáris leképezéseket **lineáris transzformációknak** nevezzük. A bijektív lineáris leképezések a **vektortér izomorfizmusok**, továbbá a bijektív lineáris transzformációk a **vektortér automorfizmusok**.

4.2. Definíció. Legyen $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés. A

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \{ u \in U : u\varphi = 0 \}, \\ \text{Im } \varphi &= \{ u\varphi : u \in U \} \end{aligned}$$

halmazokat rendre a φ lineáris leképezés **magjának**, illetve **képterének** nevezzük.

4.3. Tétel. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésre érvényesek a következők:

- (1) $0\varphi = 0$,
- (2) $\text{Ker } \varphi$ altér U -ban,
- (3) $\text{Im } \varphi$ altér V -ben,
- (4) φ akkor és csak akkor injektív, ha $\text{Ker } \varphi = \{0\}$,
- (5) Ha $u_1, \dots, u_k$ generátorrendszer U -ban, akkor $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ generátorrendszer az $\text{Im } \varphi$ képtérben.
- (6) Ha $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ lineárisan független vektorrendszer V -ben, akkor $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független U -ban.

4.4. Tétel (Lineáris leképezések dimenziótétele). Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér, és $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$. Ha U végesdimenziós, akkor

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi).$$

4.5. Következmény. Végesdimenziós vektortér lineáris transzformációja akkor és csak akkor injektív, ha szürjektív.

4.6. Következmény. Legyen T test, $m, n \geq 1$ és $A \in T^{m \times n}$. Az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza dimenziója (azaz a szabad változók száma) $n - r(A)$.

4.7. Tétel. Ha V a T test feletti n -dimenziós vektortér, akkor V izomorf a T^n vektortérrel. Tehát bármely két T -feletti n -dimenziós vektortér izomorf egymással.

4.8. Definíció. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek. A $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ **lineáris leképezések összegén**, illetve a φ leképezés $c \in T$ **skalárral való szorzatán** azt a $\varphi + \psi : U \rightarrow V$, illetve $c\varphi : U \rightarrow V$ leképezéseket értjük, amelyekre

$$u(\varphi + \psi) = u\varphi + u\psi, \quad u(c\varphi) = c(u\varphi) \quad \text{minden } u \in U \text{ esetén.}$$

4.9. Tétel. Tetszőleges U és V ugyanazon T test feletti vektorterek esetén $\text{Hom}(U, V)$ a fent definiált műveletekkel vektorteret alkot T felett.

4.10. Tétel. Tetszőleges U, V és W ugyanazon T test feletti vektorterekre érvényesek a következők:

- (1) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\psi \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $\varphi\psi \in \text{Hom}(U, W)$.
- (2) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ bijektív, akkor $\varphi^{-1} \in \text{Hom}(V, U)$.
- (3) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$, $\psi \in \text{Hom}(V, W)$ és $c \in T$, akkor $c(\varphi\psi) = (c\varphi)\psi = \varphi(c\psi)$.
- (4) Ha $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\tau \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $(\varphi + \psi)\tau = \varphi\tau + \psi\tau$.
- (5) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\psi, \tau \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $\varphi(\psi + \tau) = \varphi\psi + \varphi\tau$.

4.11. Tétel. Legyen U végesdimenziós, V pedig tetszőleges ugyanazon T test feletti vektortér, $e_1, \dots, e_n \in U$ bázis és $v_1, \dots, v_n \in V$ tetszőleges vektorrendszer. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés, amelyre

$$e_1\varphi = v_1, e_2\varphi = v_2, \dots, e_n\varphi = v_n.$$

4.12. Definíció. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal. Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésre léteznek olyan egyértelműen meghatározott $a_{i,j} \in T$ skalárok, hogy

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^n a_{i,j}f_j \quad \text{minden } i = 1, \dots, m \text{ esetén.}$$

Az $(a_{i,j})_{m \times n}$ mátrixot a φ **lineáris leképezés** $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban megadott **mátrixának** nevezzük.

4.13. Tétel. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal, továbbá legyen $A \in T^{m \times n}$ a $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban megadott mátrixa. Ha az $u \in U$ vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban $x = (x_1, \dots, x_m)$, akkor az $u\varphi \in V$ vektor koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban xA .

4.14. Tétel. Legyenek $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ rendre az U, V és W ugyanazon T test feletti végesdimenziós vektorterek bázisai. Legyen A és B rendre a $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések mátrixai az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban, illetve C a $\tau \in \text{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ bázisokban, és legyen $c \in T$. Ekkor

- (1) $A + B$ a $\varphi + \psi$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban,
- (2) cA a $c\varphi$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban,
- (3) AC a $\varphi\tau$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{G}$ bázisokban.

4.15. Következmény. Ha U m -dimenziós és V n -dimenziós vektortér a T test felett, akkor a lineáris leképezések $\text{Hom}(U, V)$ vektortere izomorf az $m \times n$ -es mátrixok $T^{m \times n}$ vektorterével, és így mn dimenziós.

4.16. Definíció. Legyen $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m$ és $\mathcal{E}' : e'_1, \dots, e'_m$ a T test feletti U vektortér két bázisa. Az $\text{id} \in \text{Hom}(U, U)$ identikus lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ bázisokban megadott mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

4.17. Tétel. Legyen a T test feletti U vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$, továbbá legyen P az áttérés mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra. Ekkor P nemelfajuló mátrix, továbbá az $\mathcal{E}'$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa P^{-1} .

4.18. Tétel. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ az U , $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ pedig a V vektortér bázisa. Jelölje P , illetve S az áttérés mátrixát $\mathcal{E}$ -ről $\mathcal{E}'$ -re, illetve $\mathcal{F}$ -ről $\mathcal{F}'$ -re. Legyen $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés, és legyen φ mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban A . Ekkor φ mátrixa az $\mathcal{E}'$ és $\mathcal{F}'$ bázisokban $P^{-1}AP$.

4.19. Definíció. Legyen T test és n pozitív egész. Az $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok **hasonlók**, ha létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{n \times n}$ mátrix, hogy $A = P^{-1}BP$.

4.20. Következmény. Ugyanazon lineáris transzformáció két különböző bázisban felírt mátrixa hasonló.

4.21. Definíció. A φ **lineáris leképezés rangján** a képterének dimenzióját értjük, azaz $r(\varphi) = \dim(\text{Im } \varphi)$.

4.22. Tétel. Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.

4.23. Következmény. Legyen φ lineáris transzformáció valamely végesdimenziós vektortérben. Ekkor φ akkor és csak akkor bijektív, ha valamely (bármely) bázisbeli mátrixa nemelfajuló.

4.24. Tétel. Legyen U m -dimenziós és V n -dimenziós vektorterek ugyanazon T test fölött, és $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$. Ekkor φ mátrixa az U és V egy-egy alkalmas bázisában

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T^{m \times n},$$

ahol r a φ rangja, E_r az $r \times r$ méretű egységmátrix, és a zérók a megfelelő méretű zérómátrixok.

4.25. Következmény. Legyen T tetszőleges test. Ekkor minden $A \in T^{m \times n}$ mátrixhoz létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{m \times m}$ és $Q \in T^{n \times n}$ mátrixok, hogy

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol r az A mátrix rangja, és a jobboldalon álló mátrix ugyanaz, mint az előző tételben.

4.26. Definíció. Legyen T test, V vektortér T felett, és $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. A $\lambda \in T$ skalár a φ lineáris transzformáció **sajátértéke**, ha létezik olyan nemnulla $v \in V$ vektor, hogy $v\varphi = \lambda v$.
A

$$\{v \in V : v\varphi = \lambda v\}$$

alteret a $\lambda \in T$ skalárhoz tartozó **sajátaltérnek** nevezzük. A nemnulla $v \in V$ vektor a φ lineáris transzformáció **sajátvektora**, ha valamely sajátaltérben benne van, azaz létezik olyan $\lambda \in T$, hogy $v\varphi = \lambda v$.

4.27. Definíció. Legyen T test, n pozitív egész. Az $A \in T^{n \times n}$ **mátrix sajátértéke**, **sajátaltére** és **sajátvektora** rendre a $\varphi : T^n \rightarrow T^n$, $x \mapsto xA$ lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltére, illetve sajátvektora. Azaz $\lambda \in T$ és $x \in T^n$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor pár, ha $xA = \lambda x$.

4.28. Tétel. Legyen V n -dimenziós vektortér a T test felett, $e_1, \dots, e_n$ bázis V -ben, $\varphi \in \text{Hom}(T^n, T^n)$ és $A \in T^{n \times n}$ a φ lineáris transzformáció mátrixa az $e_1, \dots, e_n$ bázisban. Ekkor $\lambda \in T$ és $v \in V$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor párja φ -nek, ha λ és v koordinátasora sajátérték, sajátvektor párja A -nak.

4.29. Tétel. Legyen U tetszőleges vektortér a T test felett, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ páronként különböző sajátértékei a $\varphi \in \text{Hom}(U, U)$ lineáris transzformációnak, és $U_1, \dots, U_k$ pedig ezen sajátértékekhez tartozó sajátaltérek. Ha $U_1 + \dots + U_k = U$, akkor φ egyértelműen meghatározott.

4.30. Definíció. Az $A \in T^{n \times n}$ mátrix **karakterisztikus polinomja** az

$$f_A(x) = |A - xE|$$

determinánssal megadott T -feletti polinom. Az $f_A(x)$ polinom T -be eső gyökeit az A mátrix **karakterisztikus gyökeinek** nevezzük.

4.31. Tétel. Legyen T test. A $\lambda \in T$ skálár akkor és csak akkor sajátértéke az $A \in T^{n \times n}$ mátrixnak, ha λ karakterisztikus gyöke A -nak.

4.32. Tétel. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

4.33. Definíció. Véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjának **karakterisztikus polinomja** a lineáris transzformáció valamely (bármely) bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomja.