

MBX114E: Diszkrét matematika III.

(előadásvázlat, 2007. április 20.)

Maróti Miklós

3. LINEÁRIS ALGEBRA ÉS A RANG FOGALMA

A diszkrét matematika II tárgyból a következő fogalmakat kell tudni:

- (1) A mátrixalgebrával kapcsolatban: **számtest feletti mátrixok** fogalma, mátrixok **kép-
lettel való megadása**, **műveletek** mátrixokkal és azok **elemi tulajdonságai**, **trianguláris**
mátrixok.
- (2) A determinánsokkal kapcsolatban: a **determináns** fogalma, **kifejtési tételek**, a de-
terminánsok **elemi tulajdonságai**, a **dualitás elve**, a **determinánsok szorzástétele**,
trianguláris mátrixok determinánsa, mátrix **inverzének** kiszámítása determinánssal,
Vandermonde-determináns, **elfajuló mátrix**.
- (3) A lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatban: a **lineáris egyenletrendszer** fogalma,
egyenletrendszerek **mátrixos alakja**, **bővített mátrix**, **lépcsős alakú** egyenletrendsze-
rek, **kötött** és **szabad** változók, **elemi sorátalakítások**, **Gauss-elimináció**, **Cramer-
szabály**, mátrixok **determinánsának** és **inverzének** kiszámolása **elemi sorátalakítá-
sokkal**.
- (4) Az absztrakt vektorterekkel kapcsolatban: számtest feletti **vektortér** fogalma, a fon-
tos példák ismerete (T^n , $T^{\mathbb{N}}$, $T^{m \times n}$, $T[x]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{Q}$ felett) **nullvektor**,
műveletek vektorokkal és azok **elemi tulajdonságai**, vektorterek **izomorfizmusa**, **altér**
fogalma, **triviális alterek**, **homogén** lineáris egyenletrendszer **megoldáaltere**, **lineáris**
kombináció, **triviális lineáris kombináció**, **feszített (generált) altér**, alterek **összege** és
metszete, az alterek **hálój**a,
- (5) Vektorrendszerekkel kapcsolatban: a **vektorrendszer** fogalma, **lineárisan független**
és **függő** vektorrendszerek, **maximális** lineárisan független vektorrendszer, **generá-
torrendszer**, **minimális** generátorrendszer, **végesdimenziós** vektortér, **bázis**, **standard**
bázis, vektor **koordinátái**, **kicserélési tétel**, **dimenzió** fogalma, azonos dimenziós vek-
torterek izomorfak.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.

3.1. Tétel. Legyen T test, és $A = (a_{i,j}) \in T^{n \times n}$ tetszőleges négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,1\sigma} \cdot a_{2,2\sigma} \cdots a_{n,n\sigma}.$$

3.2. Példa. $n = 2$ esetén:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{sgn}(\text{id}) \cdot a_{11}a_{22} + \text{sgn}((1\ 2)) \cdot a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3$ esetén:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{sgn}(\text{id}) \cdot a_{11}a_{22}a_{33} + \text{sgn}((1\ 2)) \cdot a_{12}a_{21}a_{33} + \text{sgn}((1\ 3)) \cdot a_{13}a_{22}a_{31} \\ + \text{sgn}((2\ 3)) \cdot a_{11}a_{23}a_{32} + \text{sgn}((1\ 2\ 3)) \cdot a_{12}a_{23}a_{31} + \text{sgn}((1\ 3\ 2)) \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

ami éppen a Sarrus-szabály.

3.3. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak tetszőleges T testre?

- (1) $|A| \geq 0$ tetszőleges $A \in T^{n \times n}$ mátrixra.
- (2) Tetszőleges $A \in T^{n \times n}$ mátrixra $|A| \in T$.
- (3) Ha $A \in T^{n \times k}$ és $B \in T^{k \times m}$, akkor $AB \in T^{n \times m}$.
- (4) Ha $A \in T^{n \times n}$ és $B \in T^{n \times n}$, akkor $|AB| = |A| \cdot |B|$.
- (5) Ha $A \in T^{n \times n}$ és $B \in T^{n \times n}$, akkor $|A + B| = |A| + |B|$.
- (6) Ha $A \in T^{n \times n}$ és $\lambda \in T$, akkor $|\lambda A| = \lambda |A|$.
- (7) Ha az $A \in T^{n \times n}$ mátrix valamely oszlopában csupa nulla elem van, akkor $|A| = 0$.
- (8) Ha $A \in T^{n \times n}$ trianguláris, akkor $|A|$ a főátlón elhelyezkedő elemek szorzata.
- (9) Az $A \in T^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $|A| \neq 0$.

3.4. Példa. $\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett. Az $1, i$ minimális generátorrendszer, tehát $\mathbb{C}$ dimenziója 2, azaz $\mathbb{C}$ izomorf $\mathbb{R}^2$ -tel mint vektortér (de természetesen nem mint test).

3.5. Definíció. Az S halmazt a $(T; +, \cdot)$ test **résztestjének** nevezzük, ha

- (1) $\emptyset \neq S \subseteq T$, (nemüres részhalmaz)
- (2) $(\forall x, y \in S)(x + y, x \cdot y \in S)$, (zárt T műveleteire),
- (3) $(S; +, \cdot)$ test, (testet alkot T műveletek megszorításával).

3.6. Példa. Határozzuk meg $\mathbb{C}$ legszűkebb résztestét (olyan nemüres részhalmazát, amely zárt az összeadás és szorzásra nézve, és maga is test), amely tartalmazza a racionális számokat és a $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ komplex számot. Mivel a szorzásra zártnak kell lennie, ezért tartalmaznia kell a

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

komplex számot. Az összeadásra és a szorzásra való zártaságból kapjuk, hogy ez a résztest nem lehet szűkebb mint az

$$T = \left\{ r + s \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + t \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) : r, s, t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

halmaz. Figyeljük meg, hogy T zárt az összeadásra, az additív inverz képzésre, a szorzásra, a konjugálásra és a nemnulla racionális számmal való osztásra nézve, továbbá $0, 1 \in T$, azaz tartalmazza $\mathbb{C}$ zérus- és egységelemét. Az egyetlen érdekes kérdés, hogy zárt-e a multiplikatív inverz képzésre is. De a

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

képlet miatt a multiplikatív inverz kiszámítható konjugálás, szorzás és valós (esetünkben racionális) számmal való osztás segítségével, tehát T az multiplikatív inverzképzésre is zárt. Ezzel beláttuk, hogy T résztest.

3.7. Tétel. Legyen S a T test résztestje. Ekkor T vektorteret alkot S felett.

3.8. Példa. Az előbbi feladatban kiszámolt T résztestnek $\mathbb{Q}$ további részteste. Tehát T vektorteret alkot $\mathbb{Q}$ felett. Mivel az $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ vektorrendszer generátorrendszert alkot (vegyük észre T definiálásában a lineáris kombinációkat), ezért T dimenziója legfeljebb 3. Azt szeretnénk megmutatni, hogy a generátorrendszer lineárisan független is, azaz T dimenziója pontosan 3. Tegyük fel, hogy

$$r + s \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + t \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 0$$

valamely $r, s, t \in \mathbb{Q}$ számokra. A baloldal képzetes része $\frac{s-t}{2}$, tehát a komplex számok kanonikus alakjának egyértelműségéből következik, hogy $s - t = 0$, azaz $s = t$. Ekkor

a baloldal valós része $r + s \cdot \sqrt{3} = 0$. Ha $s \neq 0$, akkor kapnánk, hogy $\sqrt{3} = -\frac{r}{s}$ ami ellentmondás mert $\sqrt{3}$ irracionális. Tehát $s = 0$ és így $r = 0$. Ezzel megmutattuk, hogy $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ lineárisan független, azaz bázis.

3.9. Példa. Az előző példában láttuk, hogy ha S részteste T -nek, akkor T vektortér S felett. Ennek az állításnak a megfordítása még számtestek esetében sem igaz, azaz létezik olyan $\mathbb{Q} \subseteq T \subseteq \mathbb{C}$ számhalmaz, amely vektorteret alkot $\mathbb{Q}$ felett a szokásos műveletekkel, de nem test. Legyen

$$T = \left\{ r + s \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) : r, s \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy T vektortér $\mathbb{Q}$ felett, és $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ bázis T -ben. Ugyanakkor, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \notin T$, mivel $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ lineárisan független vektorrendszer $\mathbb{Q}$ felett. Tehát $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^2 \notin T$, azaz T nem zárt a szorzásra, csak a racionális számokkal való szorzásra.

3.10. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

- (1) $\mathbb{Z}$ test.
- (2) $\mathbb{Q}$ test.
- (3) $\mathbb{R}$ test.
- (4) $\mathbb{C}$ test.
- (5) A valós függvények $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ halmaza test.
- (6) $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
- (7) $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- (8) $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathbb{C}$ felett.
- (9) A valós függvények $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ halmaza vektorteret alkot $\mathbb{R}$ felett.

3.11. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

- (1) $\mathbb{Q}$ 1-dimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
- (2) $\mathbb{R}$ 2-dimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
- (3) $\mathbb{C}$ 4-dimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
- (4) $\mathbb{R}$ 1-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- (5) $\mathbb{C}$ 2-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- (6) $\mathbb{R}$ végesdimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
- (7) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 2-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.
- (8) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 4-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.

3.12. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

- (1) Az $(1, 0), (0, 1)$ vektorrendszer bázis az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^2$ vektortérben.
- (2) Az $(1, 0), (0, 1)$ vektorrendszer bázis az $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}^2$ vektortérben.
- (3) A 2 vektorrendszer bázis a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{Q}$ vektortérben.
- (4) Az 1 vektorrendszer bázis a $\mathbb{C}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.
- (5) Az $2, -i$ vektorrendszer bázis a $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.
- (6) Az $1, \sqrt{2}$ vektorrendszer független a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben.
- (7) Az $1, \sqrt{2}$ vektorrendszer generátorrendszer a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben.
- (8) Az $1, i$ vektorrendszer bázis a $\mathbb{C}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.

3.13. Tétel (Alterek dimenziótétele). Ha U és V végesdimenziós altér valamely vektortérben, akkor $U \cap V$ és $U + V$ is végesdimenziós, és

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V).$$

3.14. Példa. Az $\mathbb{R}^4$ vektortérben megadjuk az $(1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1)$ és $(-3, 3, 2, 1)$ vektorok által generált alteret elemeinek megadásával. Tudjuk, hogy a generált U altér ezen vektorok lineáris kombinációja, azaz

$$U = \{ x_1 \cdot (1, 1, 2, -1) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 1) + x_3 \cdot (-3, 3, 2, 1) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}.$$

Tehát a $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor akkor és csak akkor eleme U -nak, ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszernek van megoldása az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektorra nézve. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a Gauss-elimináció segítségével megoldjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & b_1 \\ 1 & 1 & 3 & b_2 \\ 2 & 0 & 2 & b_3 \\ -1 & 1 & 1 & b_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & b_1 \\ 0 & 3 & 6 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & 8 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & b_4 + b_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - b_1 + 3(b_4 + b_1) \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 + 4(b_4 + b_1) \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & b_4 + b_1 \end{array} \right)$$

Nem végeztük el a Gauss-elimináció minden lépését, mert a bekeretezett elemeket tartalmazó sorokat nem szoroztuk be egy olyan konstanssal, hogy a bekeretezett elemek mindegyike 1 legyen, másrészt sorcserékkel nem hoztuk a mátrixot lépcsős alakra.

A kapott bővített mátrixról már látjuk, hogy x_1 és x_2 kötött változók (mert az első és második oszlopban vannak a kitüntetett elemeink), és az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 - 3(b_4 + b_1) = -2b_1 - 3b_4, \quad \text{és} \\ b_3 &= 2b_1 - 4(b_4 + b_1) = -2b_1 - 4b_4. \end{aligned}$$

Tehát azt mutattuk meg, hogy

$$U = \{ (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1, b_4 \in \mathbb{R} \}.$$

Ellenőrzésképp megnézzük, hogy a generáló vektorok tényleg ebben az altérben vannak. Az $(1, 1, 2, -1)$ vektor esetén $b_1 = 1$ és $b_4 = -1$, tehát $-2b_1 - 3b_4 = -2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = -2 + 3 = 1$ és $-2b_1 - 4b_4 = -2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = -2 + 4 = 2$, ami éppen a helyes érték. Hasonlóan $(-2, 1, 0, 1)$ -re $-2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$ és $-2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$. Végezetül a $(-3, 3, 2, 1)$ vektorra $-2 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3$ és $-2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2$.

3.15. Példa. Az előbbi példa U altérének az

$$U = \{ (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1, b_4 \in \mathbb{R} \}.$$

képlettel való megadásából nagyon sok hasznos információra következtethetünk. Először is, U kétdimenziós mert b_1 és b_4 szabadon választható, és egy bázisát úgy nyerhetjük, hogy a

$$\begin{aligned} b_1 = 1, b_4 = 0 \text{ esetén } (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) &= (1, -2, -2, 0), \text{ és} \\ b_1 = 0, b_4 = 1 \text{ esetén } (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) &= (0, -3, -4, 1), \end{aligned}$$

azaz az $(1, -2, -2, 0)$, $(0, -3, -4, 1)$ vektorrendszer bázisa U -nak. Az is könnyen látható, hogy a $(0, 1, 0, 0)$ és $(0, 0, 1, 0)$ vektorok nincsenek az U altérben, és olyan W alteret generálnak, amelyre $U \cap W = \{0\}$ és $U + W = \mathbb{R}^4$ (egy ilyen W alteret az U komplementumának hívjuk). Vegyük észre, hogy teljesül az alterek dimenziótétele, mert $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 2$, $\dim(U \cap W) = 0$ és $\dim(U + W) = 4$.

3.16. Példa. Tekintsük a $(0, 3, 1, -1)$ és $(1, -5, -9, 1)$ vektorok által generált V alteret az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, és adjuk meg a 3.14 példához hasonlóan a V elemeit képlet segítségével. A megfelelő egyenletrendszer bővített mátrixa és annak Gauss-féle eliminációval való átalakítása:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & c_1 \\ 3 & -5 & c_2 \\ \boxed{1} & -9 & c_3 \\ -1 & 1 & c_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{1} & c_1 \\ 0 & 22 & c_2 - 3c_3 \\ 1 & -9 & c_3 \\ 0 & -8 & c_4 + c_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{1} & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 - 3c_3 - 22c_1 \\ \boxed{1} & -9 & c_3 \\ 0 & 0 & c_4 + c_3 + 8c_1 \end{array} \right).$$

Azt kaptuk tehát, hogy az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $c_2 - 3c_3 - 22c_1 = 0$ és $c_4 + c_3 + 8c_1 = 0$. Tehát a V altér elemeinek képlettel való megadása

$$V = \{ (c_1, 3c_3 + 22c_1, c_3, -c_3 - 8c_1) : c_1, c_3 \in \mathbb{R} \}.$$

3.17. Példa. A 3.14 és 3.16 példákat azért oldottuk meg, hogy az ott kiszámított eredmények felhasználásával az U és V alterek metszetét kiszámítsuk. Eddig tudjuk, hogy

$$U = \{ (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1, b_4 \in \mathbb{R} \}, \text{ és}$$

$$V = \{ (c_1, 3c_3 + 22c_1, c_3, -c_3 - 8c_1) : c_1, c_3 \in \mathbb{R} \}.$$

Tehát ha veszünk egy közös vektort a két altérből, akkor

$$(b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) = (c_1, 3c_3 + 22c_1, c_3, -c_3 - 8c_1),$$

azaz

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1, \\ -2b_1 - 3b_4 &= 3c_3 + 22c_1, \\ -2b_1 - 4b_4 &= c_3, \\ b_4 &= -c_3 - 8c_1. \end{aligned}$$

Ez megint csak egy (homogén) lineáris egyenletrendszer, amit sokféle módszerrel meg tudunk oldani, pl. Gauss-eliminációval. Most csak a jól bevált középiskolás módszert alkalmazzuk: c_1 és c_3 -at kifejezzük b_1 és b_4 segítségével, és kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -2b_1 - 3b_4 &= 3(-2b_1 - 4b_4) + 22b_1 = 16b_1 - 12b_4, \\ b_4 &= -(-2b_1 - 4b_4) - 8b_1 = -6b_1 + 4b_4. \end{aligned}$$

Átrendezzük:

$$\begin{aligned} 9b_4 &= 18b_1, \\ -3b_4 &= -6b_1, \end{aligned}$$

amelynek megoldása éppen $b_4 = 2b_1$, ahol b_1 tetszőleges szám lehet. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{ (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1 \in \mathbb{R} \text{ és } b_4 = 2b_1 \} \\ &= \{ (b_1, -8b_1, -10b_1, 2b_1) : b_1 \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Így $U \cap V$ egydimenziós altér és az $(1, -8, -10, 2)$ vektor generálja.

3.18. Példa. Folytatjuk a 3.14 és 3.16 példákban bevezetett U és V alterek vizsgálatát. Eddig tudjuk, hogy $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 2$, $\dim(U \cap V) = 1$, tehát az alterek dimenziótételéből kapjuk, hogy

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Az előző módszerekkel már meg is tudjuk keresni $U + V$ bázisát. Tudjuk, hogy az U altérnek az $(1, -2, -2, 0)$, $(0, -3, -4, 1)$ vektorrendszer generátorrendszere (itt a bázist vettük, de vehettük volna az $(1, 1, 2, -1)$, $(-2, 1, 0, 1)$, $(-3, 3, 2, 1)$ generátorrendszert is), míg a V altérnek a $(0, 3, 1, -1)$, $(1, -5, -9, 1)$ generátorrendszere. Tehát az $U + V$ alteret ezen generátorrendszerek uniója generálja, azaz

$$U + V = [(1, -2, -2, 0), (0, -3, -4, 1), (0, 3, 1, -1), (1, -5, -9, 1)].$$

Ennek az altérnek az elemeit megint képlet segítségével adjuk meg, amiből a bázis már kiolvasható. A megfelelő lineáris egyenletrendszer bővített mátrixa és annak Gauss-eliminációval

való megoldása:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ -2 & -3 & 3 & -5 & d_2 \\ -2 & -4 & 1 & -9 & d_3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & d_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & d_2 + 2d_1 \\ 0 & -4 & 1 & -7 & d_3 + 2d_1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & d_4 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 + 2d_1 + 3d_4 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 & d_3 + 2d_1 + 4d_4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & d_4 \end{pmatrix}$$

Azaz, az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $d_2 + 2d_1 + 3d_4 = 0$, tehát

$$U + V = \{ (d_1, -2d_1 - 3d_4, d_3, d_4) : d_1, d_3, d_4 \in \mathbb{R} \}.$$

Ebből már könnyen le tudjuk olvasni, hogy $U + V$ háromdimenziós vektortér, és $(1, -2, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, -3, 0, 1)$ egy bázisa.

3.19. Definíció. A T test feletti V vektortér $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független részszerkeireinek maximális hosszát a vektorrendszer **rangjának** nevezzük, és $r(v_1, \dots, v_k)$ -val jelöljük.

3.20. Tétel. Egy T test feletti vektortér bármely $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszerére esetén

$$r(v_1, \dots, v_k) = \dim[v_1, \dots, v_k].$$

3.21. Példa. Kiszámoljuk az $(1, 1, 2, -1)$, $(-2, 1, 0, 1)$, $(-3, 3, 2, 1)$ vektorrendszer rangját. Ez nem más, mint az általuk feszített altér dimenziója. Ezt a 3.14 példában már kiszámoltunk, és azt kaptuk, hogy

$$r((1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-3, 3, 2, 1)) = \dim(U) = 2.$$

A 3.16 és 3.18 példákban számoltak alapján

$$r((0, 3, 1, -1), (1, -5, -9, 1)) = \dim(V) = 2, \text{ és}$$

$$r((1, -2, -2, 0), (0, -3, -4, 1), (0, 3, 1, -1), (1, -5, -9, 1)) = \dim(U + V) = 3.$$

A 3.18 példában mi egy 4-elemű generátorrendszerből indultunk ki, de tudjuk azt, hogy az $(1, 1, 2, -1)$, $(-2, 1, 0, 1)$, $(-3, 3, 2, 1)$, $(0, 3, 1, -1)$, $(1, -5, -9, 1)$ vektorrendszer is az $U + V$ alteret generálja. Tehát

$$r((1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-3, 3, 2, 1), (0, 3, 1, -1), (1, -5, -9, 1)) = 3.$$

3.22. Definíció. Két vektorrendszert **ekvivalensnek** nevezzük, ha ugyanazt az alteret generálják.

3.23. Definíció. A vektorrendszerek **elemi átalakításai** a következők:

- (1) tetszőleges v_i vektor **nemnulla** $\lambda \in T$ skalárral való szorzása

$$v_1, \dots, v_{i-1}, \mathbf{v_i}, v_{i+1}, \dots, v_k \sim v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \mathbf{v_i}, v_{i+1}, \dots, v_k$$

- (2) tetszőleges v_i vektor tetszőleges $\lambda \in T$ skalárszorosának egy **másik** v_j ($j \neq i$) vektorhoz való hozzáadása

$$v_1, \dots, v_{j-1}, \mathbf{v_j}, v_{j+1}, \dots, v_k \sim v_1, \dots, v_{j-1}, \lambda \mathbf{v_i} + \mathbf{v_j}, v_{j+1}, \dots, v_k$$

- (3) nulla vektor elhagyása

$$v_1, \dots, v_{i-1}, \mathbf{0}, v_{i+1}, \dots, v_k \sim v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k.$$

3.24. Tétel. Két vektorrendszer akkor és csak akkor ekvivalensek, ha elemi átalakítások sorozatával egymásba alakíthatók. Tehát tetszőleges generátorrendszer elemi átalakítások sorozatával bázissá alakítható.

3.25. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak véges dimenziós vektorterekben?

- (1) Ekvivalens vektorrendszerek elemszáma megegyezik.
- (2) Elemi átalakítások megfordítottja is elemi átalakítás.
- (3) Bármely két lineárisan független vektorrendszer elemi átalakítások sorozatával egymásba alakíthatók.
- (4) Bármely két generátorrendszer elemi átalakítások sorozatával egymásba vihetők.
- (5) Két azonos vektor közül az egyiknek az elhagyása elemi átalakítások sorozatával megvalósítható.
- (6) A $\mathbb{C}^2$ vektortérben az $(1, 2), (i, 1) \sim (1, 2), (0, 1 - 2i) \sim (1, 2), (0, 1) \sim (1, 0), (0, 1)$ átalakítások elemiek.

3.26. Példa. A 3.14 példa U alterének $(1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-3, 3, 2, 1)$ generátorrendszerét elemi átalakításokkal bázissá alakítjuk.

$$\begin{aligned} (1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-3, 3, 2, 1) &\sim (1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-3, 3, 2, 1) - (1, 1, 2, -1) = \\ &= (1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-4, 2, 0, 2) \sim (1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-4, 2, 0, 2) - 2(-2, 1, 0, 1) \\ &= (1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0) \sim (1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy U kétdimenziós, tehát a kapott kételemű generátorrendszer bázis. Nem ugyanazt a bázist kaptuk, mint a 3.15 példa megoldásánál, de természetesen ez a két bázis egymásba alakítható:

$$\begin{aligned} (1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1) &\sim (1, 1, 2, -1) + (-2, 1, 0, 1), (-2, 1, 0, 1) \\ &= (-1, 2, 2, 0), (-2, 1, 0, 1) \sim -1 \cdot (-1, 2, 2, 0), (-2, 1, 0, 1) \\ &= (1, -2, -2, 0), (-2, 1, 0, 1) \sim (1, -2, -2, 0), (-2, 1, 0, 1) + 2 \cdot (1, -2, -2, 0) \\ &= (1, -2, -2, 0), (0, -3, -4, 1). \end{aligned}$$

3.27. Definíció. Az $A \in T^{m \times n}$ -es mátrix **sorrangja** az A sorai által alkotott vektorrendszer rangja, **oszloprangja** az A oszlopai által alkotott vektorrendszer rangja.

3.28. Definíció. Legyen $A \in T^{m \times n}$ tetszőleges T test feletti mátrix és $r \leq m, n$ egészek. Az A mátrix **r -edrendű aldeterminánsainak** az A mátrix tetszőleges r sorát és r oszlopát kijelölve, majd a kijelölt sorok és oszlopok találkozásában lévő elemekből alkotott $r \times r$ -es mátrixok determinánsait nevezzük. Az A mátrix **determinánsrangja** a nemelfajuló (nem nulla) aldeterminánsainak a maximális rendje.

3.29. Példa. Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsrangját. A rang maximum 4 lehet, mert ha az utolsó, csupa nulla oszlop benne van egy aldeterminánsban, akkor annak értéke 0. Viszont azokat a sorokat kiválasztva, amelyek 1-gyel kezdődnek az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

aldeterminánst kapjuk, amely éppen egy Vandermonde-determináns, ezért értéke

$$(3-2)(-1-2)(5-2)(-1-3)(5-3)(5-(-1)) \neq 0,$$

tehát az A mátrix determinánsrangja 4.

3.30. Tétel (Rangszámtétel). *Tetszőleges mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangjai megegyeznek.*

3.31. Definíció. A rangszámtétel szerint tetszőleges A mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik. Ezt a számot nevezzük az A mátrix **rangjának**, és $r(A)$ -val jelöljük.

3.32. Következmény. *Tetszőleges $A \in T^{n \times n}$ mátrixra a következő állítások ekvivalensek:*

- (1) $|A| \neq 0$,
- (2) A oszlopvektorainak rendszere lineárisan független,
- (3) A sorvektorainak rendszere lineárisan független.

3.33. Tétel (Kronecker-Capelli-tétel). *Tetszőleges T test, $A \in T^{m \times n}$ és $b \in T^m$ esetén az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $r(A) = r(A|b)$.*