

## MBX114E: Diszkrét matematika III.

(előadásvázlat, 2007. május 21.)

Maróti Miklós

### 2. KOMPLEX SZÁMOK

A diszkrét matematika I és II tárgyakból a következő fogalmakat kell tudni: **test**, test **additív** és **multiplikatív csoportja**, **valós számok** és tulajdonságai.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- Szendrei Ágnes: *Diszkrét matematika*, Polygon Kiadó, Szeged, 1994–2002.

**2.1. Definíció.** A valós számokból álló számpárokat **komplex számoknak** nevezzük. A komplex számok halmazát  $\mathbb{C}$  jelöli, azaz  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**2.2. Definíció.** Az  $(a, b)$  és  $(c, d)$  komplex számok **összege** és **szorzata**:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

**2.3. Példa.** Az  $(1, 2)$  és  $(3, 4)$  komplex számok összege és szorzata:

$$\begin{aligned}(1, 2) + (3, 4) &= (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6), \text{ és} \\ (1, 2) \cdot (3, 4) &= (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = (3 - 8, 4 + 6) = (-5, 10).\end{aligned}$$

**2.4. Tétel.**  $(\mathbb{C}; +, \cdot)$  test.

*Bizonyításvázlat.* Minden könnyen leellenőrizhető, ha az additív egységnek a  $(0, 0)$ , míg a multiplikatív egységnek az  $(1, 0)$  komplex számokat választjuk. Az egyetlen érdekes kérdés a multiplikatív inverz létezése: tetszőleges, az additív egységtől különböző  $(a, b) \in \mathbb{C}$  inverze

$$(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

mivel

$$(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0). \quad \square$$

**2.5. Példa.**

$$\frac{(1, 2)}{(3, 4)} = (1, 2) \cdot (3, 4)^{-1} = (1, 2) \cdot \left( \frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right) = \left( \frac{3 - (-8)}{25}, \frac{-4 + 6}{25} \right) = \left( \frac{11}{25}, \frac{2}{25} \right).$$

**2.6. Kérdések.** A következő állítások közül melyek igazak tetszőleges  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  esetén:

- (1)  $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ ,
- (2)  $(a, 0) \cdot (c, 0) = (a \cdot c, 0)$ ,
- (3)  $(0, b) \cdot (0, d) = (0, b \cdot d)$ ?

**2.7. Tétel.** Minden  $a, b \in \mathbb{R}$  esetén

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0), & -(a, 0) &= (-a, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (a \cdot b, 0), & (a, 0)^{-1} &= (a^{-1}, 0).\end{aligned}$$

**2.8. Definíció.** Tetszőleges  $a \in \mathbb{R}$  esetén az  $(a, 0)$  komplex szám helyett egyszerűen  $a$ -t írunk, és nem is különböztetjük meg az  $a$  valós számtól. Úgy tekintjük, hogy  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ . Továbbá a  $(0, 1)$  komplex számot  $i$ -vel jelöljük.

**2.9. Tétel.** Tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  esetén  $(a, b) = a + bi$ , azaz minden komplex szám egyértelmű módon előáll  $a + bi$  alakban. Továbbá  $i^2 = -1$ .

**2.10. Definíció.** A  $z \in \mathbb{C}$  komplex szám  $a + bi$  alakban való felírását  $z$  **kanonikus alakjának** nevezzük. Az  $a \in \mathbb{R}$  számot  $z$  **valós részének**, míg a  $b \in \mathbb{R}$  számot  $z$  **képzetes részének** hívjuk, és  $a = \operatorname{Re} z$ , illetve  $b = \operatorname{Im} z$ -vel jelöljük. Az  $i$  komplex szám neve **képzetes egység**.

**2.11. Példa.** A következő számolásban csak azt használtuk ki, hogy  $\mathbb{C}$  test (azaz érvényesek a szokásos számolási szabályok) és  $i^2 = -1$ :

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Vessük össze a kapott eredményt a komplex számok szorzásának definíciójával! A multiplikatív inverz kiszámolásánál azt a jól ismert azonosságot alkalmazzuk, hogy  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ :

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i.$$

**2.12. Definíció.** Legyen adott a síkban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, és feleltessük meg az  $a + bi$  komplex számnak az  $(a, b)$  koordinátájú pontot. Így kapjuk a **komplex számsíkot**, más néven a **Gauss-féle számsíkot**. Az első tengelyt (abszcissza) **valós tengelynek**, a második tengelyt (ordináta) pedig képzetes tengelynek hívjuk. A valós tengelyen találhatók a valós számok, a képzetes tengelyen pedig a **tiszta képzetes számok**.

**2.13. Definíció.** A  $z = a + bi$  komplex szám **konjugáltján** a  $\bar{z} = a - bi$  komplex számot, és **abszolút értékén** a  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  valós számot értjük.

**2.14. Megjegyzés.** A komplex számsíkon a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés, az abszolút érték az origótól (nullától) mért távolság, a komplex számok összeadása pedig (hely)vektorok összeadása.

**2.15. Tétel.** Tetszőleges  $u, v \in \mathbb{C}$  számra

- (1)  $\overline{\bar{u}} = u$ ,
- (2)  $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$ ,
- (3)  $\overline{u - v} = \bar{u} - \bar{v}$ ,
- (4)  $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$
- (5)  $\overline{u/v} = \bar{u}/\bar{v}$ , ha  $v \neq 0$ ,
- (6)  $\bar{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$ ,
- (7)  $u + \bar{u} = 2 \operatorname{Re} u$ ,
- (8)  $u \cdot \bar{u} = |u|^2$ .

**2.16. Tétel.** Tetszőleges  $u, v \in \mathbb{C}$  számra

- (1)  $|u| = 0 \iff u = 0$ ,
- (2)  $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$ ,
- (3)  $|u/v| = |u|/|v|$ , ha  $v \neq 0$ ,
- (4)  $|u + v| \leq |u| + |v|$ ,
- (5)  $|\bar{u}| = |u|$ .

**2.17. Tétel.** Legyenek  $z_1, z_2, \dots, z_n$  komplex számok úgy, hogy a komplex számsíkon az általuk meghatározott poligon konvex, és a  $z_1, \dots, z_n$  csúcsok az óramutató járásával ellentétes irányban helyezkednek el. Ekkor a poligon területe a következő képlettel számolható:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \dots + \bar{z}_{n-1} z_n + \bar{z}_n z_1).$$

**2.18. Definíció.** Egy nemnulla  $z$  komplex szám **argumentuma** az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül, hogy átmenjen a  $z$ -nek megfelelő ponton, amit **arg  $z$** -vel jelöljük. A nulla számnak nincsen argumentuma.

**2.19. Kérdések.** Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

- (1) Minden nemnulla valós szám argumentuma nulla.
- (2) Minden  $\pi$  argumentumú komplex szám valós.
- (3) Az  $i$  komplex szám argumentuma  $3\pi/2$ .
- (4) Az  $1 - i$  komplex szám argumentuma  $-\pi/4$ .
- (5) Az  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  komplex szám argumentuma  $-\pi/3$ .
- (6) Minden nemnulla  $z \in \mathbb{C}$  számra  $\overline{\arg z} = \arg \bar{z}$ .
- (7) Minden nemnulla  $z \in \mathbb{C}$  számra  $\arg(-z) = \arg z + \pi$ .
- (8) Minden nemnulla  $z \in \mathbb{C}$  számra  $\arg(2z) = 2 \arg z$ .

**2.20. Tétel.** Tetszőleges  $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  és  $\varphi \in \mathbb{R}$  számok esetén

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff r = |z| \text{ és } \varphi \equiv \arg z \pmod{2\pi}.$$

**2.21. Definíció.** A nemnulla komplex számok

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

alakban való felírását **trigonometrikus alaknak** nevezzük. A nulla komplex számnak nincsen trigonometrikus alakja.

**2.22. Megjegyzés.** A nullától különböző komplex számok argumentuma csak „modulo  $2\pi$ ”, azaz  $2\pi$  egész számú többszöröseitől eltekintve meghatározott. Ezért a komplex számok trigonometrikus alakja sem egyértelmű: például mind  $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ , mind a  $\cos \frac{-3\pi}{2} + i \sin \frac{-3\pi}{2}$  az  $i$  komplex szám trigonometrikus alakja. Viszont ha egy konkrét komplex szám trigonometrikus alakját kell meghatároznunk, akkor az argumentumot mindig a  $[0, 2\pi[$  intervallumban adjuk meg.

**2.23. Tétel.** Tetszőleges nullától különböző  $u = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  és  $v = s(\cos \psi + i \sin \psi)$  komplex számokra

- (1)  $\bar{u} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$ ,
- (2)  $u \cdot v = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$ ,
- (3)  $u^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$ ,
- (4)  $u/v = r/s \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$ ,

**2.24. Megjegyzés.** A komplex számok kanonikus alakját felhasználva látható, hogy rögzített  $v \in \mathbb{C}$  komplex szám esetén a  $z \mapsto z + v$  leképezés nem más, mint a  $v$ -hez tartozó vektorral való eltolás a komplex számsíkon. A komplex számok trigonometrikus alakját felhasználva pedig látható, hogy rögzített  $v = \cos \psi + i \sin \psi$  esetén a  $z \mapsto z \cdot v$  leképezés nem más, mint az origó körüli  $\psi$  szögű forgatás a komplex számsíkon.

**2.25. Példa.** Az ismert szinusz és koszinusz összegzési képleteket könnyen megkaphatjuk komplex számok segítségével. Tekintsük a

$$u = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad v = \cos \psi + i \sin \psi$$

komplex számokat. A trigonometrikus alakokkal számolva a szorzatuk

$$u \cdot v = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi).$$

De ha a kanonikus alakot használjuk a szorzat kiszámolására, akkor

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= \cos \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot i \sin \psi + i \sin \varphi \cdot \cos \psi + i \sin \varphi \cdot i \sin \psi \\ &= (\cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi) + i(\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi). \end{aligned}$$

Mivel az  $u \cdot v$  komplex szám egyértelműen írható fel kanonikus alakban, ezért

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi, \text{ és} \\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi. \end{aligned}$$

Hasonlóan számítható ki a  $\cos(\varphi - \psi)$  és  $\sin(\varphi - \psi)$  képlete is, de ekkor az  $u$  és  $v$  komplex számok hányadosát kell vennünk.

**2.26. Tétel (Moivre-képlet).** *Bármely nem zéró  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  komplex szám és  $n \in \mathbb{Z}$  esetén*

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

**2.27. Kérdések.**

- (1) Miért nem lehet az előző tétel képletét használni például a  $i^{0.123456}$  értékének definiálásához?
- (2) Igaz-e, hogy  $i^{-1} = -i$ ?
- (3) Igaz-e minden  $0 \neq z \in \mathbb{C}$  és  $n \in \mathbb{N}$  esetén, hogy  $|z^n| = |z|^n$ ?
- (4) Igaz-e minden  $0 \neq z \in \mathbb{C}$  és  $n \in \mathbb{N}$  esetén, hogy  $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ ?
- (5) Milyen vonalon helyezkednek el a  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  valódi komplex szám egész hatványai?
- (6) Melyek azok a  $z$  komplex számok, amelyekre  $\arg z = \arg(z^2)$ ?
- (7) Melyek azok a  $z$  komplex számok, amelyekre  $\arg z = \arg(z^3)$ ?
- (8) Melyek azok a  $z$  komplex számok, amelyekre  $\arg z = \arg(z^{-1})$ ?
- (9) Melyek azok a  $z$  komplex számok, amelyekre  $|z| = |z^2|$ ?

**2.28. Példa.** Tudjuk, hogy  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  és  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Megmutatjuk, hogy  $\cos 3\alpha$  és  $\sin 3\alpha$  hogyan számítható ki egyszerűen. Vegyük a  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$  komplex számot és számoljuk ki a harmadik hatványát a trigonometrikus alakja

$$z^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha,$$

és a kanonikus alakjai segítségével (felhasználva azt, hogy  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ )

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha) + i(3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha, \text{ és} \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

**2.29. Definíció.** Tetszőleges  $n$  pozitív egész szám és  $z \in \mathbb{C}$  esetén azt mondjuk, hogy az  $u$  komplex szám  **$n$ -edik gyöke**  $z$ -nek, ha  $u^n = z$ .

**2.30. Tétel.** *Minden nemnulla  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  komplex számnak pontosan  $n$  különböző  $n$ -edik gyöke van, mégpedig*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

**2.31. Példa.** Számítsuk ki az 1 komplex számnak a tizenkettedik gyökeit, és adjuk meg őket kanonikus alakban. Az 1 trigonometrikus alakja természetesen az  $1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ . Felhasználva a nevezetes szögek szinuszt és koszinuszt azt kapjuk, hogy az 1 tizenkét gyöke:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{0}{12} + i \sin \frac{0}{12} \right) = 1, \\ u_1 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{12} + i \sin \frac{4\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
u_3 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{6\pi}{12} + i \sin \frac{6\pi}{12} \right) = i, \\
u_4 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{8\pi}{12} + i \sin \frac{8\pi}{12} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
u_5 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{10\pi}{12} + i \sin \frac{10\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\
u_6 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{12\pi}{12} + i \sin \frac{12\pi}{12} \right) = -1, \\
u_7 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{14\pi}{12} + i \sin \frac{14\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \\
u_8 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{16\pi}{12} + i \sin \frac{16\pi}{12} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
u_9 &= 1 \cdot \left( \cos \frac{18\pi}{12} + i \sin \frac{18\pi}{12} \right) = -i, \\
u_{10} &= 1 \cdot \left( \cos \frac{20\pi}{12} + i \sin \frac{20\pi}{12} \right) = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
u_{11} &= 1 \cdot \left( \cos \frac{22\pi}{12} + i \sin \frac{22\pi}{12} \right) = +\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,
\end{aligned}$$

**2.32. Definíció.** Az  $\varepsilon$  komplex számot  **$n$ -edik egységgyöknek** nevezzük ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), ha  $\varepsilon^n = 1$ . Az  $\varepsilon$  komplex szám **egységgyök**, ha  $n$ -edik egységgyök valamely  $n \in \mathbb{N}^+$ -re.

**2.33. Tétel.** Az  $n$ -edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Ezzel a jelöléssel  $\varepsilon_0 = 1$  és  $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$  minden  $k = 0, \dots, n-1$  esetén.

**2.34. Megjegyzés.** Az  $n$ -edik egységgyökök egy szabályos  $n$ -szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek a körülírt köre az origó középpontú egységgör, és egyik csúcsa 1. (Ez a két információ egyértelműen meg is határozza az  $n$ -szöget.)

**2.35. Példa.** Az első egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^1 = 1\} = \{1\}.$$

A második egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^2 = 1\} = \{1, -1\}.$$

A harmadik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^3 = 1\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

A negyedik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

A hatodik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

**2.36. Tétel.** Egy nemnulla komplex szám összes  $n$ -edik gyökét megkaphatjuk, ha egy rögzített  $n$ -edik gyökét megszorozzuk sorra az  $n$ -edik egységgyökökkel. Tehát ha  $u^n = z \neq 0$ , akkor a  $z$  komplex szám  $n$ -edik gyökei:  $u \cdot \varepsilon_k$  ahol  $k = 0, \dots, n-1$ .

**2.37. Példa.** Számoljuk ki a  $\sqrt[3]{8i}$  értékeit. A  $8i$  trigonometrikus alakja

$$8i = 8 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right),$$

tehát mindhárom köbgyökének az abszolút értéke  $\sqrt[3]{8} = 2$ , és a gyökök

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i, \\ 2 \cdot \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) &= 2 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i, \\ 2 \cdot \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) &= 2 \cdot \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = -2i. \end{aligned}$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy  $-2i$  gyök, mivel  $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$ . Tehát ha alkalmazzuk az előző tételt, és tudjuk a harmadik egységgyököket, akkor megkapjuk a három gyököt:

$$\begin{aligned} -2i \cdot 1 &= -2i, \\ -2i \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) &= \sqrt{3} + i, \\ -2i \cdot \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) &= -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

**2.38. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $\varepsilon$  komplex szám **primitív  $n$ -edik egységgyök**, ha  $n$ -edik egységgyök, de nem  $m$ -edik egységgyök semmilyen  $0 < m < n$  egészre.

**2.39. Példa.** Az 1 primitív első egységgyök. A  $-1$  primitív második egységgyök. A  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  és  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  primitív harmadik egységgyökök. Az  $i$  és  $-i$  primitív negyedik egységgyökök. Az  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  és  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  primitív hatodik egységgyökök.

**2.40. Tétel.** Az  $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$  egységgyökök akkor és csak akkor primitív  $n$ -edik egységgyökök, ha  $k$  relatív prím  $n$ -hez.

**2.41. Tétel.** A primitív  $n$ -edik egységgyökök száma  $\varphi(n)$ , ahol  $\varphi$  az Euler-féle függvény.

**2.42. Kérdések.**

- (1) Hány primitív ötödik egységgyök van?
- (2) Hány primitív tizedik egységgyök van?
- (3) Igaz-e, hogy minden egységgyök primitív  $n$ -edik egységgyök valamely  $n$  egészre?
- (4) Igaz-e, hogy minden olyan  $z$  komplex szám, amelyre  $|z| = 1$ , egységgyök?
- (5) Létezik-e olyan komplex szám, amely 17-edik és 73-madik egységgyök is?
- (6) Létezik-e olyan komplex szám, amely 17-edik és 73-madik primitív egységgyök is?

**2.43. Tétel (Az algebra alaptétele).** Ha  $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  komplex együtthatós ( $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ ) nemkonstans ( $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ ) polinom, akkor multiplicitással számolva pontosan  $n$  darab komplex gyöke van.

**2.44. Tétel.** Tetszőleges  $z = a + bi$  komplex számra

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = e^a \cdot (\cos b + i \sin b).$$

**2.45. Példa (Euler-formula).**  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .