

MM3106/1: ÁLTALÁNOS ALGEBRA GYAKORLAT
(2006.11.28)

1. ISMÉTLÉS
(SZEPTEMBER 5.–SZEPTEMBER 12.)

1.1. Feladat. (2 pt.)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) $\overline{a + bi} = a - bi$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számokra.
- (2) $1 + (1 - i) + (1 - i)^2 + \dots + (1 - i)^{99} = 2^{50}i$.
- (3) $\overline{z + u} = \overline{z} + \overline{u}$ tetszőleges $z, u \in \mathbb{C}$ számokra.
- (4) $\overline{zu} = \overline{z} \cdot \overline{u}$ tetszőleges $z, u \in \mathbb{C}$ számokra.
- (5) Minden $n \geq 1$ egész és $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén a $z^n = u$ egyenletnek pontosan n megoldása van.
- (6) $|z + u| \leq |z| + |u|$ tetszőleges $z, u \in \mathbb{C}$ számokra.
- (7) $|(a + bi)^n| = a^n$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $a, b \in \mathbb{R}$ számokra.
- (8) Tetszőleges $u = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $v = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ komplex számokra $u\overline{v} = rs(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$.
- (9) $E_n = \bigcup_{d|n} P_d$, ahol E_n , illetve P_n az n -edik egységgyökök, illetve primitív n -edik egységgyökök halmazát jelöli.
- (10) $|E_n \setminus P_n| = n - \varphi(n)$.

1.2. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) $(\mathbb{C}[x]; +, \cdot)$ integritástartomány.
- (2) $(\mathbb{Z}_{15}; \cdot)$ Abel-csoport.
- (3) $(\mathbb{Z}_{15}; +)$ egységelemes félcsoport.
- (4) $(\mathbb{Z}_4; +, \cdot)$ test.
- (5) $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \circ)$ csoport, ahol $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$.
- (6) $(E_5, \cdot)$ Abel-csoport, ahol $E_5 = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \varepsilon^5 = 1\}$.
- (7) $(\mathbb{Z}_6; +, \cdot)$ integritástartomány.
- (8) $(\mathbb{R}^{7 \times 7}; +, \cdot)$ integritástartomány.
- (9) A $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ gyűrűben a páros számok halmaza ideál.
- (10) A $(\mathbb{Q}[x]; +, \cdot)$ gyűrűben a legalább másodfokú polinomok halmaza ideál.

1.3. Feladat. (2 pt.)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Egész együtthatós polinom racionális gyökei mind egészek.
- (2) Tetszőleges $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha nincs gyöke.
- (3) Ha az $f \in \mathbb{Q}[x]$ harmadfokú polinomnak nincs racionális gyöke, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (4) Tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak a $c \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor többszörös gyöke, ha $f'(c) = 0$.
- (5) Tetszőleges $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom akkor és csak akkor egyenlő a nulla polinommal, ha minden $c \in \mathbb{Q}$ elem gyöke.
- (6) Tetszőleges $f \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinom akkor és csak akkor egyenlő a nulla polinommal, ha minden $c \in \mathbb{Z}_7$ elem gyöke.
- (7) Ha az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak a $c \in \mathbb{C}$ szám gyöke, akkor $\bar{c}$ is az.
- (8) Az $1 + 3\sqrt{2}$ algebrai számnak az $1 - 3\sqrt{2}$ konjugáltja.
- (9) Ha az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak az $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ szám gyöke valamely $a, b \in \mathbb{Q}$ esetén, akkor $a - b\sqrt{2}$ is gyöke.
- (10) Létezik olyan K test és olyan legalább másodfokú $f \in K[x]$ polinom, amelyre $f' = 0$.

1.4. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Az $x^2 - 3x + 5$ polinom irreducibilis $\mathbb{C}[x]$ -ben.
- (2) Az $x^2 - 3x + 5$ polinom irreducibilis $\mathbb{R}[x]$ -ben.
- (3) Az $x^3 - 3x + 5$ polinom irreducibilis $\mathbb{R}[x]$ -ben.
- (4) Az $x^3 - 3x + 5$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben.
- (5) Az $x^7 - 100x^3 + 35$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben.
- (6) Az $x^3 - x + \bar{1}$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben.
- (7) Az $x^3 - x + \bar{2}$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_3[x]$ -ban.
- (8) $\mathbb{Z}$ hányadosteste $\mathbb{Q}$.
- (9) $\mathbb{Q}$ hányadosteste $\mathbb{R}$.
- (10) $\mathbb{Q}[x]$ hányadosteste $\mathbb{Q}(x)$.

1.5. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Ha egy vektortérben van 4-elemű lineárisan független vektorrendszer és van 6-elemű generátorrendszer, akkor a vektortér 5 dimenziós.
- (2) Véges dimenziós vektortérben egy generátorrendszer nem lehet valódi részhalmaza egy lineárisan független vektorrendszernek.
- (3) Az $\{1, \sqrt{2}\}$ halmaz generátorrendszere a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérnek.
- (4) Az 1 és $\sqrt{2}$ számok lineárisan függetlenek a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben.
- (5) Az 1 és $\sqrt{2}$ számok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.
- (6) Az $\{1, i\sqrt{2}\}$ halmaz bázist alkot az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.
- (7) Az $\{1, x\}$ halmaz bázist alkot az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}(x)$ vektortérben.
- (8) Tetszőleges K testre és $A, B \in K^{7 \times 7}$ mátrixokra $|AB| = |BA|$.
- (9) Tetszőleges K testre az $A \in K^{7 \times 7}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $|A| = 1$.
- (10) Az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ halmaz a szokásos mátrixösszeadás és a valós skalárral való szorzás műveletekkel 4-dimenziós vektorteret alkot $\mathbb{R}$ felett.

1.6. Feladat. (1 pt. előadta H. Ádám)

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ halmaz a következő művelettel:

$$(x, y) \diamond (u, v) = (x + yu, yv).$$

1.7. Feladat. (2 pt.)

Tekintsük $\mathbb{C}$ azon részhalmazait, amelyekhez tartozó ponthalmazok a komplex számsíkon egyenest alkotnak. Ezek közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadás, illetve a szokásos szorzás műveletre nézve?

1.8. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy az alábbi grupoidok csoportok:

- (1) $(\mathcal{P}(A); \triangle)$, ahol A tetszőleges halmaz és $\triangle$ a szimmetrikus különbség-képzés művelete;
- (2) $\text{GL}(K, n) = (\{M \in K^{n \times n} : |M| \neq 0\}; \cdot)$, ahol K tetszőleges test, n 1-nél nagyobb pozitív egész, a művelet pedig a szokásos mátrixszorzás;
- (3) $\text{SL}(K, n) = (\{M \in K^{n \times n} : |M| = 1\}; \cdot)$, ahol K tetszőleges test, n 1-nél nagyobb pozitív egész, a művelet pedig a szokásos mátrixszorzás;
- (4) $Q = (\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}; \cdot)$, ahol a $\cdot$ műveletet a következő művelet-táblázat definiálja:

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

1.9. Feladat. (1 pt.)

Gyűrűt alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadásra és szorzásra nézve:

- (1) $\mathbb{N}$,
- (2) $\mathbb{Z}_n[x]$ ($n \in \mathbb{N}$),
- (3) $\mathbb{Q}[x]$,
- (4) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

A gyűrűk esetében állapítsa meg, hogy integritástartományok-e, főideálgyűrűk-e, illetve euklideszi gyűrűk-e.

1.10. Feladat. (1 pt.)

Adja meg a következő integritástartományok hányadostestét:

- (1) $\mathbb{R}[x]$,
- (2) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1.11. Feladat. (2 pt. előadta H. Szabolcs és H. Ádám)

Döntse el, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek-e a megadott polinom-gyűrűben:

- (1) $x^3 - 3x + 9 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (2) $2x^7 - 14x^4 + 28 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (3) $x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (4) $x^5 + x^2 - x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

1.12. Feladat. (2 pt.)

Legyen

- (1) $K = \mathbb{R}$ és $V = \mathbb{C}$,
- (2) $K = \mathbb{Q}$ és $V = \mathbb{R}$,
- (3) $K = \mathbb{Q}$ és $V = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- (4) $K = \mathbb{Q}$ és $V = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Igazolja, hogy V vektorteret alkot K fölött a szokásos összeadásra és a K -beli elemekkel való szokásos szorzásra nézve. Továbbá döntse el, hogy V véges dimenziós vektortér-e, és ha igen, akkor mekkora a dimenziója.

1.13. Feladat. (3 pt.)

Legyen

- (1) $K = \mathbb{Z}_2$ és $V = \mathbb{Z}_2(x)$,
- (2) $K = \mathbb{Q}$ és $V = \{a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3} \in \mathbb{C} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$,
- (3) $K = \mathbb{Q}$ és $V = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Igazolja, hogy V vektorteret alkot K fölött a szokásos összeadásra és a K -beli elemekkel való szokásos szorzásra nézve. Továbbá döntse el, hogy V véges dimenziós vektortér-e, és ha igen, akkor mekkora a dimenziója. Minden állítását és észrevételét részletes bizonyítással támassza alá.

1.14. Feladat. (3 pt.)

Legyen K tetszőleges test, n pedig 1-nél nagyobb egész. Bizonyítsa be, hogy minden $A \in K^{n \times n}$ mátrixhoz található olyan nemzéró $f \in K[x]$ polinom, amelyre $f(A) = 0$, és minden ilyen polinom többszöröse a legkisebb fokszámú ilyen polinomoknak.

2. A CSOPORTOK ALAPTULAJDONSÁGAI, SZIMMETRIACSOPORTOK
(SZEPTEMBER 5.–SZEPTEMBER 19.)

2.1. Feladat. (1 pt. előadta T. Dániel)

Definiáljuk az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon a $*$ műveletet a következőképpen: $x * y = |x|y$. Mutassa meg, hogy az $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; *)$ grupoidra teljesülnek a következők:

- (1) asszociatív,
- (2) van bal oldali egységeleme,
- (3) minden bal oldali e egységelemre és tetszőleges x elemre létezik olyan y elem, hogy $x * y = e$,
- (4) nem csoport.

Miért érdekes ez a példa?

2.2. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Igaz-e, hogy bármely csoport tetszőleges a, b, c, d, x, y elemére

- (1) $(xay)^{-1} = (xby)^{-1} \implies a = b$,
- (2) $(abc)^{-1} = a^{-1}b^{-1}c^{-1}$,
- (3) $axb = cxd \implies ab = cd$,
- (4) $abx = y \implies x = b^{-1}a^{-1}y$?

Állításait bizonyítsa, vagy adjon ellenpéldát.

2.3. Feladat. (1 pt.)

Igaz-e, hogy bármely csoport tetszőleges a, b, x, y elemére

- (1) $xy = yx \implies x^{-1}y = yx^{-1}$,
- (2) $abc = 1 \implies cab = 1$,

- (3) $xab = c \implies c^{-1} = a^{-1}b^{-1}x^{-1}$,
 (4) $xay = a \implies x = y^{-1}$?

Állításait bizonyítsa, vagy adjon ellenpéldát.

2.4. Feladat. (2 pt. előadta Á. Sarolta és M. Miklós)

Bizonyítsa be, hogy bármely G csoportra ekvivalensek a következők:

- (1) G Abel-féle,
 (2) tetszőleges $a, b \in G$ elemekre $(ab)^2 = a^2b^2$,
 (3) tetszőleges $a, b \in G$ elemekre $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$,
 (4) tetszőleges $a, b, c, d, x \in G$ elemekre $axb = cxd \implies ab = cd$.

2.5. Feladat. (3 pt.)

Egészítse ki az alábbi művelettáblázatot úgy, hogy csoport művelettáblázatát kapja:

$\cdot$	e	a	b	x	y	z
e	e					
a		b	e	y		
b						
x			z			
y						
z						

Választásait minden esetben indokolja.

2.6. Feladat. (1 pt. előadta J. Gábor és M. Miklós)

Adjon meg olyan alakzatot a síkban, amelynek

- (1) szimmetriacsoportja 1-elemű,
 (2) szimmetriacsoportja 2-elemű,
 (3) szimmetriacsoportja 3-elemű,
 (4) szimmetria- és mozgáscsoportja is 4-elemű,
 (5) szimmetriacsoportja 4-elemű, mozgáscsoportja pedig 2-elemű.

2.7. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Írja le a kör mozgás- és szimmetriacsoportját.

2.8. Feladat. (2 pt.)

Hány eleme van a szabályos tetraéder mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

2.9. Feladat. (3 pt.)

Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

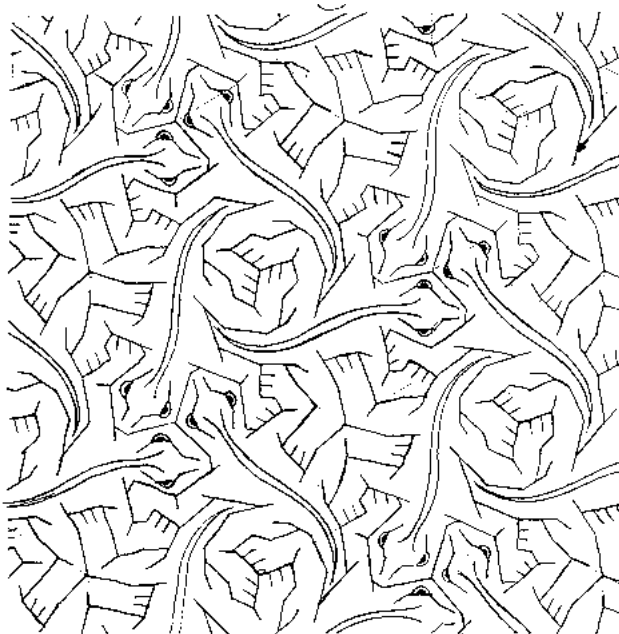
2.10. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

A D_n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) n -edfokú diédercsoportban jelölje a a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatást, t pedig az egyik tengelyes tükrözést.

- (1) Bizonyítsa be, hogy $D_n = \{\text{id}, a, a^2, \dots, a^{n-1}, t, at, a^2t, \dots, a^{n-1}t\}$.
 (2) Határozza meg, hogy a fent felsorolt elemek közül melyikkel egyenlők a következő elemek: $ta, ta^2, \dots, ta^{n-1}, ta^{-1}, ta^{-2}, (ata)^{2006}, (ta^{-1}t)^{n-1}, (ata^3t^{-5}a^{-1})^{10n-50}$.

2.11. Feladat. (3 pt.)

Határozza meg a következő M. C. Escher által rajzolt végtelen alakzatnak a szimmetriacsoportját. Az előző feladathoz hasonlóan írja le a szimmetriákat, és azt, hogy hogyan szorozzuk őket.



M. C. Escher: The study of regular division of the plane with reptiles.

3. PERMUTÁCIÓK (SZEPTEMBER 15.–SZEPTEMBER 26.)

3.1. Feladat. (1 pt. előadta T. Edina)

Tekintsük a következő permutációkat:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Adja meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha^{-1}, \alpha\beta, (\beta\alpha)^{-1}, \beta\alpha^{-1}\beta\gamma\delta^{-1}, \alpha^n (n \in \mathbb{N}), \beta^{11}(\gamma\delta)^{-11}, (\alpha\beta)^{2006}\delta^{2007}$.

3.2. Feladat. (2 pt.)

Legyen σ az A halmaz permutációja. Az $a \in A$ elem σ szerinti *pályáján* az

$$\mathcal{O}_{a,\sigma} = \{a\sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

halmazt értjük. Bizonyítsa be, hogy az A halmaz tetszőleges σ permutációja esetén az $\{\mathcal{O}_{a,\sigma} \mid a \in A\}$ halmaz osztályozás A -n.

3.3. Feladat. (2 pt.)

Adjon meg a természetes számok halmazán olyan σ permutációt, amelyre az $\{\mathcal{O}_{a,\sigma} \mid a \in \mathbb{N}\}$ osztályozásnak egyetlen osztálya van.

3.4. Feladat. (2 pt.)

Hány olyan $\sigma \in S_5$ permutáció van, melyre $|\mathcal{O}_{1,\sigma}| = 3$?

3.5. Feladat. (2 pt. előadta V. Katalin és Á. Sarolta)

Oldja meg S_7 -ben az alábbi egyenleteket:

$$(1) \ (1 \ 2 \ 3 \ 4)\sigma(3 \ 4) = (2 \ 5 \ 3 \ 4),$$

- (2) $(1\ 2\ 3\ 4)\sigma^2(3\ 4) = (2\ 5\ 3\ 4),$
 (3) $(1\ 2\ 3\ 4)\sigma^3(3\ 4) = (2\ 5\ 3\ 4).$

3.6. Feladat. (3 pt.)

Jellemezze azokat a $\sigma \in S_n$ permutációkat a páronként idegen ciklusokra bontott alakjuk alapján, amelyeknek van négyzetgyöke, azaz létezik olyan $\tau \in S_n$, hogy $\tau^2 = \sigma$.

3.7. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy S_n minden permutációja felírható legfeljebb $n - 1$ transzpozíció szorzataként. Minden n természetes számra keressen olyan $\sigma \in S_n$ permutációt, amely $n - 1$ -nél kevesebb transzpozíció szorzataként nem írható fel.

3.8. Feladat. (2 pt. előadta N. Judit)

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Igazolja, hogy minden S_n -beli permutáció előáll

- (1) az $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$ transzpozíciók szorzataként;
 (2) az $(1\ 2)$ és $(1\ 2 \dots n)$ ciklusok szorzataként.

3.9. Feladat. (3 pt.)

Legyen n rögzített, 1-nél nagyobb természetes szám. Bizonyítsa be, hogy ha két S_n -beli ciklus felcserélhető egymással, akkor mozgatót elemeik halmaza vagy diszjunkt, vagy egybeesik.

3.10. Feladat. (1 pt. előadta T. Dániel, Á. Sarolta és M. Miklós)

Bizonyítsa be, hogy bármely $\sigma \in S_n$ permutációra $\sigma^{n!} = \text{id}$.

3.11. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy $n \geq 2$ esetén S_n minden páratlan, illetve páros permutációja felírható pontosan $2n - 3$, illetve $2n + 8$ transzpozíció szorzataként.

4. ELEMREND, RÉSZCSOPORT, GENERÁTORRENDSZER (SZEPTEMBER 22.–OKTÓBER 10.)

4.1. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Határozza meg az alábbi csoportok elemeinek rendjét:

- (1) $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$,
 (2) R_p , p prímszám,
 (3) E_n (a komplex n -edik egységgyökök multiplikatív csoportja), $n \in \mathbb{N}$.

4.2. Feladat. (1 pt. közösen megbeszéltük)

Határozza meg az alábbi csoportok elemeinek rendjét:

- (1) Q ,
 (2) $(\mathcal{P}(A); \Delta)$, A tetszőleges halmaz,
 (3) D_n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

4.3. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Mely elemeknek véges a rendje az alábbi csoportokban:

- (1) $\mathbb{Q}^*$,
 (2) $\mathbb{C}^*$,
 (3) $\mathbb{Q}$,
 (4) a kör szimmetriacsoportja.

4.4. Feladat. (1 pt. közösen megbeszéltük)

Határozza meg S_n elemei rendjének maximumát $n = 6, 7$ és 10 esetén.

4.5. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa be a következő állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát:

- (1) Minden páros rendű permutáció páros.
- (2) Minden páros permutáció rendje páros.
- (3) Minden páratlan rendű permutáció páros.
- (4) Minden páratlan permutáció rendje páros.

4.6. Feladat. (2 pt.)

Részcsoporthoz alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott G csoportokban:

- (1) $G = \mathbb{C}^*$, $H = E_{p^\infty}$, p prímszám, ahol

$$E_{p^\infty} = \{ u \in \mathbb{C} : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0, \text{ amelyre } u^{p^k} = 1 \},$$

- (2) $G = S_{\mathbb{R}}$, $H = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, xf = ax + b : a, b \in \mathbb{R} \text{ és } a \neq 0 \}$,
- (3) $G = S_{\mathbb{Z}_n}$, $H = \{ f \in \mathbb{Z}_n^{\mathbb{Z}_n}, xf = ax + b : a \in \mathbb{Z}_n \text{ és } b \in \mathbb{Z}_n \}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.7. Feladat. (1 pt.)

Bizonyítsa be a következő állításokat, vagy keressen rájuk ellenpéldát:

- (1) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoporthára $H \cup K \leq G$.
- (2) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoporthára $H \cap K \leq G$.
- (3) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoporthára $H \triangle K \leq G$.

4.8. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa be, hogy S_n minden részcsoporthjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

4.9. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy egy Abel-csoport legfeljebb másodrendű elemei részcsoporthoz alkotnak. Adjon meg olyan Abel-csoportot, amelyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoporthot.

4.10. Feladat. (2 pt.)

Adjon meg olyan $(G, *)$ csoportot és olyan $H_1, H_2, H_3 \subseteq G$ halmazokat, melyek azért nem részcsoporthok, mert

- (1) H_1 zárt a $*$ műveletre és az inverzképzésre nézve, de nem tartalmazza G egységelemét,
- (2) H_2 zárt a $*$ műveletre nézve, tartalmazza G egységelemét, de nem zárt az inverzképzésre nézve,
- (3) H_3 zárt az inverzképzésre nézve, tartalmazza G egységelemét, de nem zárt a $*$ műveletre.

4.11. Feladat. (2 pt. az első részt közösen megbeszéltük)

Az alábbi csoportokban keresse meg az összes generátorrendszert, és döntse el, hogy melyek minimálisak (a szokásos tartalmazásra nézve).

- (1) $\mathbb{Z}_6$,
- (2) S_3 ,
- (3) Q .

4.12. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Határozza meg a következő csoportok összes részcsoportját, és rajzolja le annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

- (1) $\mathbb{Z}_{14}$,
- (2) S_3 ,
- (3) D_4 .

4.13. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

4.14. Feladat. (3 pt.)

Mutassa meg, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus.

4.15. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy az E_{p^∞} (p prímszám) csoport minden valódi részcsoportja ciklikus.

5. HOMOMORFIZMUS, IZOMORFIZMUS, CAYLEY-TÉTEL;
LAGRANGE-TÉTEL, NORMÁLOSZTÓ
(OKTÓBER 5.–OKTÓBER 17.)

5.1. Feladat. (1 pt. előadta H. Ádám)

Döntse el, hogy létezik-e olyan φ homomorfizmus, amely teljesíti az alábbi feltételt (az öt eset közül elég hármat megoldania):

- (1) $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{P}(\{0, 1\}); \Delta)$, $3 \mapsto \{0\}$,
- (2) $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{P}(\{0, 1\}); \Delta)$, $4 \mapsto \{0\}$,
- (3) $\varphi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3$, $\bar{1} \mapsto \bar{2}$,
- (4) $\varphi: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $\bar{2} \mapsto \bar{2}$,
- (5) $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow (\mathcal{P}(\{0, 1\}); \Delta)$, $-1 \mapsto \emptyset$.

5.2. Feladat. (2 pt.)

Létezik-e

- (1) $\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$,
- (2) $\mathbb{Z}_4 \rightarrow (\mathcal{P}(\{0, 1\}); \Delta)$,
- (3) $S_4 \rightarrow S_3$,
- (4) $D_\infty \rightarrow D_n$ ($n \geq 3$)

injektív, illetve nemtriviális homomorfizmus. Itt D_∞ az alábbi végtelen alakzat szimmetriacsoportját jelöli:

$$\cdots \text{ T T T T T T T T T T T T T T T T } \cdots$$

5.3. Feladat. (1 pt.)

Döntse el, hogy az alábbi csoportok izomorfak-e egymással:

- (1) R_3 és R_4 ,
- (2) R_{15} és $\mathbb{Z}_8$,
- (3) $(\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}); \Delta)$ és Q ,
- (4) a kör szimmetriacsoportja és $\mathbb{C}^*$.

5.4. Feladat. (2 pt.)

Döntse el, hogy az alábbi csoportok izomorfak-e egymással:

- (1) a kör szimmetriacsoportja és D_∞ ,
- (2) a kör mozgáscsoportja és E ,
- (3) a $\text{GL}(\mathbb{Q}, 2)$ csoport következő két részcsoportja:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{és} \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2n & n \\ -4n & 1+2n \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

- (4) D_∞ és az alábbi részcsoport $\text{GL}(\mathbb{Q}, 2)$ -ben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5.5. Feladat. (3 pt.)

Döntse el, hogy az alábbi csoportok izomorfak-e egymással:

- (1) $(\mathbb{Z}[x]; +)$ és $(\mathbb{Q}^+; \cdot)$,
- (2) $(\mathbb{Q}; +)$ és $(\mathbb{Q}^+; \cdot)$.

5.6. Feladat. (3 pt.)

Adjon meg olyan részcsoportot a $\text{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, amely izomorf az alábbi csoporttal:

- (1) $\mathbb{Z}_4$,
- (2) S_3 ,
- (3) D_4 ,
- (4) $\mathbb{Z}$,
- (5) $\mathbb{C}^*$.

5.7. Feladat. (3 pt.)

Legyen p prímszám. Adjon meg végtelen sok szűrjektív, de nem injektív endomorfizmust az E_{p^∞} csoporton (azaz olyan $E_{p^\infty} \rightarrow E_{p^\infty}$ homomorfizmusokat, melyek szűrjektívek, de nem injektívek).

5.8. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós, T. Edina, H. Attila, V. Péter, K. Tamás, J. Gábor és K. Richárd)

Adja meg az alábbi G csoportok g elemének képét a G csoport Cayley-féle ábrázolásánál:

- (1) $G = \mathbb{Z}_5, g = \bar{2}$,
- (2) $G = \mathbb{Z}_6, g = \bar{2}$,
- (3) $G = D_4, g = a$ ($\pi/2$ szögű forgatás),
- (4) $G = D_4, g = t$ (tengelyes tükrözés),
- (5) $G = S_3, g = (1\ 2)$,
- (6) $G = A_4, g = (1\ 3)(2\ 4)$,
- (7) $G = \mathbb{Z}, g = 1$.

5.9. Feladat. (3 pt.)

Milyen $m, n \geq 3$ természetes számokra tartalmaz S_m az alábbi csoporttal izomorf részcsoportot:

- (1) $\mathbb{Z}_n$,
- (2) D_n .

5.10. Feladat. (1 pt.)

Határozza meg az alábbi G csoportoknak a megadott H részcsoporthja szerinti bal oldali, illetve jobb oldali mellékosztályait. Döntse el, hogy H normálosztó-e G -ben.

- (1) $G = \mathbb{Z}_{18}$, $H = [\bar{6}]$;
- (2) $G = D_5$, $H = \{\text{id}, t\}$, ahol t egy rögzített tengelyre vonatkozó tükrözés;
- (3) $G = D_6$, $H = \{\text{id}, c\}$, ahol c a középpontos tükrözés.

5.11. Feladat. (1 pt.)

Bizonyítsa be, hogy ha H, K olyan véges részcsoporthok valamely csoportban, amelyek rendje relatív prím egymáshoz, akkor $H \cap K = \{1\}$.

5.12. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be a következő állításokat:

- (1) Minden páros rendű csoportban van másodrendű elem.
- (2) Minden $2n$ rendű Abel-csoport, ahol n páratlan szám, pontosan egy másodrendű elemet tartalmaz.

5.13. Feladat. (3 pt.)

Izomorfia erejéig határozza meg az összes legfeljebb hatelemű csoportot.

5.14. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg a következő csoportok összes normálosztóját, és rajzolja le annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a normálosztók halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

- (1) S_3 ,
- (2) Q ,
- (3) D_6 ,
- (4) A_4 .

5.15. Feladat. (2 pt.)

Keresse meg a D_n ($n \geq 3$) csoport összes valódi, nemtriviális normálosztóját.

6. FAKTORCSOPORT, DIREKT SZORZAT, DIREKT FELBONTHATÓSÁG
(OKTÓBER 30.–NOVEMBER 14.)

6.1. Feladat. (1 pt.)

Keresse meg a kvaterniócsoport összes valódi, nemtriviális normálosztóját, és adja meg elemeikkel a hozzájuk tartozó faktorcsoporthokat. Továbbá határozza meg izomorfától eltekintve a kvaterniócsoport összes, páronként különböző homomorf képét. Igyekezzen minél egyszerűbb formában megadni a homomorf képeket.

6.2. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg izomorfától eltekintve a D_n ($n \geq 3$) csoport összes, páronként különböző homomorf képét, továbbá adja meg, hogy milyen ismert csoportokkal izomorfak ezek.

6.3. Feladat. (1 pt. előadta V. Edit)

Határozza meg, hogy a megadott G csoport, H részcsoporthja és N normálosztója esetén mely két csoport izomorfáját állítja az 1. izomorfiatétel. A két csoportot elemeikkel adja meg.

- (1) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = [3]$, $N = [2]$;
- (2) $G = S_4$, $H = \{\pi \in S_4 : 4\pi = 4\}$,
 $N = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$;
- (3) $G = Q$, $H = [i]$, $N = [j]$.

6.4. Feladat. (1 pt. közösen megbeszéltük)

Határozza meg, hogy a megadott G csoport és K, N ($K \geq N$) normálosztója esetén mely két csoport izomorfáját állítja a 2. izomorfia-tétel. A két csoportot elemeikkel adja meg.

- (1) $G = \mathbb{Z}$, $K = [3]$, $N = [6]$;
- (2) $G = S_4$, $K = A_4$, $N = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$;
- (3) $G = \mathbb{Q}^*$, $K = \{p/q : p, q \text{ páratlan egész}\}$, $N = \{1, -1\}$.

6.5. Feladat. (1 pt. előadta G. György)

Igazolja, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\text{SL}(\mathbb{C}, n) \triangleleft \text{GL}(\mathbb{C}, n)$, valamint a $\text{GL}(\mathbb{C}, n)/\text{SL}(\mathbb{C}, n)$ faktorcsoport izomorf a $\mathbb{C}^*$ csoporttal.

6.6. Feladat. (2 pt.)

Legyen p prímszám. Hány p -edrendű részcsoportha van $\mathbb{Z}_p$ n -edik direkt hatványának?

6.7. Feladat. (1 pt. részben megbeszéltük)

Igazolja, hogy ha A n -elemű halmaz, akkor a $(\mathcal{P}(A); \triangle)$ csoport izomorf $\mathbb{Z}_2$ n -edik direkt hatványával.

6.8. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Határozza meg, hogy izomorfától eltekintve hány olyan Abel-csoport van, amelynek rendje

- (1) 30,
- (2) 32,
- (3) 100,
- (4) 1500.

6.9. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Döntse el, hogy igazak-e vagy sem a következő izomorfák:

- (1) $D_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,
- (2) $S_4 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_4$,
- (3) $\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
- (4) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$,
- (5) $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_5$.

6.10. Feladat. (2 pt.)

- (1) Mutassa meg, hogy $D_6 \cong D_3 \times \mathbb{Z}_2$.
- (2) Vizsgálja meg, hogy mely diédercsoportok direkt felbonthatók.

6.11. Feladat. (1 pt. előadta Á. Sarolta)

Döntse el, hogy az alábbi csoportok direkt felbonthatók-e:

- (1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_9$;
- (2) Q ;
- (3) S_n ($n \geq 2$).

6.12. Feladat. (2 pt.)

Döntse el, hogy az alábbi csoportok direkt felbonthatók-e:

- (1) $\mathbb{Q}$,
- (2) $\mathbb{Q}^+$,
- (3) E_{p^∞} (p prímszám).

6.13. Feladat. (3 pt.)

Legyenek G, H és K véges Abel-csoportok. Mutassa meg, hogy ha $G \times K \cong H \times K$, akkor $G \cong H$. Igaz-e az állítás tetszőleges csoportokra? Ha igen, bizonyítsa be, ha nem, adjon ellenpéldát.

6.14. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}$ direkt felbontható. Keresse a felbontást $\mathbb{Q} \times G$ alakban, ahol $G \leq \mathbb{R}$.

7. GYŰRŰK

(NOVEMBER 10.–NOVEMBER 28.)

7.1. Feladat. (1 pt. előadta V. Edit)

Döntse el, hogy az alábbiakban megadott I halmaz ideált alkot-e a jelzett R gyűrűben:

- (1) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \mathbb{Z}$;
- (2) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \{a + bi : a, b \in 2\mathbb{Z}\}$;
- (3) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 : 3 \mid a_0\}$.

Ha igen, akkor adja meg az R/I faktorgyűrű elemeit és művelet táblázatát.

7.2. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Döntse el, hogy a megadott gyűrűk közötti leképezések homomorfizmusok-e:

- (1) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $k \mapsto 4k$;
- (2) $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_3$, $\bar{k} \mapsto \bar{k}$;
- (3) $\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_m$, $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mapsto \overline{a_0 + a_1 + \dots + a_n}$;
- (4) $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto |M|$.

Ha a megadott leképezés homomorfizmus, akkor határozza meg a magját, és alkalmazza a homomorfiatételt.

7.3. Feladat. (2 pt. előadta T. Edina)

Egy $(R; +, \cdot)$ egységelemes gyűrű alaphalmazán definiáljuk a következő műveleteket:

$$a \oplus b = a + b - 1 \quad \text{és} \quad a \circ b = a + b - ab \quad (a, b \in R).$$

Bizonyítsa be, hogy $(R; \oplus, \circ)$ is gyűrű, és izomorf az $(R; +, \cdot)$ gyűrűvel.

7.4. Feladat. (1 pt.)

Mutassa meg, hogy a következő gyűrűk nem izomorfak egymással:

- (1) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ és $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$;
- (2) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$.

7.5. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $(A; +)$ Abel-csoport endomorfizmusainak halmaza a következő összeadásra és a szokásos leképezésszorozásra nézve gyűrűt alkot:

$$\phi + \psi : A \rightarrow A, \quad a(\phi + \psi) = a\phi + a\psi \quad (a \in A).$$

Milyen ‘ismert’ gyűrűvel izomorf a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, illetve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Abel-csoportok endomorfizmusainak gyűrűje?

7.6. Feladat. (2 pt.)

Legyen R olyan végtelen gyűrű, amelynek additív csoportja ciklikus. Igazolja, hogy ha R nem zérógyűrű, akkor R a $d\mathbb{Z}$ ($d \in \mathbb{N}$) gyűrűk közül pontosan eggyel izomorf.

7.7. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Döntse el, hogy direkt felbonthatók-e a következő gyűrűk:

- (1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{15}$;
- (2) $\mathbb{Q}[x]$;
- (3) $\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$.

7.8. Feladat. (3 pt.)

Legyen R egységelemes gyűrű. Mutassa meg, hogy

- (1) ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ olyan elemek R -ben, amelyek felcserélhetők minden R -beli elemmel, amelyekre $\sum_{i=1}^n e_i = 1$, valamint $e_i^2 = e_i$ és $e_i e_j = 0$ tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ esetén, akkor $R = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$;
- (2) R minden felbontása véges sok ideáljának direkt összegére ilyen alakú.

7.9. Feladat. (3 pt.)

- (1) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A halmazra $(\mathcal{P}(A); \Delta, \cap)$ gyűrű. Mely halmazok esetén lesz ez a gyűrű direkt felbonthatatlan?
- (2) Direkt felbontható-e az $\mathbb{R}[x]/\langle (x-2)(x+1) \rangle$ gyűrű?

7.10. Feladat. (1 pt. közösen megbeszéltük)

Adja meg a $\mathbb{Z}_p[x]/\langle f \rangle$ (p prímszám, $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreducibilis) test alábbi elemeit $\bar{u}$ alakban, ahol $u \in \mathbb{Z}_p[x]$ fokszáma kisebb, mint f -é:

- (1) $p = 3$, $f = x^3 - x^2 - x - \bar{1}$; $\overline{x + \bar{1}}^{-1} \cdot \overline{x - \bar{1}}$;
- (2) $p = 5$, $f = x^2 + x + \bar{1}$; $\left(\overline{2x \cdot x - \bar{2}}\right)^{-1}$.

7.11. Feladat. (1 pt. előadta J. Gábor)

Írja fel egy 8-elemű és egy 9-elemű test művelet táblázatát.

7.12. Feladat. (2 pt.)

Adja meg a $\mathbb{Z}_{120}$ gyűrű összes előállítását ideáljainak direkt összegeként.

7.13. Feladat. (2 pt.)

Adjon meg olyan $g \in \mathbb{Z}_2[x]$ nemzérus polinomot, amelynek a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \bar{1} \rangle$ test alábbi eleme gyöke:

- (1) $\overline{x + \bar{1}}$;
- (2) $\overline{x^2 + x + \bar{1}}$;
- (3) $\overline{x^2 + \bar{1}}$.

8. TESTEK

(NOVEMBER 30.–DECEMBER 12.)

8.1. Feladat. (1 pt.)

Állítsa elő a racionális számtest alábbi egyszerű algebrai bővítéseiben megadott

elemek multiplikatív inverzét az adjungált elem ‘kis kitevős’ hatványainak racionális együtthatós lineáris kombinációjaként:

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}); \sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3};$
- (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \sqrt[3]{32}, 3 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4};$
- (3) $\mathbb{Q}(i); i^2, 1 - i.$

8.2. Feladat. (1 pt.)

Legyen u a $p \in K[x]$ n -edfokú irreducibilis polinom gyöke. Adja meg az alábbi $a \in K(u)$ elemeket az $1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ elemek K -beli együtthatókkal képezett lineáris kombinációjaként:

- (1) $K = \mathbb{Z}_2, p = x^2 + x + 1; (1 + u)^{-1}, u^3(1 + u)^{-1};$
- (2) $K = \mathbb{Z}_3, p = x^2 + 1; (1 - u)(1 + u)^{-1}, (1 - u)^{-2};$
- (3) $K = \mathbb{Z}_5, p = x^3 + x + 1; u^{-1}, (u^2 + 1)^{-5}.$

8.3. Feladat. (1 pt.)

Keresse meg az $i\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$ és $i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ számok minimálpolinomját $\mathbb{C}, \mathbb{R}$, valamint $\mathbb{Q}$ fölött.

8.4. Feladat. (3 pt.)

Keresse meg a $\sqrt{2} + \sqrt{3}, i + \sqrt{2}, \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ számok minimálpolinomját $\mathbb{C}, \mathbb{R}$, valamint $\mathbb{Q}$ fölött.

8.5. Feladat. (1 pt.)

Legyen $K = \mathbb{Z}_p(u)$, ahol u az $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreducibilis polinom gyöke. Keresse meg a megadott K -beli elemek $\mathbb{Z}_p$ fölötti minimálpolinomját:

- (1) $p = 2, f = x^4 + x + 1; u^2 + u, u^3 + 1;$
- (2) $p = 3, f = x^4 + x^2 + x + 1; u - 1, u^3 + u^2 + u.$

8.6. Feladat. (1 pt.)

Algebrai-e a megadott a szám a K test fölött (ismert, hogy π transzcendens szám):

- (1) $K = \mathbb{Q}, a = \sqrt{7 - \sqrt[5]{2}} + i\sqrt[4]{7};$
- (2) $K = \mathbb{Q}, a = \pi^2 - \pi;$
- (3) $K = \mathbb{Q}(\pi^2), a = \pi?$

8.7. Feladat. (3 pt.)

Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ olyan, hogy b algebrai $\mathbb{Q}(a)$ fölött, de transzcendens $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsa be, hogy a algebrai $\mathbb{Q}(b)$ fölött.

8.8. Feladat. (1 pt.)

Hány n -edrendű elem van a K test multiplikatív csoportjában:

- (1) $n = 8, K = \text{GF}(9);$
- (2) $n = 15, K = \text{GF}(31);$
- (3) $n = 4, K = \mathbb{C}?$

8.9. Feladat. (2 pt.)

Legyenek α és β rendre az $x^3 + x^2 + \bar{1}$ és $x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomok gyökei. Mutassa meg, hogy $\mathbb{Z}_2(\alpha) \cong \mathbb{Z}_2(\beta)$, és adjon meg egy izomorfizmust.

8.10. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy a $\text{GF}(p^n)$ testnek pontosan egy p^m -elemű részteste van n minden m osztójára.

8.11. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy a valós számok testének csak triviális automorfizmusa van.