Számítógéppel segített felfedeztetés-központú matematikaoktatás

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Máder Attila

Témavezető:
Dr. Kosztolányi József
egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

2012

Bevezetés

A matematikát a formális természete és a deduktív érvelési rendszere választja el a természettudományoktól. A kísérletek eddig látszólag nem játszottak semmilyen szerepet a matematikában. Pedig a formalizmus csak a rendszerezésben, a bizonyosság növelésében, a tudás megszilárdításában segít; az új tudás mindig megfigyelés és kísérletezés útján keletkezik, a matematikában is. A kísérletek mellett a számítógépek is háttérbe szorítottak voltak. A számítógépek fejlődésével és elterjedésével lehetővé vált azonban kísérletek nagy számú, gyors és hatékony elvégzése, azonnali kiértékelése; teret nyitva egy új matematikai szemlélet kialakulásának. Egyáltalán nem számítógéppel *segített* matematikáról van szó, sokkal inkább a számítógéppel *megalkotott* matematikáról. Maga a problémafelvetés, és ezen át a definíciók, tételek, bizonyítások megalkotása mind-mind ezzel történik. A dolgozat célja ezen kísérleti matematika oktatásra történő adaptálási lehetőségeinek, módszereinek bemutatása.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- Eszter K. Horváth, Attila Máder, Andreja Tepavčević. *One-dimensional Czédli-type Islands*, The College Mathematical Journal, **42**(5), 374-378, 2011.
- Attila Máder. *Heads or Tails Gambling - What Can Be Learned about Probability?*, Teaching Mathematics and Computer Science, **6**(1), 15-41, 2008.
- Attila Máder, Róbert Vajda. *Elementary Approaches to the Teaching of the Combinatorial Problem of Rectangular Islands*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **15**(3), 267-281, 2010.
- Attila Máder, Géza Makay. *The maximum number of rectangular islands*, The Teaching of Mathematics, **14**(1), 31-44, 2011.
- Attila Máder. *The Use of Experimental Mathematics in the Classroom*, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life, 2011.
  `www.model.u-szeged.hu`

Érintőlegesen a következő publikációból is merítünk:

- Máder Attila. *A „specmat" 40 éve a Ságváriban I.*, A matematika tanítása, **17**(4), 13-21, 2009.

A tézisfüzetben található jelölések és számozások megegyeznek a disszertációban használtakkal.

1. A magyar matematikaoktatás jelenlegi helyzete

A modern magyar matematikatanítás első nagy korszerűsítési törekvése 1963-ban indult [107]. A Varga Tamás-féle új matematikatanítás lényege éppen az volt, hogy cselekedve, illetve cselekedtetve a gyerekek maguk fedezzék fel azt az ismeretet, amit át akarunk nekik adni. A matematika tanulása a tanuló aktív részvételével az egész gondolkodást formáló folyamattá lett. Elindítója pedig az volt, hogy az akkori matematikaoktatás gyakorlatilag ismeretek formális átadását jelentette. Sajnos a jelenlegi helyzet is efelé tendál; ez szolgált motivációul a technikai fejlődéssel elérhetővé vált új módszerek keresése felé.

Az információrobbanás hatására világunk gyökeresen megváltozott. Az információ birtoklása nem elegendő; a rendszerbe foglalt tudás az érték. Az oktatás új, digitális világunkban ismételt válságba került, nem tudja felvenni a versenyt a gyorsulva változó igényekkel, és nem tudja megtalálni a kulcsot az alapvetően más környezetben felnőtt, s ezáltal fiziológiailag is különböző digitális bennszülöttekhez. Az ismeretelsajátítás szükségességét bizonyos kompetenciák megszerzésének fontossága váltotta fel.

A kompetencia fogalma (Coolahan)

A kompetenciát úgy kell tekinteni, mint olyan általános képességet, amely a tudáson, a tapasztalaton, az értékeken és a diszpozíciókon alapszik, és amelyet egy adott személy tanulás során fejleszt ki magában.

A nevelési-oktatási rendszer újjáépítéséhez szükséges pedagógiai megújulás lényeges elemei a következőkben foglalhatók össze [38]:

(1) az erkölcsi és esztétikai, az olvasási-szövegértési készségek, a beszédkészség, az írás és az infokommunikációs készségek fejlesztése - össztantárgyi feladat;
(2) a kísérletezés - kulcspont a természettudományos oktatás megújulásában;
(3) az infokommunikációs módszertár - a pedagógia új eszköze.

Az információrobbanásnak igen jelentős hatása volt az oktatásra is. Ez határozta meg az oktatási-nevelési célok változását, az oktatás tartalmának jelentős módosulását, eszközállományának teljes modernizálódását, a tanításban alkalmazott módszerek megváltoztatására való törekvéseket [38]. A globalizáció által motivált legfőbb elvárás az oktatás felé az volt, hogy gyorsan mobilizálható ismeretet nyújtson alacsony ráfordítással. Az információrobbanás hatására tehát a tudás, s azon belül a matematikai tudás (műveltség) fogalma átértékelődött. Az újraértelmezett matematikatudásban fontos szerepet játszik az, hogy a matematikát különböző helyzetekben *alkalmazzuk*. Többé már nem a tanár a tanuló elsődleges információforrása. A tanárnak nem az információ átadása, hanem az információtengerben való eligazodás segítése, a megszerzett tudás alkalmazásának bemutatása a fő feladata. A tanár az információ (frontális) forrásából a felfedezéseket segítő társsá lép elő. Szempont lett, hogy olyan problémákat adjunk a gyerekeknek, amelyekből megértik, hogy a mai világ nem létezik matematika nélkül. Gyakorlatiasabb matematikára van hát napjainkban szükség. A változás – különösen a magyar matematikaoktatás tekintetében – nagyobb mértékű és mélyebb, mint azt előzetesen gondolnánk. A magyar matematikaoktatás ugyanis inkább elméleti és problémamegoldó, és nem gyakorlati problémák formális megoldását célozta.

2. Felfedezések a matematikában

A számítógépes kísérleti matematika módszertana a következőkben foglalható össze [17]:

(a) a rálátás és az intuíció segítése;
(b) kapcsolatok és minták felismerése;
(c) a matematikai tartalom kézzelfoghatóvá tétele a grafikus megjelenítés lehetőségeinek kihasználásával;
(d) sejtések megerősítése és cáfolása;
(e) a bizonyításra érdemes gondolatok kiválogatása;
(f) segítség az alkalmas bizonyítási módszerek megtalálásában;
(g) számítások elvégzése;
(h) analitikusan származtatott eredmények megerősítése.

A fentiekben tulajdonképpen a matematikai alkotás folyamatát láthatjuk, lépésekre bontva oly módon, hogy azok a számítógépes kísérletekkel elérhetők legyenek. Az első három pont ((a)-(c)) az intuíció, a következő kettő ((d)-(e)) a sejtés, az utolsó három ((f)-(h)) pedig a bizonyítás segítése.

A tapasztalati tudást szolgáló, és azt felépítő kísérletekből megfigyelések származnak, melyekből újabb kísérletek hatására intuitív feltevések lesznek. Ezekből a további, folyamatos kísérletezés hatására, az igazság monoton növelésével sejtések alakulnak ki. Ezen sejtések további vizsgálata során, eljuthatunk a *majdnembiztos* megerősítésig, illetve a sejtés bizonyításáig, esetleg cáfolásáig.

Azt pedig, hogy a kísérleteknek megkerülhetetlen szerepük van a heurisztika segítésében, Pólya és Lakatos óta tudjuk. Pólya szerint is a kísérletek jelentik a matematikai tudás legfőbb forrását, a kísérletek azok, melyek a megfelelő irányba terelik az intuíciót. Mindezen ismereteknek a kísérleti matematikával való összekapcsolása azonban eddig váratott magára. Éppen ezen kapcsolat feltárása, bemutatása ennek a dolgozatnak a célja. A számítógépek fejlődésével és elterjedésével lehetővé vált kísérletek nagy számú elvégzése, nagy mennyiségű adat feldolgozása, adathalmazok manipulálása, valós idejű számítások elvégzése, animációk vizsgálata, melyek egyébként is elidegeníthetetlen részét képezik a tanulási folyamatnak. Most mindezek a XXI. század társadalmi elvárásainak megfelelő környezetben jelenhetnek meg. Valljuk, hogy kísérleteink segítségével integrálható egymásba a tradicionálisan külön kezelt felfedezés és igazolás.

A számítógépek ezen, innovatív módon történő, alkotó jellegű felhasználásával, a Borwein által elindított kutatási módszer oktatásra való adaptálásával a Pólya György által szorgalmazott heurisztika és kísérletezés végre a megérdemelt mértékű szerepéhez juthat a tanításban. A (közép)iskolások számára kitűzött, természetesen felmerülő, de ugyanakkor kutató jellegű problémák vizsgálata során a számítógép nem csak a szemléltetésben, de a problémafelvetésben, a fogalmak kialakításában, a sejtések megfogalmazásán és tesztelésén keresztül pedig a matematikai alkotás teljes folyamatában is segítségünkre lehet. A kísérlet és az elmélet elválaszthatatlanok. A tanulók maguk is felfedezővé válhatnak és ez az egyik legfontosabb központi gondolat.

A tanár a tanulásszervezés operatív szempontjai tekintetében például a következőképpen, és a következő formákban használhatja ki a kísérleti matematika által nyújtott lehetőségeket. Lehetővé, illetve könnyebben kivitelezhetővé válik a

(a) csoportmunka;
(b) projektmunka;
(c) differenciálás;
(d) aktív tanulói részvétel;
(e) játékalapú tanulás;
(f) kutatás alapú tanulás.

Módszertani hasznok:

(1) feladatok dinamikus létrehozása;
(2) ellenőrzés;
(3) alkalmazási lehetőségek bemutatása;
(4) kollektív tapasztalatszerzés;
(5) dinamizálás;
(6) problémaérzékenység növelése;
(7) bizonyítási igény kialakítása;
(8) eszközigény csökkentése;
(9) a matematika szórakoztatóvá tétele;
(10) folyamatos kérdésfelvetés segítése;
(11) társadalmi elvárás kielégítése;
(12) induktív, deduktív, kritikai és problémamegoldó gondolkodás segítése;
(13) a problémamegoldási ciklus segítése;
(14) megoldás folyamatos próbálgatással;
(15) gyengébb képességűek felzárkóztatása, bevonása.

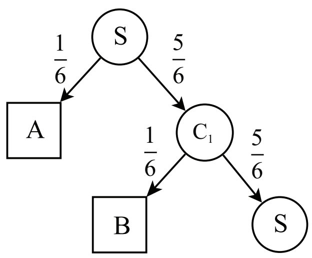
A problémamegoldás, az órai matematikai felfedezés következő elemeinél nyújt segítséget módszerünk:

(i) fogalmak megalkotása;
(ii) fogalmaink megszilárdítása;
(iii) fogalmaink absztrahálása;
(iv) modellalkotás;
(v) megfigyelés;
(vi) analógia;
(vii) mintafelismerés: proof without words;
(viii) mintafelismerés: teljes indukció;
(ix) stratégiák kialakítása;
(x) az igazság monoton növelése;
(xi) indoklás megfogalmazása;
(xii) hibás bizonyítások kreálása;
(xiii) példák és ellenpéldák együttes hatása;
(xiv) bizonyítási módszer megtalálása;
(xv) bizonyítás lépéseinek megalkotása;
(xvi) ellenőrzés.

3. Felfedezések a matematikaórán

A fejezetben a tanulók aktív, alkotó részvételével kivitelezhető matematikai felfedezések módszertanát tárjuk föl. A számítógép felhasználása nélküli tanulói felfedezésektől, a számítógép eszközszintű felhasználásán keresztül eljutunk a számítógép alkotó jellegű felhasználásával történő ismeretszerzésig. A tömeges tanulói kísérletek, akár a számítógép nélküliek is, kiválóan álcázhatók játéknak is.

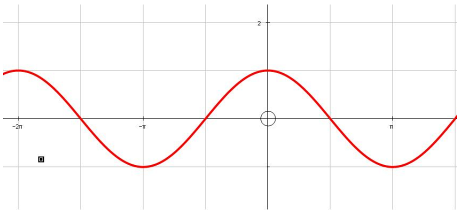
3.9. Feladat. Két játékos, Anna és Balázs, a továbbiakban A és B egy szabályos dobókockával játszik. A játékot A kezdi és a kockát felváltva egyszer-egyszer feldobva az nyer, aki először dob hatost. Mi a valószínűsége annak, hogy A nyer [104]?



3.10. ábra. Dobás az első hatosig

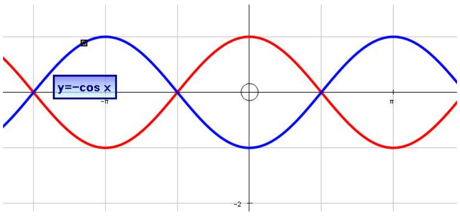
A valószínűségi probléma lényegét ragadja meg az ábra, a játékot ténylegesen követhetővé, játszhatóvá teszi. A játék során a gyerekek maguk találhatják meg az egyes átmeneti valószínűségeket, elsősorban tapasztalati úton. Maguk jöhetnek rá az egyes állapotok egymáshoz, s a kérdéses valószínűséghez való viszonyára, sőt tulajdonképpen számos játékon keresztül szerzett tapasztalataik után ők maguk rajzolhatják fel a fenti folyamatábrát. Akár ezzel az egyszerű példával is jól szemléltethető, hogy a matematikai alkotás egyik leghatékonyabb módja az aktív cselekvésen alapuló tapasztalatszerzés.

A felfedezésekben a tanár szerepe nem klasszikus. Feladata többek között a kísérletek előkészítése és katalizálása. Erre mutatunk példát a következőkben. Az ábrán a $\cos x$ függvény grafikonja látható, és egy pont, amelyet animálunk egy függvény grafikonja mentén. A pont *láthatóan* az $\cos x$ függvény x tengelyre vett tükörképe mentén halad, tehát a rejtett görbe meggyőzően sok helyen vett értéke alapján *tapasztaltak* szerint az $y = -\cos x$ függvény grafikonja.



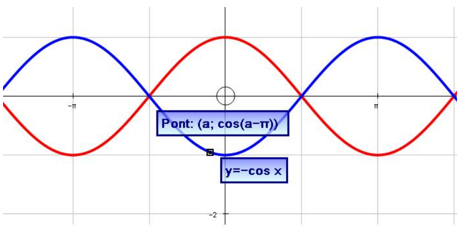
3.22. ábra. Hol halad a pont...?

Az $y = -\cos x$ függvény grafikonját kirajzolva, a pontot tovább animálva, empirikus úton szerzett meggyőződésünk megdönthetetlenné válik.



3.23. ábra. .... az $y = -\cos x$ görbe mentén

Ekkor, a mozgó pont valódi koordinátáit megjelenítve láthatóvá válik, hogy a pont által leírt görbe az $y = \cos(x - \pi)$ [112].



3.24. ábra. A felfedezés: $-\cos x = \cos(x - \pi)$

A számítógépek ily, alkotó jellegű felhasználásával ötvözhető az aktív tanulói tapasztalatszerzés a felfedeztetéssel, miközben a tanár a társadalmi elvárásoknak is megfelel az infokommunikációs technológiák használata terén.

4. Szigetek

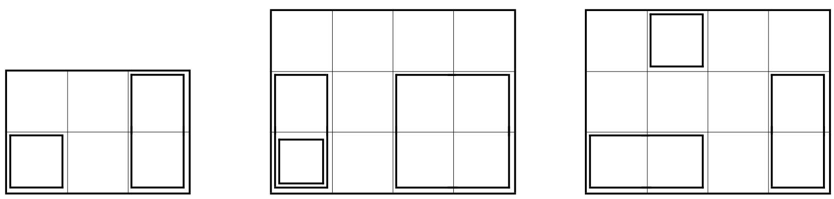
Ebben a részben önálló felfedezést segítő, tudatos tanári munkával irányított, egymásra épülő feladatokon keresztül teszünk kísérletet a szigetek néven ismertté vált terület bemutatására. A történeti gyökerek 2007-be nyúlnak vissza. A Földes által bevezetett fogalmat Czédli Gábor általánosította [34]. Az itt megadott definíció azonban túlságosan formális. Mi az intuitív, kizárólag csak a szemléletre épülő fogalomból kiindulva, felfedezéseken keresztül számos további, tetszőleges mélységű matematikai vizsgálat elvégzésére alkalmas, különböző absztrakciós szintű definíciót alakítottunk ki, igazolván, hogy felfedezésekkel nem csak a sejtések, de a fogalmak kialakításának szintjén is eredményes munka végezhető [110].

4.3. Definíció. Egy sziget kiemelkedik a tengerből; *minden* pontja magasabb, mint közvetlen környezete *bármely* pontja.

4.12. Definíció. Legyen adott egy $m \times n$-es (négyzet)rács, melynek minden mezőjéhez hozzárendelünk egy pozitív egész számot, a mező magasságát. Rácsunk egy téglalap alakú tartományát szigetnek nevezzük, ha minden cellájának magassága nagyobb, mint a téglalapot határoló mezők bármelyikének magassága.

A tanár szerepe itt annyi, hogy a diákokat egy konkrétabb, megfogható fogalmakat és tulajdonságokat használó definíció megalkotására ösztönözze. A cél ezzel persze egy matematikai modell megalkotása. A fentiekből láthatóvá vált, hogy hogyan lehetséges a felfedezések középpontba állításával, irányított kísérleteken keresztül eljutni az önálló fogalomalkotás folyamatához. A következőkben a megalkotott definíciónk alkalmazási lehetőségeit mutattuk be; cél a fogalom elmélyítése. A sziget fogalmának elmélyítése kapcsán fontos a szigetkeresés inverzproblémáinak vizsgálta. Különösen fontos, hogy különböző okokból nem működő példákat, ellenpéldákat mutassunk a fontos tulajdonságok lehető legtöbb oldalról való kiemelése céljából.

4.35. Feladat. Adjuk meg a mezők magasságértékeit úgy, hogy pontosan a jelölt téglalapok legyenek szigetek, ha a felhasználható maximális magasság $h = 2$!



(a) (b) (c)

4.25. ábra. Adjuk meg a magasságokat!

Fontos módszertani eszköz az ellenpéldák mellett, a hibás bizonyítások, rossz megoldások bemutatása. Serkentik ugyanis a kételkedés igényét, valamint a kritikus gondolkodás motorjaivá is válhatnak. A kitűzött feladatok a következőképp csoportosíthatók:

(a) a sziget fogalmának intuitív megközelítése;
(b) a sziget matematikai fogalmának kialakítása, absztrahálása;
(c) szigetek keresése adott magasságfüggvény mellett;
(d) inverzproblémák a fogalom elmélyítésére, ezek a következőképp kategorizálhatók:
   - magasságfüggvény keresése adott szigetrendszerhez;
   - magasságfüggvény keresése adott szigetszámhoz;
   - korlátos magasságfüggvény keresése adott szigetrendszerhez;
   - korlátos magasságfüggvény keresése adott szigetszámhoz;

(e) szigetrendszerek megadása, kanonikus reprezentáció;
(f) újabb definíciók, példák, ellenpéldák kreálása, bizonyítások relevanciájának ellenőrzése.

A fejezetben bemutatott, Vajda Róberttel közösen fejlesztett ([110]) Mathematica alkalmazás segítségével a fentiek játékos formában, aktív tanulói tapasztalatszerzéssel kísérve hajthatók végre.

A szigetek megismerése után feltérképeztük a szigetrendszerek szerkezetét. Korábbi vizsgálatainkkal megalapozott sejtésünket be is bizonyítottuk.

4.52. Sejtés. Két különböző szigetnek csak akkor lehet közös mezője, illetve határa, ha egyik tartalmazza a másikat. Azaz két különböző sziget közül az egyik tartalmazza a másikat, vagy a szigetek „messze" vannak egymástól, azaz el tudunk sétálni (úszni) közöttük.

Bebizonyítottuk, hogy ez a tulajdonság jellemzi is a szigetrendszereket. Megalkottuk a maximális és minimális sziget fogalmát, bevezettük a szigetrendszer gráfját, valamint feladatokon keresztül részletesen megvizsgáltuk a szigetrendszerek és a gráfok kapcsolatát. Egyik fő eredmény a továbbiak szempontjából a következő tétel.

4.64. Tétel. Tetszőleges rács szigetei a tartalmazásra nézve részbenrendezett halmazt alkotnak.

A szigetrendszerek szerkezetének felfedeztetésére kitűzött feladatok a következőképp csoportosíthatók:

(a) szigetek kölcsönös helyzete;
(b) speciális szigetek vizsgálata;

(c) a matematikai modell felállítása;
(d) ismerkedés a modellünkkel;
(e) speciális szigeteink és a modellünk kapcsolatának vizsgálata;
(f) szigetrendszerek vizsgálata a gráfjaikon keresztül.

Ismét bemutattunk egy Mathematica alkalmazást ([110]), melynek segítségével a diákok maguk fedezhetik fel a szigetrendszerek egy már magasabb absztrakciós szinten lévő modelljét. Így láthatjuk, hogy a számítógépes kísérletek az absztrahálásban is segítségünkre lehetnek. A Mathematica demonstráció felhasználásával lehetőségünk van a feladatok számának gyors többszörözésére, illetve a digitális bennszülöttek hatékony motiválására. Láthattuk, hogy a számítógéppel végzett nagyszámú kísérleteknek a bizonyítások előkészítésében, azok megalapozásában is fontos szerepe van.

Az $m \times n$-es rácson elhelyezhető szigetek maximális számának meghatározásához speciális eseteket vizsgálva álltunk hozzá. Az $1 \times n$-es rács sejtésének bizonyítása után vizsgálatainkat nagyobb rácsokon folytattuk.

4.77. Sejtés. A szigetek maximális száma az $1 \times n$-es téglalap esetében n.

A $2 \times n$-es rácson elhelyezhető szigetek maximális számának meghatározásához a kétoldali közelítés módszerét használtuk. Először egy felső, majd egy alsó korlát meghatározására vezető számítógéppel támogatott felfedeztetési lehetőséget mutattunk be. Az alsó korlát kapcsán bevezettük a vágásos technikát ([110]), amely lehetőséget biztosított rekurzió felírására. A $3 \times n$-es rácsok vizsgálata után áttértünk az $m \times n$-es rács alsó korlátjának vizsgálatára. Itt már egy paraméteres másodrendű lineáris rekurzió megoldása volt a feladatunk, melyet a korábbiakban többször használt Mathematica parancs újabb módosításával egyszerűen megtehettünk. Ha b_n jelöli a vágásos technika segítségével az $m \times n$-es rácson előállítható szigetek maximális számát, akkor $b_n = \left\lfloor \frac{mn+m+n-1}{2} \right\rfloor$ [110]. A felső korlát megtalálásához bevezettük a félsziget ([11, 110]), valamint a szigetrendszer kiegészített gráfjának fogalmát. A szigetek, gráfok és rácspontok számának vizsgálatával meglepő felső korlátot kaptunk: $\left\lfloor \frac{mn+m+n-1}{2} \right\rfloor$. Ezzel megkaptuk az $m \times n$-es rácson elhelyezhető szigetek maximális számát. A számítógéppel végzett kísérleteink ezúttal segítségünkre voltak a sejtések kialakításában és megszilárdításában. Arra is láthattunk példát, hogy a tömeges kísérletek tapasztalatai alapozzák meg a bizonyítást, annak lényegi lépésének előrevetítésével. Láthattuk, hogyan használhatjuk a számítógépet alkotó jelleggel, egy-egy egyszerű, s hatékonyan módosítható kód segítségével számítások elvégzésére.

A korábbiakban a felhasználható magasság nem volt korlátozva. A korlátos magasságfüggvénnyel rendelkező szigetrendszerek vizsgálatát a szerző kezdeményezte [72, 111]. A vizsgálatok itt is speciális rácsokon indultak. A fő eredmények a következők [111].

4.125. Sejtés. Az $1, 2, ..., h$ magasságok segítségével az $1 \times n$-es rácson létrehozható szigetek maximális száma:

$$I_h(n) = n + 1 - \left[\frac{n}{2^{h-1}}\right]^+,$$

ahol $[\cdot]^+ = \max\{1, [\cdot]\}$.

4.133. Tétel Az $1, 2, ..., h$ $(h \geq 3)$, magasságok segítségével a $2 \times n$-es rácson létrehozható szigetek maximális száma:

$$I_h(n) = \left[\frac{3n + 1}{2}\right] + 1 - \left[\frac{n}{2^{h-2}}\right]^+.$$

4.138. Tétel Az $1, 2, ..., h$ $(h \geq 3)$, magasságok segítségével a $3 \times n$-es rácson létrehozható szigetek maximális száma:

$$I_h(n) = 2n + 2 - \left[\frac{n}{2^{h-2}}\right]^+.$$

Az első esetben a sejtés megtalálásához saját fejlesztésű programot használtunk [111]. Ennek megírása nem lett volna lehetséges korábbi felfedezéseink nélkül, amelyek tehát nem csak arra jók, hogy segítségükkel egy kész eljárást használni tudjunk, hanem arra is, hogy egyáltalán lehetővé tegyük egy probléma számítógéppel történő megközelítését. Ezzel a felfedezések újabb szintjét mutattuk meg.

A sejtés bizonyítása kettős, n, illetve h szerinti indukcióval történik [72, 111].

Válogatott hivatkozások

[11] János Barát, Péter Hajnal, Eszter K. Horváth. *Elementary proof techniques for the maximum number of islands*, European Journal of Combinatorics, **32**(2), 276-281, 2011.

[17] Jonathan Borwein, David Bailey. *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, A K Peters, 2004.

[34] Gábor Czédli. *The number of rectangular islands by means of distributive lattices*, European Journal of Combinatorics **30**, 208-215, 2009.

[38] Csermely Péter, Fodor István, Eva Joly, Lámfalussy Sándor (szerk.) *Szárny és Teher - Ajánlás a nevelés-oktatás rendszerének újjáépítésére és a korrupció megfékezésére*, Bölcsek Tanácsa Alapítvány, Budapest, 2009.

[72] Eszter K. Horváth, Attila Máder, Andreja Tepavčević. *One-dimensional Czédli-type Islands*, The College Mathematical Journal, **42**(5), 374-378, 2011.

[88] Steven G. Krantz. *The Proof Is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof*, Springer, 2010.

[104] Attila Máder. *Heads or Tails Gambling - What Can Be Learned about Probability?*, Teaching Mathematics and Computer Science, **6**(1), 15-41, 2008.

[107] Máder Attila. *A „specmat" 40 éve a Ságváriban I.*, A matematika tanítása, **17**(4), 13-21, 2009.

[110] Attila Máder, Róbert Vajda. *Elementary Approaches to the Teaching of the Combinatorial Problem of Rectangular Islands*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **15**(3), 267-281, 2010.

[111] Attila Máder, Géza Makay. *The maximum number of rectangular islands*, The Teaching of Mathematics, **14**(1), 31-44, 2011.

[112] Attila Máder. *The Use of Experimental Mathematics in the Classroom*, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life, 2011.
`www.model.u-szeged.hu`

[124] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences `http://oeis.org/`

[136] Pólya György. *A problémamegoldás iskolája I.-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 1968.

[169] `www.demonstrations.wolfram.com`