R o m b e r g . m u

```
>> /*
&>  * Ez a program szimbolikusan kiszámolja a Romberg-féle integrálásnál
&>  * fellépõ T(k,m) kifejezéseket. Az eljárást részletesen ld.
&>  * Móricz Ferenc: Numerikus módszerek az algebrában és az analízisben c.
&>  * könyvében, 136. o.; az ott leírt eljárásnál olvasható jelölés helyett
&>  * itt T(k,m) az ottani T(2^m*k,m)-et jelöli.
&>  * Copyright (C) Kovács Zoltán, 2002/03/16
&>  */
>>
>> T := proc (k,m)
&> begin
&>   if m=Nil or m=0 then
&>     return(procname(k));
&>     end_if;
&>   return((4^m*T(2*k,m-1)-T(k,m-1))/(4^m-1));
&> end_proc:
>>
>> T(k,0);

                                    T(k)
>> factor(T(k,1));

                          1/3 (- T(k) + 4 T(2 k))
>> factor(T(k,2));

                    1/45 (T(k) - 20 T(2 k) + 64 T(4 k))
>> factor(T(k,3));

          1/2835 (- T(k) + 84 T(2 k) - 1344 T(4 k) + 4096 T(8 k))
>> factor(T(k,7));

1/49615367752825875 (- T(k) + 21844 T(2 k) - 95414592 T(4 k) +

   99158478848 T(8 k) - 25384570585088 T(16 k) +

   1600791219535872 T(32 k) - 24017731997138944 T(64 k) +

   72057594037927936 T(128 k))
```

---

n u m i n t . m u

```
>> /*
&>  * Trapézformula, ld. Móricz Ferenc: Numerikus módszerek az algebrában
&>  * és az analízisben, 130. o. illetve Leindler László: Analízis, Nemzeti
&>  * könyvkiadó, 1993, 195. o.
&>  * A sum eljárás beépített függvény.
&>  */
>>
>> Trapez := proc (N)
&> begin
&>     return((b-a)/N*(f(a)/2+f(b)/2+sum(f(a+k*(b-a)/N),k=1..N-1)));
&> end_proc:
>>
>> factor(Trapez(6));

     /                  / a   b \      / a   2 b \      / 2 a   b \
1/12 | f(a) + f(b) + 2 f| - + - | + 2 f| - + --- | + 2 f| --- + - | +
     \                  \ 2   2 /      \ 3    3  /      \  3    3 /

      / a   5 b \      / 5 a   b \ \
   2 f| - + --- | + 2 f| --- + - | | (- a + b)
      \ 6    6  /      \  6    6 / /
>>
>> Simpson := proc (N)
&> begin
&>   return((b-a)/(6*N)*(f(a)+f(b)+
&>    4*sum(f(a+(2*k+1)*(b-a)/(2*N)),k=0..N-1)+
&>    2*sum(f(a+(2*k)*(b-a)/(2*N)),k=1..N-1)));
&> end_proc:
```

```
>>
>> factor(Simpson(3));

     /                  / a   b \      / a   2 b \       / 2 a   b \
1/18 | f(a) + f(b) + 4 f| - + - | + 2 f| - + --- | + 2 f| --- + - | +
     \                  \ 2   2 /      \ 3    3  /       \  3    3 /

      / a   5 b \      / 5 a   b \ \
   4 f| - + --- | + 4 f| --- + - | | (- a + b)
      \ 6    6  /      \  6    6 / /
>>
>> /*
&>  * Romberg-rekurzió
&>  */
>>
>> T := proc (k,m)
&> begin
&>   if m=Nil or m=0 then
&>     return(Trapez(k));
&>     end_if;
&>   return((4^m*T(2*k,m-1)-T(k,m-1))/(4^m-1));
&> end_proc:
>>
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
>>
>> f:=sin:
>> a:=0:
>> b:=PI:
>>
>> DIGITS:=20:
>>
>>
>> /*
&>  * Határozott integrál számítása (beépített függvény)
&>  */
>>
>> int(f(x),x=a..b);

                                             2
>>
>> /*
&>  * Illusztráljuk, hogy a trapézformula mennyire lassú konvergenciát ad
&>  * (a számolásigény is nagy): 1000-es egyenlõ beosztásnál csak 5 tizedesjegy
&>  * pontosságot kapunk.
&>  */
>>
>> for i from 1 to 3 do
&>     print(float(Trapez(10^i)));
&>     end_for;

                           1.9835235375094545035

                           1.9998355038874435076

                           1.9999983550656625709

>>
>> /*
&>  * A Simpson-formula lényegesen gyorsabban közelít.
&>  */
>>
>> for i from 1 to 3 do
&>     print(float(Simpson(10^i)));
&>     end_for;

                           2.0000067844418011042

                           2.0000000006764718916

                           2.0000000000000676452
```

```
>>
>> /*
&>  * A Romberg−iteráció k=1 esetén már az m=4 esetben 8 jegy pontosságot ad.
&>  */
>>
>> for i from 1 to 4 do
&>     print(T(1,i));
&>     print(float(T(1,i)));
&>     end_for;

                                            2 PI
                                            ---- =
                                             3

                                  = 2.094395102393195492

                                         1/2
                                   16 PI (2    + 1)   2 PI
                                   ---------------- - ---- =
                                          45            9

                                  = 1.998570731823835986

                     1/2                   1/2     1/2     1/2          1/2 1/2
2 PI   16 PI (2    + 1)   512 PI (2    + (2    + 2)    + (2 - 2   )    + 1)
---- - ---------------- + -------------------------------------------------- =
135          135                                  2835

                                  = 2.000005549979670513

       1/2                         1/2     1/2     1/2          1/2 1/2
16 PI (2    + 1)   2 PI   512 PI (2    + (2    + 2)    + (2 - 2   )    + 1)
---------------- - ---- - --------------------------------------------------
      2025         8505                           8505

      /           /      / PI \        / 3 PI \        / 5 PI \
    + | 65536 PI | 2 sin| -- | + 2 sin| ---- | + 2 sin| ---- | +
      \           \      \ 16 /        \  16  /        \  16  /

        / 7 PI \    1/2     1/2     1/2          1/2 1/2     \ \
   2 sin| ---- | + 2    + (2    + 2)    + (2 - 2   )    + 1 | | / 722925 =
        \  16  /                                             / /

                                  = 1.999999994587290171

>>
>> /*
&>  * Példa, hogy k növelése tovább javítja a konvergencia sebességét.
&>  */
>>
>> for i from 1 to 4 do
&>     print(T(2,i));
&>     print(float(T(2,i)));
&>     end_for;

                                        1/2
                                     PI (2    + 1)   PI
                                     ------------- - -- =
                                           3          6

                                  = 2.004559754984420955

                  1/2                  1/2     1/2     1/2          1/2 1/2
   PI   PI (2    + 1)   8 PI (2    + (2    + 2)    + (2 - 2   )    + 1)
   -- - ------------- + ---------------------------------------------- =
   90         9                              45

                                  = 1.998570731823835986
```

```
     1/2                        1/2     1/2     1/2          1/2 1/2
PI (2    + 1)    PI    8 PI (2    + (2    + 2)    + (2 - 2    )    + 1)
------------ - ---- - ----------------------------------------------- +
     135       5670                           135

   /        /      / PI \        / 3 PI \        / 5 PI \
   | 256 PI | 2 sin| -- | + 2 sin| ---- | + 2 sin| ---- | +
   \        \      \ 16 /        \  16  /        \  16  /

        / 7 PI \    1/2     1/2     1/2          1/2 1/2     \ \
   2 sin| ---- | + 2    + (2    + 2)    + (2 - 2    )    + 1 | | / 2835 =
        \  16  /                                             / /

                         = 2.0000000162880416574

          1/2                  1/2     1/2     1/2          1/2 1/2
  PI      PI (2    + 1)   8 PI (2    + (2    + 2)    + (2 - 2    )    + 1)
------- - ------------- + ----------------------------------------------
1445850       8505                              2025

      /        /      / PI \        / 3 PI \        / 5 PI \
    - | 256 PI | 2 sin| -- | + 2 sin| ---- | + 2 sin| ---- | +
      \        \      \ 16 /        \  16  /        \  16  /

        / 7 PI \    1/2     1/2     1/2          1/2 1/2     \ \
   2 sin| ---- | + 2    + (2    + 2)    + (2 - 2    )    + 1 | | / 8505 +
        \  16  /                                             / /

   /          /      / PI \        / 3 PI \        / 5 PI \
   | 32768 PI | 2 sin| -- | + 2 sin| ---- | + 2 sin| ---- | +
   \          \      \ 16 /        \  16  /        \  16  /

        / 7 PI \        / PI \        / 3 PI \        / 5 PI \
   2 sin| ---- | + 2 sin| -- | + 2 sin| ---- | + 2 sin| ---- | +
        \  16  /        \ 32 /        \  32  /        \  32  /

        / 7 PI \        / 9 PI \        / 11 PI \        / 13 PI \
   2 sin| ---- | + 2 sin| ---- | + 2 sin| ----- | + 2 sin| ----- | +
        \  32  /        \  32  /        \  32   /        \  32   /

        / 15 PI \    1/2     1/2     1/2          1/2 1/2     \ \
   2 sin| ----- | + 2    + (2    + 2)    + (2 - 2    )    + 1 | | / 722925 =
        \  32   /                                             / /

                         = 1.9999999999960339046
```

```
>>
>> /*
&>  * A Romberg-iteráció "elég gyors".
&>  */
>>
>> DIGITS:=50:
>> for i from 1 to 10 do
&>     elteres:=float(2-T(1,i));
&>     tizedesjegy_pontossag:=trunc(abs(trunc(log(10,elteres))));
&>     print(Unquoted, "Pontosság: ".
&>      expr2text(tizedesjegy_pontossag).
&>      " tizedesjegy.");
&>     end_for;
```

```
                          Pontosság: 1 tizedesjegy.
                          Pontosság: 2 tizedesjegy.
                          Pontosság: 5 tizedesjegy.
                          Pontosság: 8 tizedesjegy.
                         Pontosság: 11 tizedesjegy.
                         Pontosság: 16 tizedesjegy.
                         Pontosság: 20 tizedesjegy.
                         Pontosság: 26 tizedesjegy.
                         Pontosság: 32 tizedesjegy.
                         Pontosság: 38 tizedesjegy.
```