Elemi függvények közelítései

2003. március 30.

1. Előkészítés

Numerikus közelítéseket összeadással-kivonással és szorzással érdemes végezni, ezek viszonylag gyorsan számolhatók; az osztás műveletigényesebb.

Taylor-formula, Taylor-sor. Legyen az f valós függvény az a szám környezetében akárhányszor differenciálható. Ebben a környezetben $f(x)$ előállítható a következő módon:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\vartheta(x-a))}{n!}(x-a)^n,$$

ahol $f^{(k)}(x)$ az f függvény k. deriváltja és $0 < \vartheta < 1$. Az első két tag összegét $T_n(x)$-szel, a harmadikat $R_n(x)$-szel jelöljük. Amennyiben $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, úgy $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, és $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$-et $f(x)$ Taylor-sorának nevezzük.

Észrevétel. Amennyiben $R_n(x)$ „gyorsan" tart a 0-hoz, a gyakorlatban is érdemes $f(x)$-et a környezetében Taylor-sorral közelíteni.

$R_n(x)$ **becslése.** Olyan felső korlátot keresünk $R_n(x)$-re, amit „jól ismerünk", és ezáltal garantálni tudjuk $R_n(x)$ nagyságrendjét. Külön elemezzük $f^{(n)}(\xi)$-t $(\xi = a + \vartheta(x-a))$, $1/n!$-t és $(x-a)^n$-t.

$n!$ **becslése** a Stirling-formulával történik:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}.$$

$(x-a)^n$ **becslésekor** célszerű, hogy $|x-a| < 1$ legyen, ez azonban leszűkíti azt az intervallumot, ahol f-et közelíthetjük (legfeljebb 2 hosszúságúra). Minél kisebb az $|x-a|$ érték, annál gyorsabb konvergenciával számolhatunk nagyobb n-ek esetén.

2. $\sin x$ közelítése

$a := 0$,

$$R_n(x) = \frac{\pm \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, \vartheta x}{n!} x^n.$$

Most

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!},$$

ami (tanulmányaink alapján is) 0-hoz tart. A konvergencia gyorsasága lényeges, ezért $|x|$ minimalizálandó; a sin periodicitása miatt elegendő a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ intervallumra szorítkoznunk. Ez alapján

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!} \approx \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \cdot e^n}{\sqrt{2\pi} \cdot n^n \sqrt{n}} = \left(\frac{\pi e}{2} \cdot \frac{1}{n}\right)^n / \sqrt{2\pi n}.$$

Mivel $\pi e/2 < 4,3$, ha $n > 42$, akkor $\frac{\pi e}{2} \cdot \frac{1}{n} < 0,1$, vagyis ekkor

$$|R_n(x)| < 0,1^n / \sqrt{2\pi n},$$

továbbá $\sqrt{2\pi n} > \sqrt{2\pi \cdot 42} > 16$, azaz

$$|R_n(x)| < 0,1^n/16 < 0,1^n/10 = 0,1^{n+1}.$$

Ezzel beláttuk, hogy elég nagy n-re lépésenként (azaz n 1-gyel növelésével) a hibatag 1/10-ére csökken, vagyis minden lépésben legalább egy új tizedesjegyet nyerünk.

Megjegyzések. Mivel $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, továbbá $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$, $\sin x = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$, vagyis elegendő a $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ intervallumon közelítenünk, amennyiben a négyzetgyökvonásunk gyors. A cos hasonlóan közelíthető.

3. e^x közelítése

$a := 0$,

$$R_n(x) = \frac{e^{\vartheta x} x^n}{n!},$$

ami (tanulmányaink alapján is) 0-hoz tart, mivel $1 < e^{\vartheta x} < e^x$ esetén $e^{\vartheta x}$ rögzített szám. A konvergencia gyorsasága lényeges, ezért $|x|$ minimalizálandó, megmutatható, hogy elegendő a $0 < x \leq 1$ esettel foglalkozni, példa:

$$e^{12} = \left(\left(\left(\left(e^{0,75}\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2.$$

Ekkor $R_n(x) \leq \frac{e}{n!}$, ami a gyakorlatban kiválóan megfelel.

4. $\ln x$ közelítése (IEEE 754)

Először megkeressük azokat a k egész és f valós számokat, amelyekre

$$x = 2^k \cdot (1 + f),$$

és

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 + f < \sqrt{2}.$$

Világos, hogy

$$\ln x = \ln 2^k + \ln(1 + f) = k \cdot \ln 2 + \ln(1 + f).$$

Ha $\ln 2$-t egyszer már adott pontossággal kiszámítottuk, akkor $k \cdot \ln 2$ kiszámítható, így elegendő $\ln(1 + f)$ kiszámítására koncentrálnunk. Legyen most $s = \dfrac{f}{2 + f}$, ekkor

$$\frac{1 + s}{1 - s} = \frac{\frac{2+2f}{2+f}}{\frac{2}{2+f}} = 1 + f$$

miatt

$$\ln(1 + f) = \ln(1 + s) - \ln(1 - s),$$

de mivel az $\ln(1 + f)$ függvény az $f = 0$ közeli Taylor-sora

$$\ln(1 + f) = f - \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{3} - \frac{f^4}{4} + \frac{f^5}{5} - \dots,$$

ezért ugyanez a közelítés

$$\ln(1 + s) - \ln(1 - s) = 2\left(s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \dots\right)$$

alakba is írható, ahol a

$$R_n \leq \max\left|\frac{s^n}{n}\right| = \frac{(\max|s|)^n}{n}$$

hiba adódik. Megmutatható, hogy $\max|s| < 0,18$, s ez alapján $\ln x$ bármely valós x-re gyorsan közelíthető.