π-közelítések

2003. március 30.

1. Archimédesz módszere

Legyen $r = 1$ és $n = 6$. Definiáljuk az $x_1 = 1$,

$$m_i = \sqrt{r^2 - \frac{x_i^2}{4}},$$

$$x_i = \sqrt{\frac{x^2}{4} + (r - m_{i-1})^2}$$

sorozatot, ekkor

$$\frac{m_i x_i \cdot n}{2} \to \pi,$$

ha $i \to \infty$.

Gyorsaság: lépésenként durván 1 új tizedesjegy, a négyzetgyök miatt körülményes kiszámolni.

2. Az arctg-módszer

Megmutatjuk, hogy az $\operatorname{arctg} x$ függvény 0 körüli Taylor-sora:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Valóban, ha $|y| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y},$$

s y helyébe $-x^2$-et írva a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{x^2+1}$$

összefüggés adódik, amelyből – mindkét oldal integrálásával – éppen a fenti előállítást kapjuk. Most $x = 1$ helyettesítéssel „formálisan”

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

amiből

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right).$$

Gyorsaság: igen lassú, gyakorlati célra alkalmatlan.

2.1. Gyorsítások

$$\begin{aligned}\pi &= 16 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \\ &= 24 \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{57} + 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \\ &= 48 \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + 32 \operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 20 \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.\end{aligned}$$

3. Az AGM-módszer

Definíció. Legyenek a_0 és b_0 pozitív valós számok. Ekkor tekintve az

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= A(a_n; b_n),\\ b_{n+1} &= G(a_n; b_n)\end{aligned}$$

sorozatot, a $\lim a_n (= \lim b_n)$ határértéket az $(a_0; b_0)$ számpárhoz tartozó számtani-mértani középnek nevezzük, és $AG(a_0; b_0)$-lal jelöljük.

Állítás. Ha $a_0 \geq b_0$, akkor

$$b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq a_n \leq \dots \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0.$$

3.1. Elméleti módszer π kiszámítására

Legyen $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$, $c_n \geq 0$. (Ekkor $c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = a_n - a_{n+1}$.) Legyen továbbá k és k' két tetszőleges szám, amelyekre

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Bebizonyítható, hogy ekkor

$$\pi = \frac{4 \cdot AG(1; k) \cdot AG(1; k')}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^j (c_j^2 + c_j'^2)}.$$

Ha $k = k'$, akkor nyilván mindkettő $\frac{1}{\sqrt{2}}$, s így a fentiek alapján elegendő egy számtani-mértani közepet kiszámítani:

$$\pi = \frac{4AG\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1} c_j^2}.$$

3.2. Borwein kvadratikus algoritmusa

Legyen $a_1 = \sqrt{2}$, $b_1 = 0$, $p_1 = 2 + \sqrt{2}$,

$$a_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}}{2},$$

$$b_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}} \cdot (1 + b_{n-1})}{a_{n-1} + b_{n-1}},$$

$$p_n = p_{n-1} \cdot b_n \cdot \frac{1 + a_n}{1 + b_n}.$$

Ekkor $p_n \to \pi$.

Gyorsaság: Az eljárás minden lépésben megduplázza a pontos tizedesjegyek számát.

3.3. Borwein kvartikus algoritmusa

Lásd a kiadott programlistát.

Gyorsaság: Az eljárás minden lépésben meg-4-szerezi a pontos tizedesjegyek számát, de a 4. gyökvonás túlságosan lassú művelet, ezért a gyakorlatban ez az algoritmus lassabb, mint a kvadratikus módszer.

Megjegyzés. Létezik 5-öd és 7-edrendű módszer is a π közelítésére, de a gyakorlatban a kvadratikus közelítés a leghasználhatóbb.