Konvergencia-sebesség

2003. március 30.

1. Rend

Definíció. Legyen $a_n \to a$. Azt mondjuk, hogy ezen konvergencia rendje p, ha van olyan c pozitív valós szám, hogy minden n-re

$$\left|\frac{a_{n+1}-a}{(a_n-a)^p}\right| \leq c.$$

Megjegyzés. Az, hogy egy konvergencia rendje p, szemléletesen azt jelenti, hogy a sorozat egy következő tagjának kiszámításakor a pontos jegyek száma meg-p-szereződik.

2. A Newton-algoritmus

Az

$$a_{n+1} = \frac{(k-1)a_n^k + x}{k \cdot a_n^{k-1}}$$

sorozatot Newton-iterációnak nevezzük. Az a_1 számot *induló értéknek*, k-t a Newton-iteráció *fokszámának*, x-et az iteráció *argumentumának* hívjuk. (A sorozat komplex számokból is állhat.)

Tétel. Amennyiben a Newton-iteráció konvergens, határértéke x valamely p-edik gyöke.

Bizonyítás. A határérték unicitás-tételét alkalmazzuk.

Észrevétel. Bizonyos induló értékeknél az iteráció konvergens (pl. x valamely p-edik gyökét választva konstans sorozatot kapunk), bizonyos értékeknél pedig nem értelmezett egy bizonyos n-től kezdve — ez utóbbi akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_n = 0$ valamely n-re.

Állítás. Pozitív (valós) induló értéknél ha $n \geq 2$, $a_n \geq \sqrt[k]{x}$.

Bizonyítás. Mivel $a_{n+1} = A\left(a_n; a_n; a_n; \ldots; a_n; \frac{x}{a_n^{k-1}}\right)$ k db szám számtani közepe, s mértani közepük $G = \sqrt[k]{x} \leq A = a_{n+1}$, az állítást beláttuk.

2.1. A $k = 2$ eset

Ebben a részben csak valós számokkal dolgozunk.

Tétel. Legyen $x > 1$. Ekkor a másodfokú Newton-iteráció az 1 kezdeti értékkel konvergens, s a konvergencia rendje 2.

Bizonyítás. {

1. Lemma. Legyen $a \geq b > 0$. Ekkor

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq A(a;b) - G(a;b) \leq \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Bizonyítás. {

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2},$$

a most kapott kifejezés nevezőjét pedig alulról illetve felülről becsüljük, ha a helyébe b-t illetve b helyébe a-t írunk, s ebből már adódik a lemma állítása. }

2. Lemma. Ha $a < x$, akkor

$$a - \frac{x}{a} < 2(a - \sqrt{x}).$$

Bizonyítás. {

A bizonyítandó egyenlőtlenséget rendezzük 0-ra, ekkor a vele ekvivalens

$$0 < \frac{1}{a}(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + a,$$

$\sqrt{x}$-ben másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk. Tegyük fel, hogy van olyan x, amelyre ez az egyenlőtlenség nem áll fenn, ebben az esetben lesz olyan x is, amikor az egyenlőtlenség jobb oldala éppen 0. Ekkor azonban

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{1}{a} \cdot a}}{2/a} = \frac{2}{2/a} = a,$$

azaz $x = a$, ami viszont ellentmond az induló $a < x$ feltételnek. }

Most már nekiállhatunk a Tétel bizonyításának. Először megmutatjuk, hogy ha $n > 1$, akkor a_n monoton csökkenő. Valóban, az általános eset Állításának értelmében ugyanis $a_n \geq \sqrt{x}$, ebből pedig $\frac{x}{a_n} \leq \sqrt{x}$ is következik; e két előbbi tényt $\frac{x}{a_n} \leq \sqrt{x} \leq a_n$-ként is felírva $\frac{x}{a_n} \leq a_n$ is adódik, amiből

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{x}{a_n}}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n.$$

Az általános eset Állítása miatt sorozatunk alulról korlátos, az imént pedig bebizonyítottuk, hogy monoton csökkenő: mindez azt eredményezi, hogy feltétlenül konvergens is, az általános eset Tétele miatt pedig a határérték csak $\sqrt{x}$ lehet.

Most használjuk fel az 1. Lemmát, a helyébe a_n-et, b helyébe pedig x/a_n-et írva, ezáltal

$$A(a;b) - G(a;b) = a_{n+1} - \sqrt{x} < \frac{(a_n - x/a_n)^2}{8(x/a_n)}$$

adódik. Most a 2. Lemmát felhasználva, a helyébe a_n-et írva a kapott kifejezés tovább becsülhető: itt felhasználjuk, hogy $a_1 = 1$ miatt a_2-re igaz az

$$1 < \frac{a_1 + \frac{x}{a_1}}{2} = \frac{1+x}{2} < x$$

becslés, és ezután a monoton csökkenés miatt $a_n < x$ továbbra is teljesül. Így minden n-re

$$\frac{(a_n - x/a_n)^2}{8(x/a_n)} < \frac{(2(a_n - \sqrt{x}))^2}{8(x/a_n)} < \frac{(a_n - \sqrt{x})^2}{2},$$

s itt az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\frac{x}{a_n} > 1$. A fentieket összeolvasva kapjuk, hogy

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{x}}{(a_n - \sqrt{x})^2} < \frac{1}{2},$$

ami – mivel $a_{n+1} > \sqrt{x}$ – éppen azt jelenti, hogy a konvergencia rendje 2. }

Megjegyzések. Más a_1-eket is választhatnánk, de így egyszerűbb volt a bizonyítás. Általában elmondható, hogy a_1-et célszerű $\sqrt{x}$ „közelében” megválasztani, hogy eljárásunk minél gyorsabb legyen. Ha a_1 negatív, akkor a határérték $-\sqrt{x}$ lesz.