Bejárja-e a teknős a teljes síkot?

Bevezető

Dolgozatomban egy számomra nagyon kedves, elemi analízisbeli feladatot ismertetek. Maga a probléma több szempontból is kapcsolódik „Az analízis a matematika más területein" c. kurzuson elhangzottakhoz, ezért jutott eszembe az alábbi feladatról írni. Egy Logo-tolmács számítógépes programot [L] kezdtem el készíteni még 1996 tavaszán, amikoris a példaprogramok kitalálása közben magam botlottam egy érdekes kérdésbe.

A Logo nyelv mai változatai[1] gyerekek számára készült grafikus programnyelvek, amelyekben három-négy fő utasítás van: ELŐRE, HÁTRA, JOBBRA, BALRA. A parancsokat egy teknősbéka hajtja végre, „aki" egy képernyő nagyságú papírlapon mozogva, s tollat tartva a „kezében" vonalat is húz a papírra.

A négy alaputasítás mindegyikének egy-egy paramétere van: az ELŐRE n hatására a teknőc előre, a HÁTRA n hatására hátra lép n egységet (általában képpontot), a BALRA α és JOBBRA α utasításokra pedig α szöggel balra illetve jobbra fordul. Egy négyzetet ezen a nyelven például a következő 8 utasításból álló programmal rajzolhatunk:

```
ELŐRE 20
JOBBRA 90
ELŐRE 20
JOBBRA 90
ELŐRE 20
JOBBRA 90
ELŐRE 20
JOBBRA 90
```

A Logo nyelvnek persze a fentieken kívül számos más utasítása van[2]. Segítségükkel könnyen rajzolhatók bonyolult alakzatok is. De szorítkozzunk csak a fenti „szűk" utasításkészletre! Az egyszerűség kedvéért kössük ki, hogy az n és

[1] Az eredeti Logo nyelv ipari-kibernetikai célra készült. A hetvenes évek közepén Seymour Papert, Piaget egyik tanítványa bővítette ki kényelmes, egyszerűen kezelhető grafikus programozási eszközzé [P].

[2] Ilyen pl. az ISMÉTEL utasítás, mellyel a fenti program könnyen lerövidíthető:

```
ISMÉTEL 4 (
ELŐRE 20
JOBBRA 90 )
```

α paraméternek csak egy-egy rögzített valós számot adhatunk meg. Kíváncsiak vagyunk, milyen alakzatokhoz juthatunk ilyen korlátozásokkal konkrét α paraméterek esetén — az n-et igazából vehetjük tetszőleges nagyságúnak, a kapott ábráink nagyítással egymásba transzformálhatók lesznek.

Néhány kézenfekvő kérdés

Azonnal több kérdésünk is felmerülhet.

Az első talán ez lehet: eljuthatunk-e a sík bármely pontjába teknőcünkkel? Ha igen, a teknős által befutott alakzatok „igen sűrűek" lesznek: akár az egész síkot befedik. Nem tűnik valószínűnek, hogy egy végtelenül kicsi vastagságú tollal (ezt tételezzük fel) az egész sík egyetlen töröttvonallal beszínezhető legyen.[3]

Jó, lehet, hogy nem tudjuk a teljes síkot egyetlen alkalmasan választott α szögű fordulással sem bejárni. Értelmes kérdés viszont ekkor is, hogy meg tudjuk-e közelíteni a sík tetszőleges P pontját akármilyen kicsi ε távolságra vagy sem. Ha igen, az azt jelentené, hogy tetszőlegesen kicsi pozitív számnak (most 2ε-nak) választva a teknős tollának vastagságát, a síkot mégiscsak befesthetjük.[4]

Egy másik véglet rajzunk külalakja szempontjából az, hogy kaphatunk-e „szép" mintázatot úgy, ha a teknőst az összes általa elérhető helyen végigmásztatjuk. Persze nyilvánvaló, hogy ez végtelen sokáig tart (feltéve, hogy végtelen nagy rajzlappal vagy képernyővel dolgozunk). Hogy a „szép" mintázaton pontosan mit értünk, az persze kérdéses. Mindenesetre az $\alpha = 90^o$ választással kapott négyzetrács-alakzatra feltétlenül azt mondjuk, hogy szép: örülünk annak, hogy teknősünk nem kóválygog úttalan utakon, hanem jól meghatározható $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ pontpárok között mozog.

Hogy pontosabban beszélhessünk ezekről a mozgásokról, a feladatot még precízebben kell megfogalmaznunk.

A geometriai-algebrai modell

Tegyük fel, hogy a teknős a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben mozog. Induláskor az origóban „áll", s „észak" felé, a $(0, 1)$ pont felé „néz". A teknős mozgását az általa érintett azon (x, y) koordinátapárral írjuk le, amely pontból vagy pontba az ELŐRE n utasítás végrehajtása során indult illetve érkezett. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy $n = 1$.

Egy esetleges számítógépes számításnál hasznos lehet a fenti (x, y) pontok algebrai jellegű megadása. A fenti (x, y) párt bővítsük ki egy $\varphi \in [0, 2\pi)$ szögmeny-

[3]Konstruálható olyan töröttvonal, amely egy négyzetlap minden pontján legalább egyszer áthalad, ilyenek pl. a Peano-görbék. ([V] 160. o.)

[4]Németh Zoltánnal beszélgettem nemrég, ő a következő feladatszöveget javasolta: „Logo nyelven vezérelhető holdjáróval meg lehet-e tetszőlegesen közelíteni egy bizonyos pontot (pl. a TMA–1-et) a Hold (ez esetben síknak tekinthető) felszínén?" [N]

nyiséggel: minden egyes pontra feljegyezzük, hogy onnan kiindulva egy ELŐRE vagy JOBBRA utasítással milyen módon változtatjuk a teknős keleti iránnyal bezárt szögét. Nyilvánvaló, hogy ELŐRE és HÁTRA lépésnél az $(x, y), \varphi$ hármasból $(x \pm \cos\varphi, y \pm \sin\varphi), \varphi$ állapothármas, JOBBRA és BALRA fordulásnál $(x, y), (\varphi \pm \alpha) \bmod 2\pi$ állapothármas[5] lesz a teknős helyzetének és irányának jelzője.

Tekintsük a fent megjelenő számhármasok halmazát. Ezeket egy-egy E, H, J és B betűkből álló sorozattal fogjuk reprezentálni. Például az EEJEHBB sorozat fogja jelölni azt a pontot, amelyet úgy kaptunk, hogy kétszer ELŐRE lépésre, egyszer JOBBRA fordulásra, újból ELŐRE lépésre, majd egy HÁTRA lépésre, végül kétszeres BALRA fordulásra utasítottuk a teknőst.

Ezen sorozatok halmazát jelölje S'. Vegyük fel az üres szót is ebbe a halmazba, ezt jelöljük ι-val. Definiáljuk az S' halmazon a szorzás műveletet a következőképpen: az $a, b \in S'$ sorozatok szorzatán azt a sorozatot értjük, ami a és b egymás után írásával keletkezik. Kényelmi okból definiáljunk egy olyan $S \subset S'$ halmazt, melyet úgy konstruálunk, hogy ha két különböző S'-beli a és b elemhez ugyanaz a fenti állapothármas tartozik, akkor azok közül a lexikografikus rendezés szerinti elsőt (illetve ι-t) vesszük csak fel S-beli elemnek; a másikat elhagyjuk.

Algebrai meggondolások

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{S}' = (S'; \cdot)$ és $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ csoport, továbbá $\mathcal{S}$ az $\mathcal{S}'$-nek homomorf képe. ι, E, H, J és B generálják mindkét algebrai struktúrát.

A későbbi eredményeink szempontjából majdnem lényegtelen $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ absztrakt algebrai vizsgálata. Izgalmas volna viszont arra a kérdésre választ adni, hogy nem generálhatnánk-e $\mathcal{S}'$-t például csak E-vel és J-vel.

Abban az esetben, ha az $\alpha/360^{\rm o}$ „páros nevezőjű" racionális szám, akkor $S = [\mathrm{E}, \mathrm{J}]$. Legyen ugyanis $\alpha = (p/q) \cdot 360^{\rm o}$, ahol p és q pozitív egész számok, egymáshoz relatív prímek, s q páros. Nyilván $\iota = \mathrm{J}^q$, $\mathrm{B} = \mathrm{J}^{q-1}$. Továbbá $\mathrm{H} = \left(\mathrm{J}^{q/2}\right) \mathrm{E} \left(\mathrm{J}^{q/2}\right)$, hiszen $\mathrm{J}^{q/2}$ éppen a $180^{\rm o}$-os fordulatot jelenti.

Ha $\alpha/360^{\rm o}$ nem „páros nevezőjű" racionális vagy irracionális szám, akkor $([\mathrm{E}, \mathrm{J}], \cdot)$ csupán félcsoport. Az előbbi esetben J-hez tudunk megfelelő $\mathrm{B} = \mathrm{J}^{-1}$-et definiálni (a fenti konstrukció megfelelő, tehát $S = [\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{J}] = [\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{B}]$), E-hez viszont egyik esetben sem gyárthatjuk le az inverzét. Egyszerűbben fogalmazva: a BALRA α utasítást az első esetben tudjuk pótolni kellően sokszor kiadott JOBBRA α utasítással (a másodikban általában nem), a teljes megfordulásra viszont általános esetben nincs módunk. Ennek a meggondolását az Olvasóra hagyjuk.

[5] Tetszőleges φ szögre a $\varphi \bmod 2\pi$ kifejezés azt az x 0 és 2π közötti számot jelenti, amelyhez létezik olyan k egész szám, hogy $\varphi = k \cdot 2\pi + x$.

Mivel $\mathcal{S}$ csoport, van olyan végtelen töröttvonal, amelyen minden $a \in S$ pont szerepel. Ehhez azt kell észrevenni, hogy tetszőleges $a_n \in S$ töröttvonalra ($n = 1, 2, \ldots$) akármelyik S-beli b elem felfűzhető: legyen ugyanis $a_{n+1} = a_n \cdot (a_n^{-1} \cdot b) = b$. Félcsoportban ez nem feltétlenül igaz, könnyen konstruálhatunk ellenpéldát irracionális $\alpha/360^{\mathrm{o}}$ felvételével.

Mielőtt a megfelelő analízisbeli eszközökhöz nyúlnánk, vegyük észre, hogy α-t kényelmes fokban mérnünk. Könnyen látható, hogy $\alpha/360^{\mathrm{o}}$ pontosan akkor racionális, ha α fokban mérve racionális.

Jelöljük most EJ_α-val azt a félcsoportot, amit az 1 egységgel való ELŐRE lépés és az α szöggel való JOBBRA elfordulás generál. Azt állítjuk, hogy racionális α esetén létezik olyan β szög, amely a teljes szögnek egész számú hányada, és az EJ_β által meghatározott pontok pontosan azok, amelyeket EJ_α határoz meg. Valóban, ha $\alpha = (p/q) \cdot 360^{\mathrm{o}}$, ahol p és q olyan egész számok, amelyek relatív prímek, akkor a $\beta = (1/q) \cdot 360^{\mathrm{o}}$ választás megfelelő. Ez annak következménye, hogy a

$$k \cdot p = l \cdot q + 1$$

kétismeretlenes lineáris diofantoszi egyenlet megoldható, lévén $(p; q) = 1$. Szemléletesen mindez azt jelenti, hogy a JOBBRA α utasítást k-szor megismételve ugyanazt kapjuk, mint ha egyetlen JOBBRA β utasítást adtunk volna ki. (A kiemelt egyenletet q-val való beszorzás és 360^{o}-kal leosztás után kapjuk.)

Racionális esetben tehát elegendő az $\alpha = 360^{\mathrm{o}}/q$ esettel foglalkoznunk.

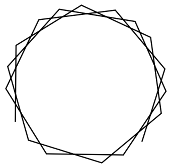
Diszkrét és sűrű ponthalmazok

Elevenítsünk fel, illetőleg definiáljunk néhány fogalmat! (Feltesszük, hogy az A halmaz a sík egy részhalmaza.)

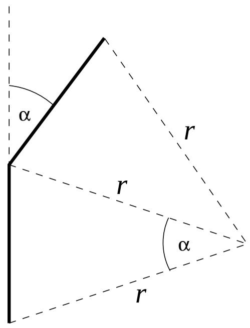
> *Diszkrét*nek nevezzük az A halmazt, ha nincs torlódási pontja, azaz van olyan ε pozitív valós szám, amelyre fennáll, hogy az A halmaz tetszőleges a elemétől minden más A-beli elem ε-nál nagyobb távolságra van.
>
> Legyen B olyan részhalmaza a síknak, melyre $A \subseteq B$. Azt mondjuk, hogy *A sűrű a B halmazon*, ha tetszőleges B-beli P ponthoz és ε pozitív valós számhoz van olyan A-beli elem, amely P-től legfeljebb ε távolságra van.
>
> Azt mondjuk továbbá, hogy A *mindenütt sűrű*, ha A sűrű a teljes síkon.

Nyilvánvaló, hogy ha A mindenütt sűrű, akkor nem diszkrét, ellenben ha nem diszkrét, akkor nem feltétlenül mindenütt sűrű.

Ha α nem racionális, akkor szemléletesen világos, hogy EJ_α nem határoz meg diszkrét ponthalmazt. Az $\{(\mathrm{EJ})^n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat ugyanis olyan „végtelen oldalú" csillagsokszöget határoz meg, amelynek csúcsai a sík egy korlátos tartományába esnek, s α irracionalitása biztosítja, hogy ezen pontok közül semelyik kettő se legyen azonos.



A Bolzano–Weierstrass-tétel szerint viszont ez a korlátos ponthalmaz (minden pontja ugyanazon az $r = 1/\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ sugarú körön van) szükségképpen rendelkezik torlódási ponttal.



Már csak az a kérdés, hogy $\mathcal{S}$ irracionális α-kra mindenütt sűrű-e. A válasz igenlő, ezt többféle módon is igazolhatjuk, most mi egy konstruktív bizonyítást veszünk szemügyre. (Az alábbi érvelésből persze nyilvánvalóan következik $\mathcal{S}$ nem diszkrét tulajdonsága is.)

Azt mutatjuk meg, hogy az O origóból tetszőleges P pontot akámennyire megközelíthetünk. Ezt úgy tesszük, hogy az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a függőlegessel bezárt φ szögéhez nagyon közel lévő φ^* szöget konstruálunk meg (a teknős eközben az origóban marad), majd kellően kis ε hosszúságból elegendően sokat véve – az OP szakasztól nem messze haladva – megközelítjük P-t.

Egyrészt tehát tudnunk kell tetszőleges szöget fordulni. Mivel α irracionális, s az $\{n \cdot \alpha \bmod 2\pi\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak minden $[0, 2\pi)$-beli szám torlódási pontja, ezért tetszőleges φ szöghöz van olyan $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots$ sorozat, melyre $\varphi_n^* \to \varphi$, s ezen φ_n^* szögek mindegyike valamelyik J^{m_n}-hez tartozó szögelfordulás egy-egy bizonyos pozitív egész m_n-re.

Másrészt szükséges, hogy tetszőleges kis hosszúságot léphessünk előre. A csillagsokszöget mutató ábráról jól leolvasható, hogy az $\{(\mathrm{EJ})^n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat pontjai közötti távolságok halmazának minden $[0, 1]$-beli valós szám torlódási pontja. (Sőt, a csillagsokszöget követő ábra szerint az $\{(\mathrm{EJ})^n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat pontjai halmazának az átmérője $2r = 1/\sin\frac{\alpha}{2} > 1$, vagyis minden 0 és $1/\sin\frac{\alpha}{2}$ közé eső szám torlódási pont.) Nekünk elegendő, hogy a 0 torlódási pont: így van két olyan pont (az $(\mathrm{EJ})^k$ és $(\mathrm{EJ})^l$ utasítássorozatokhoz tartozó), melyek egymástól való ε^* távolsága ε-t tetszőlegesen megközelíti. Most az origó és az $(\mathrm{EJ})^{l-k}$ által meghatározott pont közötti szakasz a függőlegessel olyan φ' szöget zár be, amelyet – ld. az előző bekezdést – tetszőlegesen megközelíthetünk. Így az ELŐRE ε utasítást a $\mathrm{J}^{-m'}(\mathrm{EJ})^{l-k}$ közelítéssel fogjuk kiváltani (itt m' a φ' szöget jól közelítő kitevő J-hatvány kitevője).

Feltehető esetlegesen az a kérdés, hogy az OP szakasz mentén haladva nem távolodhatunk-e túlságosan el a P ponttól az ELŐRE ε lépés sokszori alkalmazása során. Igen, ez elképzelhető, de φ^* egyre finomabb, φ-hez egyre közelebbi választásával P is akármennyire megközelíthető.

A racionális eset

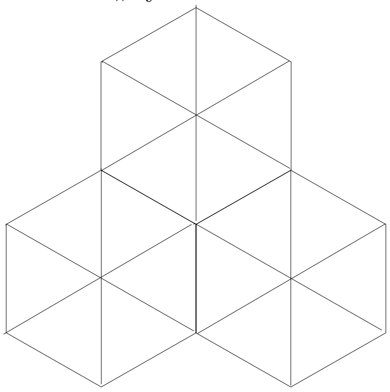
Most racionális α-kra vizsgálódunk.

Állítjuk, hogy az $\alpha = 360^\circ/q$ szög által generált ponthalmaz pontosan akkor mindenütt sűrű, ha $q = 5$ vagy $q \geq 7$ (q tetszőleges pozitív egész).

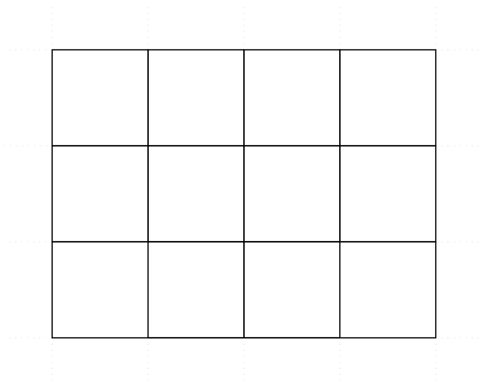
Több lépésben bizonyítunk.

A diszkrét esetek

Először megmutatjuk, hogy a $q = 1, 2, 3, 4, 6$ esetekben a generált ponthalmaz diszkrét. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a $q = 1$ és $q = 2$ esetben egy egyenes (az y-tengely) egész koordinátájú pontjait kapjuk meg. A $q = 3$ eset lényegében ugyanaz, mint a $q = 6$ eset. Mindkét alkalommal szabályos háromszög alakú rácsozatot kapunk — ha a teknős „nyomát” is adminisztráljuk:



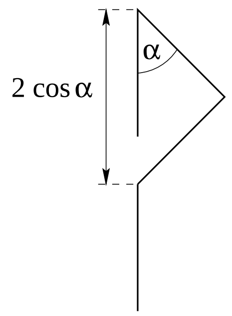
Végül a $q = 4$ esetben végtelen négyzetrács jelenik meg a teknős talpa alatt:



Az összes fenti esetben tetszőleges $\varepsilon < 1$ választás megfelelő.

A többi racionális α-hoz tartozó halmazok nem diszkrétek

Az ábrán az $\mathcal{S}_8$-beli EJEBBEJH-hoz tartozó teknős-pálya látható.



Világos, hogy általában a JEBBEJ sorozattal az ELŐRE $2\cos\alpha$ utasítást helyettesítjük. Ha sikerülne belátnunk, hogy a fent tárgyalt esetek kivételével $2\cos\alpha$, illetőleg $\cos\alpha$ irracionális, akkor azt is igazolnánk, tetszőleges kicsit is léphetünk előre, hiszen bármely q irracionális számhoz van olyan m pozitív egész, amelyre az $m \cdot q$ törtrésze akármekkora pozitív ε-nál kisebb. (Ez a „nagyon kicsi" előrelépés tehát a $(\text{JEBBEJ})^m\text{H}^{[m\cdot 2\cos\alpha]}$ lépéssorozattal adható meg, ahol $[2\cos\alpha \cdot m]$ jelöli $2\cos\alpha \cdot m$ egészrészét.)

Az „egy helyben maradás" ($\mathcal{S}$-ben ezt ι reprezentálja) tehát torlódási pontja halmazunknak, ha $\cos\alpha \notin \mathbf{Q}$. Ehhez igazolandó, hogy

$$\cos\tfrac{2\pi}{n} \notin \mathbf{Q}, \text{ ha } n = 5 \text{ vagy } n \geq 7.$$

A $\cos\frac{2\pi}{n}$ csak akkor racionális, ha ± 1-gyel, 0-val vagy $\pm\frac{1}{2}$-del egyenlő

Nyilván ezt elengendő belátnunk, hiszen az $n = 1, 2, \ldots, 6$ eseteket jól ismerjük; az $n \geq 7$ esetre vonatkozó állítás pedig a cos függvény a kívánt intervallumon való monotonitásának következménye.

n	1	2	3	4	5	6
$\cos\frac{2\pi}{n}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Legyen $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Két esetet fogunk megkülönböztetni, elsőként azt, amikor n páratlan. Tudván, hogy

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\alpha \cdot i^k \sin^k\alpha$$

(a binomiális tételt használtuk fel), $\cos n\alpha$-ra az

$$\binom{n}{0}\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-1}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha$$

előállítás adódik (az előző egyenlet mindkét oldalának képzetes részeit írtuk csak fel; felhasználtunk egy a komplex számok hatványozására vonatkozó trigonometrikus alakú összefüggést). Vegyük észre, hogy ez a kifejezés $\cos\alpha$ polinomfüggvénye, mivel az összeadandó szorzatok tényezőiben $\sin\alpha$ páros hatványon áll, s $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$. Ez a polinom legfeljebb n-edfokú, a konstans tag viszont bizonyosan 0 (minden tagban szerepel a $\cos\alpha$ szorzó tényezőként). Megmutatjuk, hogy a főegyüttható 2^{n-1}. Valóban, azt kell csak észrevenni, hogy a megjelenő $\sin^{2k}\alpha$-k helyett $(1-\cos^2\alpha)^k$-t írva s ezt a binomiális tétellel kifejtve pontosan akkor kapunk $\cos^n\alpha$-s tagot, ha $\binom{k}{0}(-\cos^2\alpha)^k$-t szorozzuk össze $\cos^{n-2k}\alpha$-val. Így az egyes tagokban megjelenő $\cos^n\alpha$-k száma $\binom{n}{0} - -\binom{n}{2} + \binom{n}{4} - -\binom{n}{6} + \ldots$ Mivel

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k} + \binom{n}{n-2k} = 2^n,$$

állításunk igazolást nyert, a főegyüttható ennek nyilván fele, hiszen $\binom{n}{2k} = \binom{n}{n-2k}$.

Tekintsük ismét a $\cos n\alpha$-t előállító $p(\cos\alpha)$ polinomot. A $\cos n\alpha = p(\cos\alpha)$ egyenletet írjuk át $p(\cos n\alpha) - 1 = 0$ alakúra (nyilván $\cos n\alpha = 1$). Most a $p(x) - 1 = 0$ egyenletnek az $x = \cos\alpha$ nyilván megoldása lesz. Tudjuk, hogy minden egész együtthatós polinomegyenlet racionális a/b megoldására (a és b relatív prímek) a osztója a konstans tagnak, b pedig a főegyütthatónak. Mivel a $p(x) - 1 = 0$ egyenlet egész együtthatós, ezért a racionális megoldások szükségképpen $x = 2^{-l}$ alakúak, ahol l nemnegatív egész szám. Ebből nyilvánvaló, hogy ha $\cos\alpha$ racionális, akkor – páratlan n esetén – $1/2^l$ alakban írható. A fenti táblázat szerint $n = 6$ esetén $\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}$, 6-nál nagyobb n-ekre viszont $\cos\alpha > \frac{1}{2}$. Ez csak úgy volna lehetséges, ha $l = 0$ volna, de $\cos\frac{2\pi}{n} \neq 1$, ha $n > 6$.

Páros n esetén a bizonyítást a páratlan esetre vezetjük vissza: észrevesszük, hogy ha $\cos\alpha$ racionális, akkor $\cos 2\alpha$ is az, hiszen $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. A részleteket az Olvasóra bízzuk. [N]

Ha $\mathcal{S}$ nem diszkrét, akkor mindenütt sűrű

Majdnem nyilvánvaló a következő állítás:

> Legyenek $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ a sík olyan részalgebrái, melyeket a B_1 illetve a B_2 halmazok generálnak. Ha van egy-egy olyan, egymást egy pontban metsző e_1 és e_2 egyenes, hogy $\mathcal{A}_1$ sűrű e_1-en és $\mathcal{A}_2$ sűrű e_2-n, akkor $[B_1 \cup B_2]$ sűrű a teljes síkon.

A bizonyításhoz azt gondoljuk meg, hogy egy olyan koordinátarendszerben, melynek origója $e_1 \cap e_2$, tengelyei e_1 és e_2, tetszőleges P ponthoz egyértelműen tartozik egy-egy valós koordinátapár; ezek határozzák meg, hogy az e_1 és e_2 egyenesen hányszor ε távolságot kell megtennünk a P pont jó megközelítéséhez.

A fenti állítást a $B_1 = \{\text{ELŐRE } 2\cos\alpha, \text{ HÁTRA } 1\}$, $B_2 = B_1 \cup \{\text{JOBBRA } \alpha\}$ halmazokra alkalmazva kapjuk, hogy a nem diszkrét esetekben $\mathcal{S}$ a mindenütt sűrű tulajdonsággal is rendelkezik. (Ezt a fajta bizonyítást alkalmazhatjuk irracionális α esetén is.)

Összefoglalás

Eredeti kérdéseinkre válaszolva a következőket mondhatjuk:

Ha $\alpha = 0^\circ$ vagy 180°, $\mathcal{S}$ a $(\mathbf{Z}; +)$ struktúrával izomorf csoport. Az $\alpha = 90^\circ$ és $\alpha = 270^\circ$ esetben a teknős négyzetrácsot, $\alpha = 60^\circ$, 120°, 240° és 300° esetén szabályos háromszögrácsot rajzol. Minden más esetben $\mathcal{S}$ a teljes síkon mindenütt sűrű.

Kiegészítésképpen az is elmondható, hogy voltaképpen felesleges is egy-egy n-et és α-t rögzíteni az ELŐRE n és HÁTRA n illetve JOBBRA α és BALRA α utasításokban. Könnyen meggondolható, hogy lényegileg a fenti az eseteket kapjuk majd meg, azzal a többlettel, hogy pl. $n_1 \in \mathbf{Q}$, $n_2 \notin \mathbf{Q}$, $\alpha = 0^\circ$ vagy $\alpha = 180^\circ$ esetén egy olyan halmazt kapunk, mely az $x = 0$ egyenesen mindenütt sűrű.

Felhasznált irodalom

- *Lógó nyelv* számítógépes program (nyilvánosan hozzáférhető az interneten a `http://www.cab.u-szeged.hu/local/etasp/programok.html` címen) [L]
- Németh Zoltán, személyes beszélgetés [N]
- Seymour Papert: Észrengés. SZÁMALK, Budapest, 1987. [P]
- N. Ja. Vilenkin: A végtelen kutatása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. [V]