

József Attila Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Halmazelmélet és Logika Tanszék

Véletlen sorozatok, diszkrét dinamikus rendszerek, káosz

Készítette:

Kovács Zoltán

V. matematika-számítástechnika

Témavezető:

Dr. Krisztin Tibor

egyetemi docens

Szeged, 1999

Bevezető

Dinamikus rendszerek s az azokban fellépő kaotikus jelenségek vizsgálata mintegy száz éve köti le sok matematikus, fizikus és számítástudós figyelmét. A mai számítógépek segítségével másodpercenként már milliárdos nagyságrendű elemi számítás is elvégezhető, s ez a hétköznapi ember számára is közel hozta a kutatások eredményeit: az egyik legnépszerűbb operációs rendszer „képernyőpihentető” programjában a képzeletbeli labirintus falait fraktálok borítják.

A fraktálokat, s az őket generáló dinamikus rendszerek sok tulajdonságát misztikus homály fedi. Pofonegyszerű képletek — érthetetlenül komplex geometriai formák, varázslatos minták. Talán ez a felfoghatatlan ellentét az oka annak, hogy a káoszkutatás ma nagyon népszerű. Az elmúlt néhány évben „csináld magad” fraktálkészítő programok százai jelentek meg az Interneten, melyek alapján akár egy általános iskolás is bepillantást nyerhet a legalapvetőbb összefüggésekbe.

Jelen dolgozat célja véletlenszerű sorozatok és dinamikus rendszerek fogalmának segítségével egy speciális matematika tagozatos középiskolás számára érthető módon bemutatni a káosz néhány fő vonását. A tárgyalt témák bemutatásakor feltételezzük az elemi számelméleti, analízisbeli és valószínűségszámítási összefüggések ismeretét.

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, *dr. Krisztin Tibornak*, hogy tanácsaival nagy segítséget nyújtott e szakdolgozat megírásához. Köszönet illeti *Németh Zoltán*, *dr. Csirik János*, *dr. Krámlí András*, *Kosztolányi József* és *dr. Pintér Lajos* lelkiismeretes oktatói munkáját, mely nagyban hozzájárult a tárgy és a kapcsolódó témakörök megismeréséhez, megkedveléséhez. Megraga-

dom az alkalmat, hogy köszönetet mondjak *Dályay Zsuzsannának* és *dr. Dombi Józsefnek*, akik bevezettek a káoszelmélet alapjaiba; továbbá annak a számos programozónak, akiknek a szoftvereit munkám során szabadon felhasználhattam: így a *Linux* operációs rendszert, a *LyX* és a *L^AT_EX* szövegszedő programokat, a *Fract-int* és *XaoS* fraktálkészítőket, az *xv*, *ghostscript*, *xfig*, *DJGPP/Allegro* és *MuPAD* szoftvereket.

1. rész

Véletlenszerű sorozatok

1.1. Racionális, irracionális számok

A gimnáziumi matematika tananyag egyik legelső ténye az alábbi

Tétel. *Minden szám akkor és csak akkor írható fel periodikus tizedestört alakban, ha racionális.* (1.1.)

Számunkra azért érdekes ez az igen egyszerű állítás, mert ennek következtében a racionális számok jegyeinek sorozata nem lehet véletlenszerű, hanem ismétlődik.

A matematika első művelői, az egyiptomi írnokok, babilóniai számolótudósok, kínai matematikusok számára a mennyiség, a szám fogalma egészen más volt, mint manapság. A hosszúságnak mint mértani fogalomnak, s egy számjegyekkel kódolható mennyiségnek az összekapcsolásához hosszú út vezetett el. A mezopotámiai matematika ismerte a ma Newton-féle algoritmusként ismert négyzetgyökvonó módszert, s így bármely szám gyökét tetszőleges pontossággal meg tudták határozni. Sőt, a pitagoreusok arra is rájöttek, hogy bizonyos mennyiségek négyzetgyökeként adódó mennyiségek az eredeti mennyiséggel nem összemérhetők. Tudták, hogy minden négyzet oldalának és átlójának a hossza összemérhetetlen egymással, vagyis nincsen olyan kicsiny hosszúság, amelynek egész számú többszöröseként egyszerre előállna az oldal is, az átló is. Ma ezt algebrai megfogalmazásban úgy mondanánk, hogy a $\sqrt{2}$ szám nem racionális.

Hosszú ideig tartott, amíg a számfogalom a mai formájához jutott el. A tízes számrendszerben való számolás persze nem új: néhány kivétellel minden ókori kultúra így számolt. Mégis, a ma hétköznapi embere számára nem magától értetődő, hogy a tizedestörtként és a közösleges törtként ismert számok „nagyjából” ugyanazt a halmazt alkotják. Teljes egyezésről azért nem beszélhetünk, mert bár minden közösleges tört véges vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban írható, nem minden tizedestört közösleges tört, vagy más szóval: racionális szám.

A tizedestörtek periodicitása a végtelen megközelítése szempontjából érdekes. Addig nincs nagy probléma, amíg a $110/7$ látszólag végtelen tizedestört alakját át nem alakítjuk a számunkra véges, s ezért kezelhető $15,71428\bar{5}$ formára. De mit mondjunk a $\sqrt{2}$ -ről? Szabálytalan, és ezért titokzatos. Mégis, a fenti tétel értelmében annyit mindenképpen megérthetünk, hogy nincs periodicitás számjegyeinek sorozatában, mert irracionalitását biztosítja a következő

Tétel. $\sqrt{n}$ akkor és csak akkor racionális, ha n négyzetszám. (1.2.)

*

Bebizonyítjuk az (1.1.) tételt. A bizonyítás két részből áll. Az elegendőség igazolásához először feltesszük, hogy a szóban forgó a szám racionális, tehát előáll k/l alakban (k és l egész számok). Ha az osztás szokásos, írásban, papíron történő módjára gondolunk, a tizedestört alakjának számjegyeit úgy nyerjük, hogy k -t l -lel maradékosan osztjuk, a hányadost leírjuk, majd a maradékot egy 0 számjeggyel kiegészítve újra és újra maradékos osztásokat végzünk. A maradékok a $0, 1, 2, \dots, l - 1$ számok lehetnek. Minden egyes megjelenő maradékhoz egy konkrét hányados s egy konkrét „következő” maradék tartozik, mellyel a következő maradékos osztást végezzük. Mivel a maradékok száma véges, előbb-utóbb egy már korábban fellépett maradékhoz jutunk; ez biztosítja a hányadosok, vagyis a számjegyek ismétlődését is.

A szükségesség bizonyítása nehezebb, nem is szerepel az első osztályos tankönyvben ([7]). Tételezzük fel, hogy az a szám

$$a = b_1 b_2 \dots b_r, b_{r+1} b_{r+2} \dots b_s c_1 c_2 \dots c_t c_1 c_2 \dots c_t \dots$$

alakba írható, ahol a b betűk a még nem ismétlődő, a c -k pedig a periodikus számjegyeket jelentik. Toljuk most el a tizedesvesszőt t számjeggyel jobbra, s a kapott számot jelöljük a' -vel! Láthatóan mind a , mind a' számjegyei az $(s+t+1)$. sorszámtól kezdve megegyeznek, innentől kezdve pedig mindkét számot c betűs blokkok alkotják. Ha kivonjuk a' -ből a -t, az eredményül kapott szám csupa 0-ra végződik, amit úgy is felfoghatunk, hogy ez a végtelen sok záró 0 nem is szerepel a számban, azaz $a' - a$ véges tizedestört. Tudjuk, hogy minden véges tizedestört egyben közönséges tört is, mivel felírható $m/10^n$ alakban. Mivel a' fenti előállítás voltaképpen a -nak a 10^t -szerezését jelentette, a következő összefüggést nyerjük: $m/10^n = a' - a = (10^t \cdot a) - a = a \cdot (10^t - 1)$, amiből az $a = \frac{m}{10^n \cdot (10^t - 1)}$ eredmény adódik. Tehát a racionális.¹ ■

Igazoljuk (1.2.)-t. Nyilván $\sqrt{n}$ racionális, ha n négyzetszám. Fordítva, tegyük fel, hogy n nem négyzetszám, ad absurdum $\sqrt{n}$ mégis racionális, mondjuk p/q alakú. Ebből az $n = p^2/q^2$ egyenlőséghez, majd az $n \cdot q^2 = p^2$ összefüggéshez jutunk. Mivel n nem négyzetszám, felírható $k^2 \cdot l$ alakban, ahol l különböző prímszámok szorzata (itt k n -nek a lehető legnagyobb négyzetszám osztója). Most $l \cdot k^2 q^2 = p^2$, a bal oldal prímfelbontásában az l -ben szereplő prímelek páratlan kitevőn szerepelnek, míg a jobb oldal prímfelbontásában minden prím kitevője szükségképpen páros. A számelmélet alaptétele szerint minden szám sorrendtől eltekintve csak egyféleképpen bontható fel prímhatalványok szorzatára, vagyis a fenti egyenlőség nem állhat fent. Ez az ellentmondás biztosítja, hogy $\sqrt{n}$ irracionális, ha n nem négyzetszám. ■

¹Az egyetlen probléma ezzel a bizonyítással, hogy természetesnek vesszük végtelen hosszú számjegysorozatok egymásból való kivonásának lehetőségét. A fenti gondolatmenet elemi analitikus módszerekkel teljessé tehető. További részletek olvashatók [15]-ben (35. o.).

1.2. Véletlen sorozatok

Önmagában az, hogy egy szám irracionális, nem vonja maga után számjegyeinek véletlenszerűségét. A $0,101001000100001000001\dots$ például nyilván nem lehet racionális, mert jegysorozata nem periodikus, de a számjegyek egyáltalán nem véletlenszerűek, sőt, könnyen megfogalmazható szabályosságot mutatnak.

Az irracionálisok között egészen biztosan vannak véletlenszerű számjegysorozattal rendelkezők. Egy papírlapra írjunk le egy 0-st, s mellé egy vesszőt. Vegyünk egy szabályos dobókockát, dobjunk vele néhányszor, a kapott számokat írjuk le sorban a vessző után, kivéve, ha 6-ost dobunk: ekkor 0-t írunk a papírra. Végtelen sok dobás után a létrejött 6-os számrendszerbeli szám biztosan irracionális lesz, mert teljesen kizárt, hogy periodicitás mutakozzék a számjegysorozatban.

Teljesen kizárt? Valójában nem. Annak a valószínűsége, hogy a fent kapott – számunkra nyilvánvalóan véletlenszerű – sorozatot egy újabb dobássorozattal pontosan ugyanúgy megkapjuk, 0. Az első dobáskor ugyanis $1/6$ valószínűséggel fogunk a fenti sorozat első dobásával azonos eredményt kapni, s a valószínűség minden egyes újabb dobás esetén ugyanúgy $1/6$ lesz. Az n . dobásnál $1/6^n$ valószínűséggel egyezik meg a két dobássorozat, de mivel végtelen sok dobást kell elvégeznünk, a valószínűség $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/6^n$, azaz 0. — Világos, hogy ugyanekkora valószínűséget kapunk szabályos sorozatok esetén is: bármely $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ sorozat kidobásának valószínűsége 0. Elképzelhető tehát, hogy valami furcsa véletlen folytán egy tökéletesen szabályos kockát feldobva mindig 6-ost dobunk. Ugyanolyan valószínű, mint bármely más dobássorozat: teljesen valószínűtlen.

Tekintsük együtt az összes lehetséges dobássorozatot! Készítsük el minden dobássorozathoz a fent leírt hozzá tartozó 6-os számrendszerbeli számot. Világos, hogy 0 és 1 közötti számokat kapunk: a 0-nak a csupa 6-os, az 1-nek a csupa 5-ös sorozat felel meg, hiszen 6-os számrendszerben $0 = 0, \dot{0}$ és $1 = 0, \dot{5}$. Nyilvánvalóan minden 0 és 1 közötti számot megkapunk így, sőt némelyeket többször is: az $1/2$ -et például $0,3\dot{0}$ és $0,2\dot{5}$ alakban is. Ez az utóbbi tény sajnos megakadályoz minket

abban, hogy a dobássorozatoknak kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltessük a $[0, 1]$ intervallumot.

Miért volna hasznos a kockadobásokat egyetlen valós számmal helyettesíteni? A valós számok sűrűségi viszonyait jól ismerjük: a racionális számok elenyésző kisebbségben vannak az irracionálisokhoz képest:

Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy a $[0, 1]$ intervallumon egy véletlenszerűen választott pont racionális, 0.* (1.3.)

Ellenben 1 valószínűséggel irracionális. Vajon mondhatjuk-e azt, hogy 1 valószínűséggel olyan számot választunk, amelyhez a köznapi értelemben véletlenszerű kockadobás-sorozat tartozik?

Ahhoz, hogy a kérdésre valamiféle választ adjunk, meg kell mondanunk, milyen tulajdonságú sorozatokat tekintünk matematikai értelemben véletlenszerűnek.

*

Bebizonyítjuk az (1.3.) állítást. Egy dimenziós geometriai valószínűséget fogunk számolni: összehasonlítjuk a $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ halmaz és a $[0, 1]$ intervallum hosszát. Az utóbbié nyilvánvalóan 1.

Soroljuk fel nagyság szerint az összes 0 és 1 közötti racionális számot a következő módon: először az 1 nevezőjűeket, majd a még fel nem sorolt 2 nevezőjűeket, majd a még fel nem sorolt 3 nevezőjűeket, s így tovább:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots$$

Világos, hogy egyetlen racionális számot sem fogunk kihagyni.

Definiáljuk a következő, egy adott ε hosszúságtól függő L_ε halmazt: Vegyünk fel olyan intervallumokat, melyek belsejében valahol rendre a fenti sorozat 1., 2., 3. stb. eleme áll, az intervallumok hossza pedig legyen $1 \cdot \varepsilon, 1/2 \cdot \varepsilon, 1/2^2 \cdot \varepsilon, 1/2^3 \cdot \varepsilon, \dots, 1/2^n \cdot \varepsilon, \dots$

Az egyes intervallumok között minden bizonynyal lesznek átfedések, ezért kijelenthetjük, hogy az L_ε halmazra jellemző „összhosszúság” legfeljebb $1 \cdot \varepsilon + 1/2 \cdot \varepsilon + 1/2^2 \cdot \varepsilon + \dots + 1/2^n \cdot \varepsilon + \dots$. Tudjuk azonban, hogy $1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^n + \dots = 2$, emiatt L_ε összhossza legfeljebb $2 \cdot \varepsilon$. Csakhogy tetszőleges ε hosszúság mellett $\mathbf{Q} \cap [0, 1] \subseteq L_\varepsilon$! Így – mivel ε akármilyen kicsiny hosszúságnak is választható – a 0 és 1 közötti racionális számokra jellemző *mérték* csak 0 lehet, mert ez az egyetlen olyan hosszúság, ami $2 \cdot \varepsilon$ -t nem haladja meg, akármekkora is az ε hosszúság.

A fentiek szerint a keresett valószínűség a 0/1 hosszúsági hányados alapján 0. ■

1.3. Statisztikus módszerek a véletlenszerűség tesztelésére

A $\sqrt{2}$ számjegyei első ránézésre nem sok szabályszerűséget mutatnak. A π első 32 jegyét vizsgálva azonban meglepő összefüggéseket figyelhetünk meg!

$$\pi = 3, 14159 \underline{26} 53589 \underline{79} \underline{32} \underline{38} 46 \underline{26} 43 \underline{38} \underline{32} \underline{79} 50 \dots$$

Az első ismétlődő kétjegyű szám a 26, melynek második előfordulása egy érdekes ismétlődési minta közepén található. Véletlen volna ez a szabályszerűség? A π számjegyeit sok további tizedesre megvizsgálták ([8], 51. o.), hasonlóan misztikus tulajdonságokat gyűjtve össze róla. Hogy kizárjuk a szubjektív emberi tényezőt, mechanikus módszereket kell alkalmaznunk a véletlenszerűség objektív megállapítására.

Az elemzésre igen sok módszer kínálkozik. Egyik sem lehet tökéletes. Tulajdonképpen a $\sqrt{2}$ és a π jegyeinek sorozata *nem* véletlenszerű, mert konkrét számolási szabály segítségével előállíthatjuk őket². Mégis úgy érezzük, egy véletlenszerűséget vizsgáló algoritmus helyesnek kellene, hogy tartsa mindkét

²Az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$ határértéke $\sqrt{2}$, a $b_1 = 4$, $b_{n+1} = b_n + \frac{(-4)^n}{2n+1}$ sorozat pedig π -hez tart, bár az utóbbi konvergencia nagyon lassú. Az a_n sorozat a Bevezetőben említett

sorozatunkat. Másrészt ha a „szabálytalanságot” ellenőrizni próbáljuk egy $A_1, A_2, \dots, A_n$ algoritmus-sorozattal, bizonyára konstruálható olyan sorozat, amely szándékosan azért készült, hogy ezen a konkrét n próbán sikerrel helytálljon, de akár ránézésre is nyilvánvalóan nem véletlenszerű.

D. E. Knuth [8]-ban statisztikai próbák egész sorát állítja fel. Ezek közül kettőt mi is részletesebben megvizsgálunk.

1.3.1. A χ^2 -próba

Tételezzük fel, hogy két egyforintost százszor feldobva 21-szer kaptunk két fejet, 23-szor két írást, a maradék 56 esetben pedig egy fejet és egy írást. Tudjuk, hogy a pénzfeldobás három lehetséges kimenetelének valószínűségei $1/4$, $1/4$ és $1/2$, tehát azt várnánk, hogy 25–25 illetve 50 alkalommal jelentkezzen a két fej és két írás, illetve az egy fej és egy írás. Mit mondhatunk a mérések alapján az egyforintos érméről: szabályosak vagy cinkeltek?

Biztos választ persze nem tudunk mondani. Lehetséges, hogy a pénzfeldobást folytatva, az első ezer összes dobásból 254 db dupla fej, 250 db dupla írás és 496 db vegyes dobásunk lesz. Ez megnöveli az egyforintosokba vetett bizalmunkat, hiszen a kapott gyakoriságok nagyon megközelítik a 250–250-es illetve 500-as várt gyakoriságot.

Igen ám, de nem lehetséges, hogy „túl szabályosak” a pénzérmék? Gyanakodni kezdenénk, ha felváltva kapnánk „fej–fej”, „fej–írás”, „írás–fej”, „írás–írás” kimeneteket. Ebben az esetben tökéletesen a várt gyakoriságokhoz jutunk. Ha a pénzérme 50–50%-kal esik az egyik illetve a másik felére, akkor a mért gyakoriságnak minden bizonnyal valamiféle normális mértékkel el kell térnie a várt gyakoriságtól.

Biztos válasz igazából soha nincs. A pénzérmék szabályosságának szükséges (de nem elegendő) feltétele, hogy n feldobásból a $k_{ff}(n)$, $k_{ii}(n)$ és $k_{fi,if}(n)$ kimeneteli

Newton-algoritmus, a b_n előállítás pedig az $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ ún. *Taylor-sorfejtésből* nyertük (l. [10], 421–424. o.).

statisztikákra a $k_{ff}(n)/n \rightarrow 1/4$, $k_{ii}(n)/n \rightarrow 1/4$ és $k_{fi,if}(n)/n \rightarrow 1/2$ konvergenciák teljesüljenek, ha $n \rightarrow \infty$. Márpedig véges sok mérés alapján a kimeneteli statisztikák sorozatainak határértékeiről (ha azok egyáltalán léteznek) semmit sem mondhatunk, végtelen sok mérést elvégezni pedig nem tudunk.

A χ^2 -próba abban segít bennünket, hogy jó biztonsággal döntsünk az egyforintos szabályosságáról.

Általánosságban ezt a statisztikai próbát olyan kimenetelsorozatok tesztelésére használják, ahol a kimenetek a $0, 1, 2, \dots, K-1$ számok, az ezekhez tartozó várt valószínűségek pedig a $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{K-1}$ értékek. Ha a tesztorozat n elemű, s a kapott gyakoriságok $k_0, k_1, \dots, k_{K-1}$, akkor először kiszámítjuk a

$$V = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(k_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

összeget. Ezután a kapott V érték alapján ha n elegendően nagy volt, az ún. χ^2 -táblázat segítségével dönteni tudunk a kimenetelsorozat és az ún. *a priori feltevés* illeszkedését illetően. A χ^2 -táblázat azt adja meg, hogy az a priori feltevésnek megfelelő összes lehetséges $k'_0, k'_1, \dots, k'_{K-1}$ kimenetelsorozat közül hány százalékban kaphatnánk a kapott V értéknél kisebb V' összeget. Világos, hogy ez a *százalékpontszám* minél közelebb van az 50%-hoz, annál biztosabb, hogy az illeszkedési kérdésre igennel kell válaszolnunk. A gyakorlatban fordítva, konkrét százalékpontszámokhoz adnak meg jellemző V értékeket az alábbi képlettel:

$$V = (K-1) + \sqrt{2(K-1)}x_p + \frac{2}{3}x_p^2 - \frac{2}{3},$$

ahol x_p a kérdéses p százalékpontszámból határozható meg a következő táblázat alapján:

p	1%	5%	25%	50%	75%	95%	99%
x_p	-2,33	-1,64	-0,675	0	0,675	1,64	2,33

A fenti számításokat végezzük el $n = 20000$ hosszú mintán mind a $\sqrt{2}$, mind a π századosjegyein! (Kettesével osztjuk fel az egymás utáni tizedesjegyeket, így nyerjük a 100-as számrendszerbeli felírást.) Tehát $K = 100$, a p_i valószínűségek mindegyike $1/100$, hiszen egyenletes eloszlást várunk. Az egyes gyakoriságok alapján a $V_{\sqrt{2}} = 97,885$ és $V_{\pi} = 110,920$ statisztikát kapjuk. A χ^2 -táblázat $K = 100$ értékre a fenti számítások alapján (a két szélső oszlop kivételével) az alábbi:

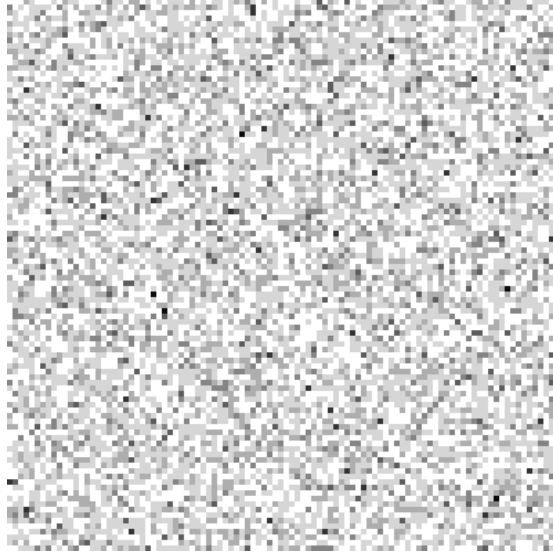
p	5%	25%	50%	75%	95%
V	75,14	88,78	98,33	107,88	121,52

Ezek szerint a $\sqrt{2}$ -re majdnem teljes bizonyossággal, a π -re nagy valószínűséggel mondhatjuk, hogy jegyei egyenletes eloszlást követnek. (A statisztikai gyakorlatban a 10% és 90% közötti százalékpontos statisztikákat elfogadhatónak tartják, az 5–10% és 90–95% értékűek „majdnem gyanúsak”, az 1–5% illetve 95–99% közötti statisztikák „gyanúsak”, az 1% alatti és 99% feletti statisztikákat pedig elvetik. A $\sqrt{2}$ -re kb. 50%, a π -re 80% pontszámot kaptunk.)

1.3.2. A spektrálpróba

Az egyenletes eloszlás a véletlenszerűség fontos, de nem kizárólagos jellemzője. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... sorozatban pl. az egyes kimenetek egyenletesen oszlanak el, de a sorozat nem véletlenszerű. Az ehhez hasonló szabályos sorozatok kiszűrésére egy egyszerű, de igen erős eszköz az ún. spektrálpróba, melynek lényege a következő:

Egy adott, legfeljebb n különböző értéket felvevő diszkrét sorozat egymás után következő elemeit egy $n \times n$ -es táblázatban jegyezzük fel. Kezdetben a táblázat minden rubrikájában a 0 szám áll. A sorozat első eleme sorszámu sor második elem oszlopszámu rubrikájába a benne lévónél eggyel nagyobbat (legelőször tehát 1-et) írunk, s ezt folytatjuk a 3. és 4., 5. és 6. stb., (n^2) . és $(n^2 + 1)$. elemre. (A próba egy variációja az, hogy az 1-es bejegyzésekből nem 2-esek, hanem ismét



1.1. ábra: A $\sqrt{2}$ spektrálpróbája

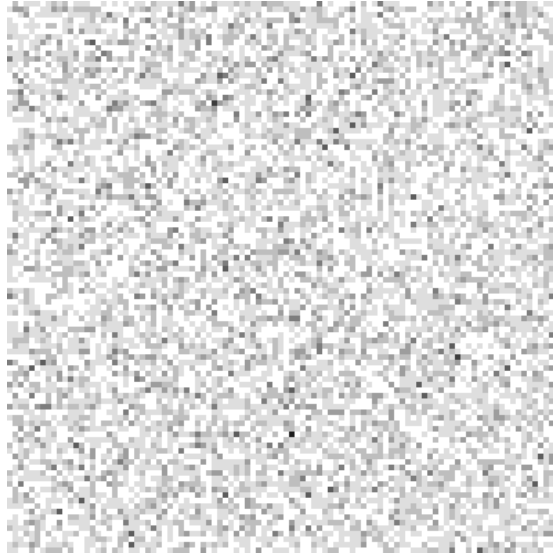
0-sok lesznek.)

Az 1.1. és 1.2. ábrán a $\sqrt{2}$ és a π első 40000, a tizedesvessző utáni jegyéből készített spektrálpróba látható³. A tizedesjegyeket kettesével osztottuk fel, így pl. az első esetben először a 41. sor 42. sorába, majd a 13. sor 56. oszlopába került a 0 helyére 1-es. A $\sqrt{2}$ tesztelésénél a rubrikákban megjelenő legnagyobb szám a 6-os, a π -nél a 7-es volt. A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyes gyakoriságok helyett a szürke szín árnyalatait használtuk, így pl. a 0 gyakoriság helyett fehér szín, 4-es gyakoriság helyett közészürke stb. látható.

Mit mondhatunk a véletlenszerűségről? Az ábrák alapján ez „szemmel látható”. Megerősítene bennünket a véletlenszerűség igenlésében, ha nem két, hanem három vagy több dimenzióban végeznénk el a próbát. (Három dimenzióban $n \times n \times n$ -es táblázatot kellene kitöltenünk hasonló módon.)

A teljes meggyőződéshez a véletlenszerűséget pontosan definiálnunk kéne, majd

³A két irracionális szám első 40000 jegyét a *MuPAD* komputeralgebra programmal állítottuk elő ([6]).



1.2. ábra: $A \pi$ spektrálpróbája

matematikai érveléssel igazolhatnánk állításainkat. A fenti két sorozat bonyolult analitikus elemzése helyett azonban inkább egy könnyebben vizsgálható sorozattípussal ismerkedünk meg.

1.4. Lineáris kongruenciasorozatok

A számítástechnikában gyakran alkalmaznak véletlenszámgenerátorokat. Sokféle gyakorlati alkalmazás igényel véletlen bemenő adatokat, ilyen például a természet jelenségeinek szimulációja, a számítógépes algoritmus-tesztelés és a mesterséges intelligencia egyes problémái (pl. a játékelmélet). A legtöbb programozási nyelvben rendelkezésre áll olyan függvény, mely „véletlenszerűen” veszi fel értékkészletét. Basic nyelven ilyen az `Rnd`, Pascalban a `Random(n)`, C nyelven a `random()` függvény. Az `Rnd` a $[0, 1)$ intervallumban⁴, a `Random(n)` az első n , a `random()` az első 2^k nemnegatív egész szám közül ad vissza egy elemet, ahol k az éppen használt operációs rendszer által maximálisan kezelt ún. *szóhossz* (bitben mérve).

⁴Ahány különböző Basic nyelvjárás, az `Rnd` függvénynek annyi különféle konkrét megvalósítása lehetséges.

Matematikai értelemben véletlenszámgenerátoron a nemnegatív egészen értelmezett függvényt értünk, melynek értékkészlete az első n nemnegatív egész egy bizonyos n -re. Látható, hogy egy `random()`-szerű $v : \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ véletlenszámgenerátorhoz el tudjuk készíteni az `Rnd`-hez hasonló $v'(x) = v(x)/n$ függvényt, ez utóbbi értékkészlete már a $[0, 1)$ intervallum. Ha egy $w' : \mathbf{N} \rightarrow [0, 1)$ függvény működik az `Rnd`-hez hasonlóan, akkor az ebből konstruált $w(x) = n \cdot w'(x)$ függvény `random()`-szerű véletlenszámgenerátor.

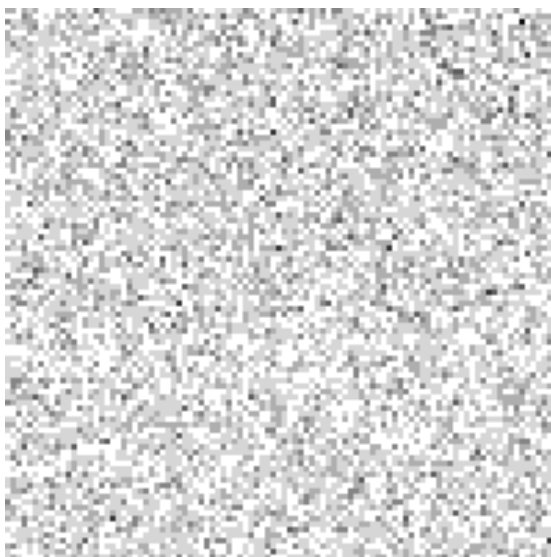
Szeretnénk, ha véletlenszámgenerátorunk egyszerűen működne, de a lehető legtöbb véletlenszerűségi próbán eredményesen helytállna. Az egyszerűségnek a legtöbbször nagy ára van: véletlenszámgenerátorunk periodikus lesz, azaz valamely $p \in \mathbf{N}$ -re $v(x) = v(x + p)$ teljesül majd minden x -re. A problémát azzal próbáljuk enyhíteni, hogy olyan függvényt keresünk, melynél p elegendően nagy.

Clive Sinclair, a '80-as években világhírűvé vált *Zx Spectrum* megalkotója a következő függvényt ([22], 57. o.) építette be számítógépébe: $z(x) = (75^x \bmod 65537) - 1$. Tehát 75^x (x nemnegatív egész) 65537-es maradékából egyet levonva kapjuk meg az x . véletlenszámot.

A periodicitással párhuzamosan felmerülhet a kérdés, hogy miért mondunk egy determinisztikus eljárást véletlenszerűnek. A *Zx Spectrum* újbóli bekapcsoláskor mindig az $x = 0, 1, \dots$ értékekre számolja ki a $z(x)$ függvényt, s emiatt egy konkrét program minden egyes bekapcsolás utáni első futtatáskor ugyanazokkal a véletlenszámokkal dolgozik. Ezen a problémán általában úgy segítenek, hogy a kezdő x -et nem 0-nak, hanem az aktuális gépidőt (pl. a pontos idővel kibővített dátumot) szimbolizáló, az operációs rendszer szóhosszának megfelelő nagyságrendű pozitív egésznek választják⁵.

Sinclair véletlenszámgenerátorának érdekessége az, hogy 16 bites bináris aritmetikával nagyon gyorsan számolható, hiszen $65537 = 2^{16} + 1$. $z(x)$ előbb-utóbb minden 0 és 65535 közötti egész számot fel fog venni, ugyanis a 75 hatványai sorra kiadják az összes 65537-nél kisebb, azzal relatív prím számot. Vegyük szemügyre a $z(x)$ függvényt az első néhány pozitív egész helyen!

⁵Basic-ben és Pascalban erre a `Randomize`, C-ben az `srandom(time())` utasítás szolgál.



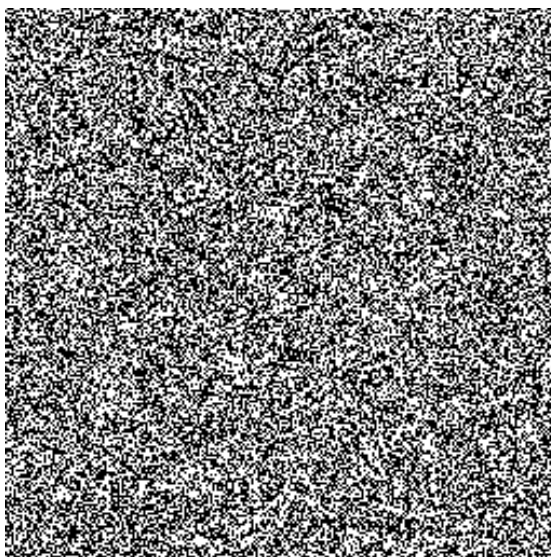
1.3. ábra: $z(x)$ spektrálpróbája 100-as számrendszerben

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z(x)$	74	5624	28652	51790	17641	12409	13231	9344	45504

A sorozat eleje véletlenszerűnek tűnik, ez folytatódik több, mint 60000 elemen át. Végül az $x = 65536$ esetben a ciklus kezdődik előlről: $z(65536) = z(0) = 0$. A fenti tulajdonságok következtében $z(x)$ egyenletes eloszlású. (A jelenség mélyebb okaira elemi számelméleti tételek adnak választ: a 65537 prím, a 75 pedig egy jól megválasztott szám, ún. *primitív gyök* modulo 65537 ([12], 77–86. o.).)

Végezzük el a spektrálpróba egy variációját a $z(x)$ függvényen! Először számítsuk ki $z(j)$ 10000-es maradékát, majd ennek első és utolsó két-két számjegyét használjuk fel sor- és oszlopszámként. A $j = 0, 1, \dots, 9999$ -re kapott grafikont az 1.3. ábra mutatja (a rubrikákban megjelenő legnagyobb szám a 7-es).

Mint 1.3.2.-ben, ismét 100-as számrendszerben számoltunk. Ha a próbának ugyanezt a variációját 256-os számrendszerben, $n = 256$ választással végezzük, az első 256^2 , azaz 65536 sor- és oszlopszám mind különböző lesz: a kapott grafikon mindenütt egyenletesen szürke 256×256 -os négyzettábla. Érdekesebb a grafikon, ha $z(x)$ -nek csak az első $65536/2$ tagját vesszük figyelembe. Az eredmény az



1.4. ábra: $z(x)$ spektrálpróbája 256-os számrendszerben
(a periódusnak csak az első fele)

1.4. ábrán látható.

Az 1982-ben korszerűnek mondott $z(x)$ függvény a mai alkalmazások számára általában elégtelen. Periódushossza viszonylag kicsi: a számok túl hamar ismétlődnek. Megmutatható, hogy a $v(x) = (g^x \bmod 2^{2^m} + 1) - 1$ véletlenszámgenerátor a Sinclair-féle függvény sok jó tulajdonságát örökli, ha a modulus prím, s g a modulusra nézve primitív gyök. ($m = 4$ esetén $v(x) = z(x)$.) Az $F(m) = 2^{2^m} + 1$ alakú számokat a számelméletben külön elnevezéssel illetik: ezek a Fermat-féle számok. Ismert, hogy az $m = 0, 1, 2, 3, 4$ esetekben $F(m)$ prímszámot ad, míg az eddigi összes vizsgált 4-nél nagyobb m -re $F(m)$ összetett. Emiatt Sinclair véletlenszámgenerátorának periódushosszát egyszerű módon nem tudjuk megnövelni.

*

A fenti $z(x)$ függvény egy, a számítástechnikában igen gyakran alkalmazott *lineáris kongruencia módszer* speciális esete. *Lineáris kongruenciasorozatnak* az $l(x) = a \cdot l(x - 1) + b \bmod n$ alakú függvényeket nevezzük, ahol $a, l(0), b$

és n előre adott nemnegatív egész számok ([8], 24. o.). A Sinclair-féle $z(x)$ függvényből képzett $z_1(x) = z(x) + 1$ függvény is lineáris kongruenciasorozat az $a = 75$, $l(0) = 1$, $b = 0$, $n = 65537$ paraméternégyes választásával.

Bebizonyítható (l. [8], 30–33. o.), hogy

Tétel. *Az a , $l(0)$, b és n paraméterekkel megadott lineáris kongruenciasorozat periódushossza akkor és csak akkor n , ha*

a) b és n relatív prímek;

b) n minden p prímosztójára teljesül, hogy $a - 1$ többszöröse p -nek;

c) ha n 4-gyel osztható, akkor $a - 1$ is. (1.4.)

Láthatóan $z_1(x)$ periódushossza $n - 1$, ami nem sokkal marad el a maximálisan elérhető hosszúságtól. Bebizonyítható (l. [12], 78–79. o.), hogy tetszőleges n prímszám modulushoz létezik olyan a szám, melyhez a $b = 0$ és tetszőleges $0 < l(0) < n$ paraméterekkel megkonstruált lineáris kongruenciasorozat $n - 1$ periódushosszú. Másképpen fogalmazva:

Tétel. *Minden prímmodulushoz létezik primitív gyök.* (1.5.)

1.5. Fibonacci típusú rekurziók

A periódushossz növelésének egyik lehetséges módja az lehet, hogy olyan $v(x)$ sorozatot választunk, melynek x . eleme nemcsak az $(x - 1)$., hanem az $(x - 2)$. elemtől is függ. Az ilyen típusú függvények közül legismertebb a Fibonacci-sorozat egy rögzített modulusra vonatkozó maradéka: $f(x) = f(x - 2) + f(x - 1) \bmod n$, ahol $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$. A gyakorlati vizsgálatok szerint azonban $f(x)$ egyetlen n -re sem elegendően véletlen, hiába ad általában n -nél hosszabb ciklust.

Green, Smith és Klem 1959-ben a $g(x) = g(x - K) + g(x - 1) \bmod n$ függvényt javasolták viszonylag nagy K egész számra. Egy bizonyos próbát konkrét K értékekre elvégezve azt találták, hogy a $K = 17$ esetben függvényük már

kellően véletlenszerű, míg 17-nél kisebb K -kra $g(x)$ nem mondható egyenletesen szabálytalannak.

Mitchell és Moore 1958-ban $g(x)$ -nél sokkal jobb függvényt konstruált. Legyen $m(x) = m(x - 24) + m(x - 55) \bmod n$, ahol n páros, továbbá $m(0), m(1), \dots, m(54)$ nem csupa páros, de különben tetszőleges pozitív egész számok. Ez a generátor számítógépen nagyon könnyen megvalósítható, csupán $m(x)$ utolsó 55 értékét kell nyilvántartani, s a számítás is roppant gyors, hiszen csak két pozitív egész szám összeadására van szükség. Ha $n = 2^k$ valamely pozitív egész k -ra, akkor a periódushossz $2^l \cdot (2^{55} - 1)$, ahol $0 \leq l < k$, s emiatt $m(x)$ a számítógépeken használt *lebegőpontos* törtszámokkal is megfelelően működik. Knuth elismerően ír $m(x)$ -ről: „Lehetséges tehát, hogy véletlenszámok gépi előállításának ez a legjobb módszere. Egyetlen ok miatt mégsem merjük tiszta szívből ajánlani...: szinte semmilyen elméleti alapunk nincs annak eldöntésére, mennyire véletlenszerűek az így kapott számok. Biztosan csak annyit tudunk, hogy a periódus igen hosszú; ez pedig kevés.” ([8], 41. o.)

1.6. Algoritmizálhatóság

A periodikus véletlen sorozatok szabályosságának filozófiai kérdéseivel számos tudós foglalkozott. Köztük *Per Martin-Löf* és *G. Chaitin* a '60-as évek végén az olyan n hosszú c_k ciklust tekintették véletlenszerűnek, amelyre teljesül a következő

Definíció. Tekintsük az n hosszú ciklusok C halmazát, s rögzítsünk egy konkrét programozási nyelvet. Minden $c_k \in C$ sorozathoz készítsük el az azt generáló lehető legrövidebb p_k programot: ezen programok halmazát jelölje P . Azt mondjuk, hogy c_k véletlenszerű, ha a p_k program maximális hosszúságú P -ben. (1.6.)

Martin-Löf a legtöbb programozási nyelvvel ekvivalens *Turing-gépet* jelölte meg programozási nyelvként. Bebizonyította, hogy az így definiált véletlen ciklusok

egyenletes eloszlásúak és *minden* (alkalmas módon értelmezett) statisztikai próbát pozitív eredménnyel zárnak ([8], 174. o.). Gyakorlati szempontból azonban ezek a ciklusok használhatatlanok: előállításuk költséges a programhossz maximális volta miatt. Emellett majdnem minden a gyakorlatban használt véletlenszámgenerátor az (1.6.) definíció értelmében a lehető legrosszabb, hiszen nagy periódushossz esetén igen fontos a generáló algoritmus rövideje.

*

Végül az 1.2. részben megfogalmazott valószínűségi kérdésre válaszolunk.

1. Gyakorlati szempontból csak az algoritmikusan, azaz számítógépes programmal előállítható véletlen sorozatok érdekelnek bennünket, ezek lehetnek periodikusak vagy periódus nélküliek.

Minden számítógépes program véges hosszúságú, azaz véges sok *karakterből* áll. Az egyes karakterek egy véges, k elemszámú *ábécéből* kerülnek ki. Az n karakterből álló, adott nyelvű számítógépes programok száma tehát k^n . Nem minden karaktersorozat ad azonban működőképes számítógépes programot. A működők közül számos egyáltalán nem generál semmilyen sorozatot, sok programnak egyáltalán nincs semmiféle outputja. Ellenben ugyanazt az eredményt több különböző karaktersorozat is produkálhatja.

Tekintsük a megadott nyelven írt 1 karakter hosszú, 2 karakter hosszú, 3 karakter hosszú stb. számítógépes programok egy rendezett p_j sorozatát ($j = 1, 2, \dots$)! Ennek a sorozatnak azt a legbővebb p'_j részsorozatát vizsgáljuk, amelyben lévő programok mindegyike véges vagy végtelen hosszú kockadobás-sorozatot állít elő. Rendeljük minden egyes p'_j programhoz a megfelelő $[0, 1]$ intervallumba eső, a p'_j által generált kockadobás-sorozathoz tartozó 6-os számrendszerbeli számot.

Az (1.3.) tétel bizonyításához hasonlóan megmutatható, hogy az ezen hozzárendeléssel kapott számok S sokasága a $[0, 1]$ intervallumhoz képest elenyésző: a kérdéses valószínűség pontosan 0. (Nyilvánvaló, hogy $S \supset \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.)

2. Elméleti szempontból érdekes lehet a fennmaradó, algoritmikusan nem előállítható, a $[0, 1]$ intervallumba eső számok véletlenszerűségének valószínűsége.

Szabályos kocka csak egyenletes számjegyeloszlást állíthat elő, míg az összes $0, \dot{0}$ és $0, \dot{5}$ közötti valós számok között egyenletes jegyeloszlásút találni csak 0 valószínűséggel fogunk. Valóban, az egyenletes eloszlású sorozatok E_1 halmazából ugyanis elkészíthetünk olyan egyenlő valószínűségű diszjunkt $E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$ halmazokat, melyek más-más jegyeloszlásokkal bírnak. (Egy lehetséges konstrukció lehet, hogy E_1 minden 1-es jegyét megduplázzuk – így nyerjük E_2 -t –, E_1 minden 1-es jegye helyett három egymás utáni 1-es írunk – így nyerjük E_3 -at stb.) Most ha E_1 valószínűsége valamely $\varepsilon > 0$ szám lenne, akkor $E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$ valószínűségei is mind-mind ε volnának, de ez lehetetlen, mert $\lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$ db diszjunkt halmaz valószínűségének összege nem haladhatja meg az 1-et.

Ha nem követeljük meg a kocka szabályos voltát, akkor a kérdéses valószínűség joggal 1-nek mondható. Egyrészt ugyanis egyetlen „szabálytalan” jegysorozatra sem illeszkedhet semmilyen szabályosság, mert minden szabályosságot algoritmikusan meg tudunk fogalmazni, s így elméletileg a megfelelő számítógépes program is elkészíthető. Másrészt pedig az algoritmizálhatóság kizárása elegendő ahhoz, hogy valamit szabálytalannak mondjunk.

Fent nyert eredményeinket foglaljuk össze a következő állításban:

Tétel. *Egyaránt 0 annak a valószínűsége, hogy egy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat*

a) periodikus,

b) algoritmikusan előállítható,

c) értékkészletét egyenletes eloszlással veszi fel.

(1.7.)

2. rész

Diszkrét dinamikus rendszerek

2.1. A káosz fogalma

A véletlenszerűség és a káosz jelensége összekapcsolódó fogalmak. Míg véletlenszámgenerátorokon bizonyos sorozatokat értettünk, a káoszelmélet rendszerint sorozatok egy adott típusának halmazát vizsgálja. 1.4.-ben például adott a , $l(0)$, b és n paraméterekkel megkonstruált lineáris kongruenciagenerátort elemeztünk. A kaotikus viszonyok feltárásakor $l(0)$ -t nem rögzítjük, hanem az összes lehetséges $l(0)$ érték mellett próbáljuk a sorozatok viselkedését *en bloc* megérteni.

Dinamikus rendszernek olyan generátort nevezünk, mely egy rögzített $\mathcal{U}$ halmaz A elemét egyértelműen egy $B \in \mathcal{U}$ elembe viszi. Ha fizikai jelenség modelljéről van szó, akkor feltételezhetjük, hogy a megfigyelt *rendszer* A és B *állapotai* között meghatározott kis $t > 0$ idő telik el: az állapotok időben izoláltak, azaz a rendszer *diszkrét*.

Gyakori példa dinamikus rendszerre a meteorológiai előrejelzés. Itt az $\mathcal{U}$ halmaz elemei az egyes lehetséges időjárási jellemzők összessége. Ez egy óriási halmaz, melyben az egyes – nagyon összetett – elemek egyértelműen leírják pl. a felhők pontos helyzetét, alakját, és számos más jellemzőt. Egy A időjárási állapotból számítással meghatározható az a B időjárási állapot, amely a következő perc viszonyait jellemzi, legalábbis elméletileg. (A gyakorlatban legfeljebb néhány száz

jellemző alapján készül egy A -t megközelítő A' becslés, melyből B -re is becslés adható.)

Mi a továbbiakban

Definíció. *Diszkrét dinamikus rendszeren egy $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{C}$ halmazon értelmezett $\mathcal{U}$ értékkészletű f függvényt értünk.* (2.1.)

Az A -t követő állapotot az $f(A) = B$ összefüggés adja; vizsgálatainkban az állapotok konkrét komplex számok lesznek. f -ről gyakran feltesszük majd, hogy folytonos, sőt, sokszor az $\mathcal{U}$ univerzumra $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{R}$ is fenn fog állni.

Konkrét $A \in \mathcal{U}$ esetén az $\{A, f(A), f(f(A)), f(f(f(A))), \dots\}$ halmazt az A -n átmenő *pályának* nevezzük. Ezen halmaz egyes elemeire rendre alkalmazni fogjuk még az $f^0(A)$, $f^1(A)$, $f^2(A)$, $f^3(A)$, $\dots$ jelöléseket is. Az A állapot f -nek *fixpontja* vagy *egyensúlyi pontja*, ha $f(A) = A$. Azt mondjuk, hogy az A pont f -nek *n -periodikus pontja*, ha n az a legkisebb pozitív egész, melyre $f^n(A) = A$. A -t *periodikus pontnak* nevezzük, ha n -periodikus valamely n -re.

További fogalmakat is bevezetünk.

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ halmaz *sűrű* az $\mathcal{U}$ halmazon, ha $\mathcal{X}$ -nek nincs izolált pontja, azaz nem adható meg olyan $X \in \mathcal{X}$ pont, melyhez volna olyan $\delta > 0$ távolság, amelyre bármely $U \in \mathcal{U}$ -ra $|X - U| > \delta$ fennállna.

Az $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ halmazt *nyílt*nek nevezzük, ha minden P pontjától egy P -től függő ε_P távolságban minden pont $\mathcal{X}$ -beli.

Legyen $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$, ekkor az $f(\mathcal{X})$ halmazon az $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} f(X)$ halmazt értjük.

Az f diszkrét dinamikus rendszert az $\mathcal{U}$ halmazon *topologikusan tranzitívnak* nevezzük, ha bármely nemüres $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}$ nyílt halmazokhoz van olyan n pozitív egész szám, melyre $f^n(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$.

Azt mondjuk, hogy az f diszkrét dinamikus rendszer *érzékenyen függ a kezdeti adatoktól* az $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ halmazon, ha ott f^n numerikusan nem közelíthető tetszőleges pontossággal — azaz ha van olyan pozitív δ szám, melyre bármely $X \in \mathcal{X}$ esetén X

akármilyen kicsiny $\mathcal{K}_X$ környezetében lévő egy $Y \in \mathcal{K}_X$ pontra $|f^n(X) - f^n(Y)| > \delta$ fennáll valamely pozitív egész n -re. (Itt δ olyan szám, amekkora hibánál kisebbet semmiképpen sem garantálhatunk f közelítő kiszámítása esetén.)

*

Ezen hosszú bevezető után definiálhatjuk, mikor mondunk egy diszkrét dinamikus rendszert kaotikusnak. A következő definíciót *Devaney* adta [3]-ban; léteznek más, ehhez hasonló definíciók is, pl. 2.4.-ben bemutatunk majd egy ettől eltérő megközelítést.

Definíció. *Egy folytonos, diszkrét dinamikus rendszer kaotikus az $\mathcal{U}$ halmazon, ha ott*

- (1) *topologikusan tranzitív,*
 - (2) *periodikus pontjainak halmaza sűrű,*
 - (3) *érzékenyen függ a kezdeti adatoktól.*
- (2.2.)

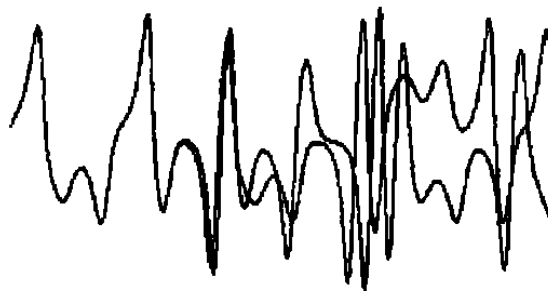
A kaotikus tulajdonság szemléletesen azt jelenti, hogy a rendszer nem periodikus pontjai véletlenszerű pályát futnak be, s a pályák közelítéssel való becslése lehetetlen.

Banks és munkatársai [2]-ben megmutatták, hogy

Tétel. $\mathcal{U} = \mathbf{C}$ esetén (1) és (2) maga után vonja (3)-at is. (2.3.)

(Az eredeti állítás ennél igazából többet állít: $\mathcal{U}$ tetszőleges *metrikus tér* lehet.) Kaotikus jelenség kimutatásához tehát elegendő (1) és (2) fennállását igazolni. *Assaf IV és Gadbois* azt is igazolták, hogy a (2.2.) definícióban (3) az egyetlen redundáns elem, vagyis általában (1)-nek és (3)-nak nem logikai következménye (2), s együttesen (2)-ből és (3)-ból sem következik (1) ([1]). *Vellekoop és Berglund* [21]-ben bebizonyították, hogy ha $\mathcal{U}$ egy – véges vagy végtelen – intervallum, akkor (1) fennállásából (2) is következik, tehát

Tétel. *Egy $\mathcal{U}$ intervallumon értelmezett diszkrét dinamikus rendszer akkor és csak akkor kaotikus, ha topologikusan tranzitív.* (2.4.)



2.1. ábra: Lorenz előrejelzése
(a grafikon a t_2 és t_1 közötti időhöz tartozó állapotokat mutatja)

2.2. Véletlen sorozatok és a káosz I.

A káoszkutatás egyik fontos pillanata volt, amikor *Lorenz* amerikai meteorológus 1961-ben észrevette, hogy a hosszútávú előrejelzését leíró dinamikus rendszer érzékenyen függ a kezdeti adatoktól. Számításait egy t_1 időponthoz tartozó állapotnál félbehagyta, majd a számítást egy $t_2 (< t_1)$ időponthoz tartozó állapotnál igen kicsi kerekítési hibával újakezdte. Az előrejelzés egy idő után teljesen megváltozott, ahogyan ez a 2.1. ábrán is látható ([18]). Lorenz 12 paraméteres rendszerének bonyolultsága miatt ez talán nem is olyan meglepő. Az igazán furcsa az, hogy gyakran a legegyszerűbb *dinamikák* is kaotikusak: a jelenségek oka tehát nem a rendszerek bonyolultságában keresendő.

*

Az 1.4. fejezetben vizsgált lineáris kongruenciagenerátorok értékkészletüket diszkrét halmazon vették fel. Ellenben a káoszelméletben olyan dinamikus rendszereket vizsgálunk, melyek legalább *megszámlálhatóan végtelen* halmazon értelmezettek, egyébként a (2) és (3) feltételeket nem tudjuk értelmezni.

A lineáris kongruenciagenerátorok könnyen kiegészíthetők folytonos függvényé. A $b = 0$ esetet fogjuk részletesen megvizsgálni. Nyilván az $\mathcal{U} = [0, n)$ halmazon értelmezett $g(x) = ax$ függvény folytonos $\mathcal{U}$ -n, s induló állapotként $l(0)$ -t választva a generátort majdnem tökéletesen jellemző diszkrét dinamikus rend-

szert konstruáltunk. Azért csak „majdnem”, mert a generátor egészen pontosan a $g'(x) = ax \bmod n$ iterációval írható le, ami viszont az $a > 1$ esetben nem lesz folytonos ($a, n \in \mathbf{N}$). (Sőt, g értékészlete bővebb $\mathcal{U}$ -nál, vagyis nem is dinamikus rendszer. $\mathcal{U}$ -nak mindenképpen tartalmaznia kéne $[0, \infty)$ -t.)

A problémát úgy küszöböljük ki, hogy kétdimenziós Υ halmazzal választunk állapothalmazzal: a komplex sík egységkörét. Kölsönösen egyértelműen megfeleltetjük $\mathcal{U}$ -t Υ -nak: x -hez rendeljük hozzá $\cos(x \cdot 2\pi/n) + i \cdot \sin(x \cdot 2\pi/n)$ -t! Ebben az esetben a $g''(x) = ax \bmod 2\pi$ egydimenziós nemfolytonos dinamikát a $\gamma(\xi) = \xi^a$ kétdimenziós folytonos dinamika reprezentálja, ahol $\arg \xi = x \cdot 2\pi/n$. (Itt felhasználtuk azt, hogy a $\xi = \cos x + i \cdot \sin x = e^{ix}$ összefüggés miatt $\cos ax + i \cdot \sin ax = e^{iax} = (e^{ix})^a$, azaz bármely 1 abszolútértékű komplex szám argumentumának konstanssal való szorzása hatványozást jelent.)

Megmutatjuk, hogy $\gamma(\xi)$ kaotikus Υ -on, feltéve, hogy $a > 1$ pozitív egész.

Először γ topologikusan tranzitív voltát igazoljuk. Legyenek $\mathcal{X} \subseteq \Upsilon$ és $\mathcal{Y} \subseteq \Upsilon$ tetszőleges nyílt halmazok; világos, hogy $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ az egységkör egy-egy – végpontokat nem tartalmazó – íve. Egyik halmaz sem lehet üres. Ha $\mathcal{X}$ hosszát $|\mathcal{X}|$ jelöli, akkor általában $|f(\mathcal{X})| = a \cdot |\mathcal{X}|$, mivel f az $\mathcal{X}$ ív hosszát a -szoros hosszúságúra nyújtja. Ha $|f^k(\mathcal{X})| \leq 2\pi/a$, akkor nyilván $|f^{k+1}(\mathcal{X})| = a \cdot |f^k(\mathcal{X})|$, ellenkező esetben pedig $|f^{k+1}(\mathcal{X})| = 2\pi$. Világos, hogy $a > 1$ miatt az $|f^k(\mathcal{X})|$ számsorozat k növekedtével előbb-utóbb eléri 2π -t, de ekkor $f^k(\mathcal{X}) = \mathcal{U}$ is fenn fog állni, s így $f^k(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y} = \mathcal{U} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \neq \emptyset$ is teljesül.

Másodszor megmutatjuk, hogy γ periodikus pontjai sűrűn helyezkednek el az egységkörön. Mely ξ komplex számok lesznek γ n -periodikus pontjai? A

$$\gamma^n(\xi) = \gamma^{n-1}(\gamma(\xi)) = \gamma^{n-1}(\xi^a) = \gamma^{n-2}(\gamma(\xi^a)) = \gamma^{n-2}(\xi^{a^2}) = \dots = \xi^{a^n}$$

összefüggés miatt $\gamma^n(\xi) = \xi$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\xi^{a^n} = \xi$; mivel $\xi \neq 0$, ez ekvivalens azzal, hogy $\xi^{a^n-1} = 1$ (leosztottunk ξ -vel). Láthatóan ξ pontosan akkor n -periodikus pont, ha $(a^n - 1)$. komplex egységgyök. — n növekedtével azonban az $(a^n - 1)$. egységgyökök (amelyekből pontosan $a^n - 1$ db van, egymástól

$2\pi/(a^n - 1)$ ívhossz távolságra) egyre sűrűbben helyezkednek el az egységkörön: a köztük lévő távolság tetszőleges előre adott $\varepsilon > 0$ ívhossznál is kisebb lehet, ha n elegendően nagy.

Végül a (2.3.) tételt alkalmazzuk¹, s ezzel bebizonyítottuk, hogy

Tétel. *Az $a > 1$, $b = 0$ paraméterű lineáris kongurenciasorozat természetes folytonos kiterjesztéseként adódó diszkrét dinamikus rendszer kaotikus a $[0, n)$ intervallumon.* (2.5.)

2.3. Tésztagyúrás, kártyakeverés

Tekintsük a

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x < 1/2, \\ 2 - 2x, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

az $\mathcal{U} = [0, 1]$ intervallumon értelmezett dinamikus rendszert. T sokban hasonlít az előző szakaszban ismertetett g'' dinamika $a = 2$ speciális esetéhez. A fő különbség az, hogy T folytonos a $[0, 1]$ -en.

Jelen függvényünk a hétköznapi téstagyúrási eljárásnak egy lépését takarja. Valóban, ha ugyanis egy mazsolát dobunk a téstának megfeleltetett $[0, 1]$ intervallum egy tetszőleges pontjára, akkor a gyúrás során először kétszeresére nyújtjuk a téstát: az x pontban lévő mazsola a $2x$ pontba kerül, majd ha $2x$ túlságosan „elől van” a kinyújtott téstában, akkor „visszahajtjuk”. Minden egyes $[0, 1]$ -beli x -re elvégezve a lépést, látható, hogy T egy iterációja éppen a „nyújtás-félbehajtás” eljárás matematikai megfogalmazása.

Könnyen megmutatható, hogy T topologikusan tranzitív: γ -hoz hasonlóan T minden nyílt intervallum hosszát megduplázza, ha az eredetileg az egységnyi hosszúság

¹(3) könnyen igazolható közvetlenül is, l. [23]-at (28–29. o.).

felénél nem volt nagyobb (ellenkező esetben pedig a $[0, 1]$ intervallumot kapjuk). (2.4.) alapján tehát kijelenthetjük, hogy T kaotikus a $[0, 1]$ -en. Ez azt az évezredes tapasztalatot is alátámasztja, hogy a szokásos tésztagyúrási eljárás tényleg alaposan kever.

*

T egy nemfolytonos hasonmása az a kártyakeverő gép, mely egy $2n$ elemű paklit a következő módon tud megkeverni:

$$K(1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n) = (2n, 1, 2n-1, 2, \dots, n+1, n).$$

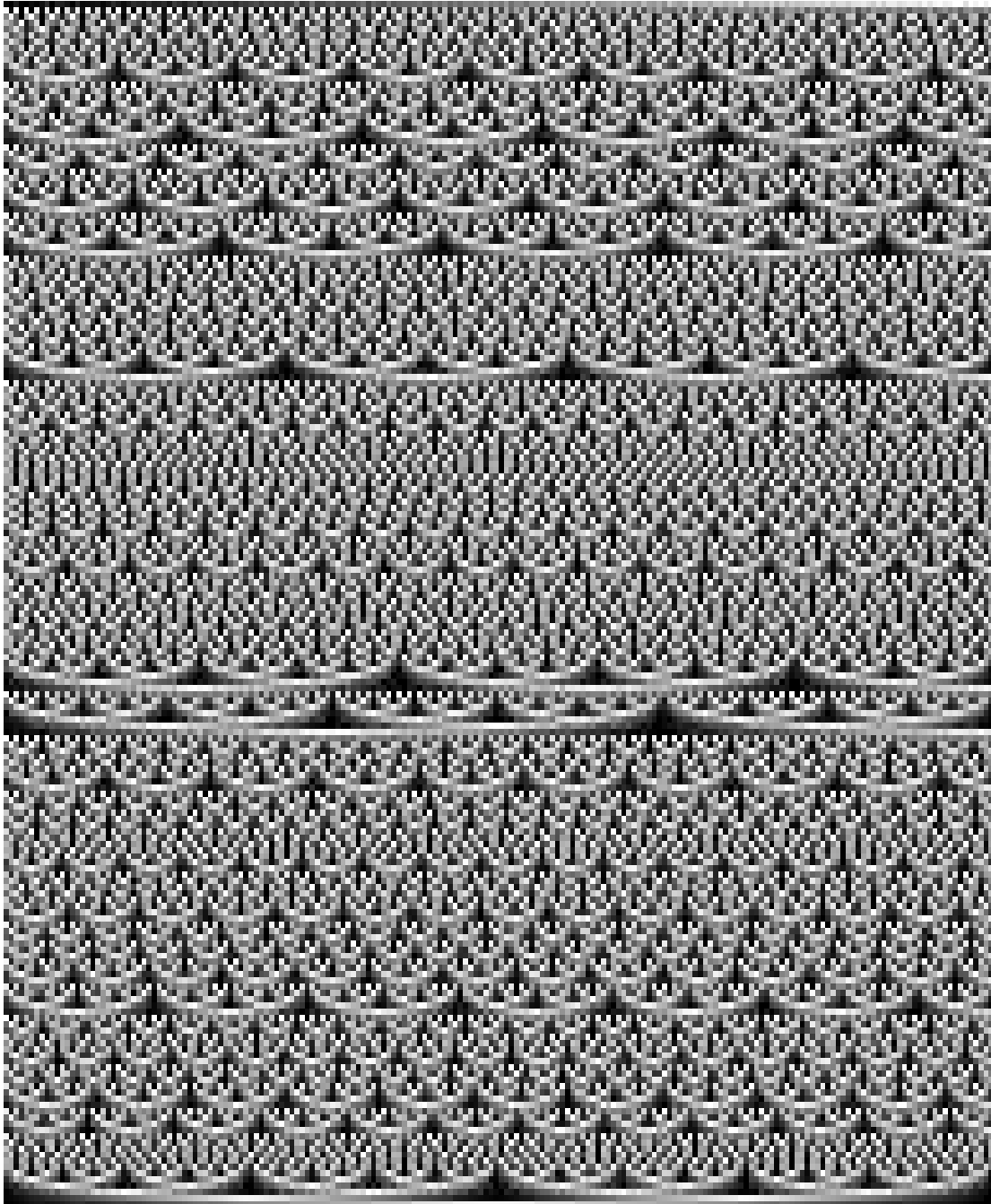
K kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az $\{1, 2, \dots, 2n\}$ halmaz elemei között, míg ez T -ről nem mondható el.

Nézzünk egy konkrét példát! Legyen $n = 3$, ekkor az $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ -on átmenő pálya: $\{(1, 2, 3, 4, 5, 6), (6, 1, 5, 2, 4, 3), (3, 6, 4, 1, 2, 5), (5, 3, 2, 6, 1, 4), (4, 5, 1, 3, 6, 2), (2, 4, 6, 5, 3, 1)\}$, vagyis a sorozat periódushossza 6.

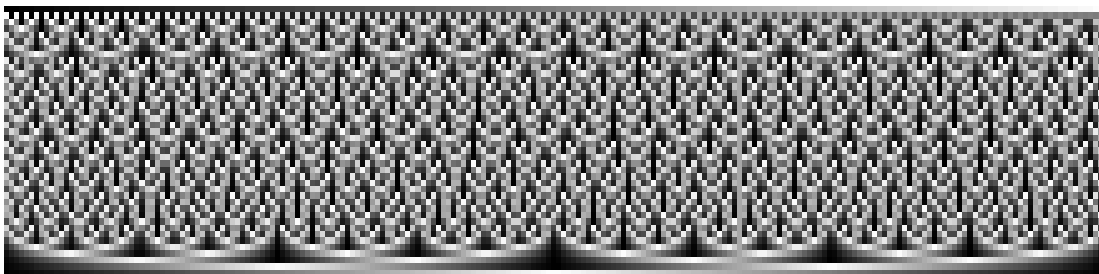
Könnyen belátható, hogy ha $n = 2^m$, akkor a periódushossz $m+1$. Más n -ek esetén a periódus hossza rendszerint nagyobb, teljesen szabálytalannak tűnik, ám soha nem haladja meg $2n$ -et ([13]), amint ezt *Pap Gyula* nemrégiben bebizonyította (publikálatlan). Bizonyos n -ek esetén a periódushossz éppen $2n$, az összes ilyen 50-nél nem nagyobb n : 1, 3, 9, 13, 15, 25, 37, 43, 45, 49.

Az $n = 97$ és $n = 110$ eseteket a 2.2. és 2.3. ábra mutatja. Az egyes kártyalapokat a szürke szín egyre világosabb árnyalatai jelzik. Az ábrák felső sora egy, a feketéből a fehérbe haladó csíkot takar: ez az alapállapot, a kártyák $(1, 2, 3, \dots, 2n)$ sorrendje. A következő sorokban az egyes iterált kártyasorozatokat láthatjuk egészen addig, míg el nem jutunk a $(2, 4, 6, \dots, 2n, 2n-1, \dots, 5, 3, 1)$ sorrendhez, mely után nyilvánvalóan ismét a kiinduló állapot következik.

Definiálhatunk K -hoz nagyon hasonló kölcsönösen egyértelmű függvényeket is, amelyek páratlan sok kártyalap keverésére is alkalmasak. A dinamikus rend-



2.2. ábra: $K(x)$, az $n = 97$ eset
(a periódushossz: 194)



2.3. ábra: $K(x)$, az $n = 110$ eset
(a periódushossz: 42)

szer működése ilyen esetekben K -val sok egyezést mutat. K és rokonai tulajdonságainak szigorú matematikai bizonyítása azonban még sok részletkérdésben tisztázatlan.

2.4. Véletlen sorozatok és a káosz II.

A (2.2.) definíciónál említettük, hogy a káoszt másképpen is meghatározhatjuk. Az 1. részben bemutatott véletlen sorozatokkal természetesebb összefüggésbe hozható sok dinamikus rendszer, melyre érvényes az alábbi

Definíció. Egy f diszkrét dinamikus rendszer kaotikus $\mathcal{U}$ -n, ha $\mathcal{U}$ valamely rögzített $\mathcal{X}$ részhalmazára bármely 0-ból és 1-ből álló $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ tetszőlegesen hosszú sorozathoz létezik olyan $X \in \mathcal{X}$ úgy, hogy $f^k(X) \in \mathcal{X}$ akkor és csak akkor, ha $a_k = 1$ ($0 \leq k \leq n$). (2.6.)

Más szavakkal: a dinamikus rendszer (ami egyébként determinisztikus) olyan véletlenszerű jelenséget mutat, mint a pénzfeldobás ([9], 27. o.). Itt pl. a 0-k szimbolizálhatják a fejeket, 1-esek az írásokat — tetszőleges előre adott 0–1-sorozathoz tudunk adni olyan kezdőállapotot, amelynek iteráltjai a megfelelő sorrendben esnek bele az $\mathcal{X}$ halmazba vagy $\mathcal{U} \setminus \mathcal{X}$ -be.

Állítás. Az $a = 2, b = 0$ paraméterű lineáris kongurenciasorozat természetes folytonos kiterjesztéseként adódó diszkrét dinamikus rendszer a (2.6.) értelemben is kaotikus a $[0, n)$ intervallumon. (2.7.)

(2.7.) igen könnyen bizonyítható, mondhatni, a (2.6.) definíció legtermészetesebb példája. Vegyük ugyanis a fentivel ekvivalens

$$g'''(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x < 1/2, \\ 2x - 1, & \text{ha } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

dinamikus rendszert, s az $\mathcal{X} = [1/2, 1)$ intervallumot. Világos, hogy a $0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ kettes számrendszerbeli szám g''' szerinti iteráltjai a $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n, 0, a_2 a_3 a_4 \dots a_n, 0, a_3 a_4 a_5 \dots a_n$ stb. számok lesznek, s ez éppen azt jelenti, hogy $g'''^k(0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n) \in \mathcal{X}$ pontosan akkor teljesül, ha $a_k = 1$ ($0 \leq k \leq n$). ■

Bonyolultabb igazolni az előző szakaszban definiált T iterációra vonatkozó állítást.

Állítás. T a (2.6.) értelemben is kaotikus a $[0, 1]$ intervallumon. (2.8.)

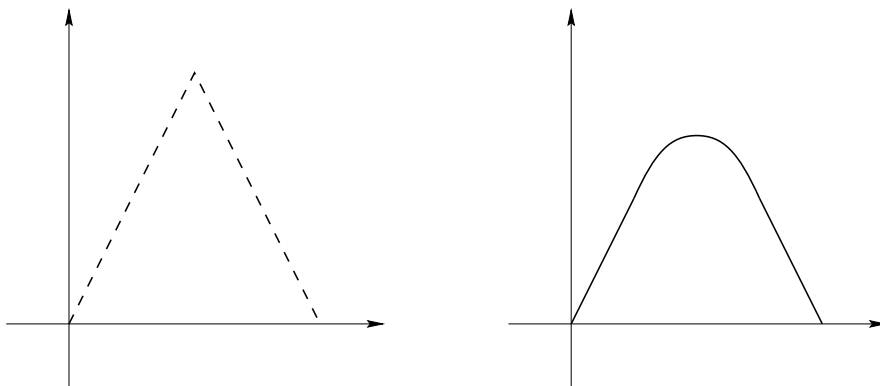
A definícióban előírt $\mathcal{X}$ halmaz szerepét most az $[1/2, 1]$ intervallum játssza. A bizonyítás abból áll, hogy az előre adott $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ sorozathoz megkonstruálunk egy megfelelő X kettes számrendszerbeli számot. Ha az $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ sorozatot tekintjük, akkor egy egész $\mathcal{I}_n$ intervallum rendelkezni fog azzal a tulajdonsággal, hogy bármely $X \in \mathcal{I}_n$ és k esetén $T^k(X) = \mathcal{X}$ pontosan akkor áll fenn, ha $a_k = 1$ ($0 \leq k \leq n$). Megmutatjuk, hogy $\mathcal{I}_n \supset \mathcal{I}_{n+1} \supset \emptyset$, melyből a kívánt X létezése bizonyított. Gondolatmenetünk a teljes indukció módszerén alapul.

Valóban; az első $\mathcal{I}_0$ intervallum $\mathcal{X}$, ha $a_0 = 1$ ill. $\mathcal{U} \setminus \mathcal{X}$, ha $a_0 = 0$. Tételezzük fel, hogy $\mathcal{I}_n$ már ismert, követelményeinknek megfelel, sőt n . iteráltja a teljes $\mathcal{X}$ vagy $\mathcal{U} \setminus \mathcal{X}$ halmaz; ebből akarjuk előállítani $\mathcal{I}_{n+1}$ -et. Nyilván ha $\mathcal{I}_{n+1} \subset \mathcal{I}_n$ fennáll, akkor minden $X \in \mathcal{I}_{n+1}$ szám első n iteráltja $\mathcal{X}$ -be vagy $\mathcal{U} \setminus \mathcal{X}$ -be esik attól függően, hogy az egyes a_k számok mit írnak elő ($0 \leq k \leq n$). Két esetet különböztetünk meg:

1. Ha $a_n = 0$, akkor az indukciós feltevés miatt $T^n(\mathcal{I}_n) = \mathcal{U} \setminus \mathcal{X}$. Ebből következően $T^{n+1}(\mathcal{I}_n) = \mathcal{U}$.
 - (a) Ha $a_{n+1} = 0$, akkor $T^{n+1}(\mathcal{I}_{n+1}) \subseteq \mathcal{U} \setminus \mathcal{X}$ is fenn kell, hogy álljon; ennél mi még többet szeretnénk: a tartalmazás helyett egyenlőséget. Világos, hogy a $T^{n+1}(\mathcal{I}_{n+1}) = [0, 1/2)$ összefüggés igaz lesz, ha $\mathcal{I}_{n+1}$ -et $\mathcal{I}_n$ -ből úgy konstruáljuk meg, hogy azokat az $Y \in \mathcal{I}_n$ -eket, melyekre $T^{n+1}(Y) \notin \mathcal{U} \setminus \mathcal{X}$, $\mathcal{I}_n$ -ből egyszerűen elhagyjuk. $\mathcal{I}_{n+1} \neq \emptyset$, mert $\mathcal{I}_n$ elemei „felének” $(n+1)$. iteráltja $\mathcal{X}$ -be, a másik „felé” pedig $\mathcal{X}$ -en kívül esik.
 - (b) Ha $a_{n+1} = 1$, akkor a $T^{n+1}(\mathcal{I}_{n+1}) = \mathcal{X}$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathcal{I}_{n+1}$ megkonstruálásakor $\mathcal{I}_n$ -ből elhagyjuk azokat az Y elemeket, melyekre $T^{n+1}(Y) \notin \mathcal{X}$. Világos, hogy itt is $\mathcal{I}_{n+1} \neq \emptyset$.
2. Az $a_n = 1$ esethez teljesen hasonlóan járunk el. Most $T^n(\mathcal{I}_n) = \mathcal{X}$, s ismét $T^{n+1}(\mathcal{I}_n) = \mathcal{U}$. Az (a) és (b) pontokban leírt konstrukciós lépések szó szerint átvihetők. ■

A fenti eljárás nem határozza meg, hogy konkrét $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ sorozathoz milyen X bináris számot válasszunk. Megmutatható, hogy az esetek nagy részében az $X = 0, b_0 b_1 b_2 \dots b_n$ választás megfelelő, ahol $b_k = 1$ pontosan akkor, ha az $a_0 a_1 a_2 \dots a_k$ sorozatban páratlan sok 1-es számjegy szerepel.

Lássunk néhány példát! Ha az előírási sorozat 101101, akkor az $X = 0,110110$ szám tízes számrendszerben az $54/64$, $10/32$, $10/16$, $2/8$, $1/2$ pályakezdetet generálja, amely valóban megfelel az előírásnak. A 011100 sorozathoz az $X = 0,010111$ bináris szám tartozik, melynek pályája a $23/64$, $23/32$, $9/16$, $1/8$, $1/4$ tízes számrendszerbeli számokkal indul, ez ismét csak megfelelő. Azonban az 10 előírási sorozathoz tartozó $X = 0,11$ kettes számrendszerbeli szám pályájának első két tagja $3/4$, $1/2$: az utóbbi nem teljesíti az előírást. Az ilyen problémás esetekben a fenti szabályt kicsit módosítani kell: egy X -hez elég közeli X' szám már teljesíteni fogja az előírási szabályt, itt például az $X' = 0,111$ bináris szám megfelelő (a pálya a $7/8$, $1/4$ számokkal indul).



2.4. ábra: Az eredeti és a „behorpasztott” $T(x)$ függvény

2.5. A logisztikus görbe

Egy igazán érdekes kaotikus jelenségre bukkanunk, ha T grafikonjának csúcsát egy kissé „behorpasztjuk”, törésmentessé: *differentiálhatóvá* téve az újonnan keletkezett függvényt (2.4. ábra).

A logisztikus görbe nem ez, hanem az $L(x) = \lambda \cdot x(1 - x)$ parabola, ez a két függvény nagyon hasonlít egymáshoz iteratív tulajdonságokban is. L nyilván átmegy az origón és az $(1; 0)$ ponton, továbbá az $(1/2; \lambda/4)$ ponton is.

L első vizsgálata *Verhulst* nevéhez fűződik, ő vette észre 1845-ben, hogy bizonyos állatpopulációk éves változását L -hez hasonló kvadratikus iterációk írják le. A $g(x) = ax$ lineáris iteráció a $g^n(x) = a^n x$ exponenciális alakot ölti, akár csak a kamatoskamat-számítási képlet, ahol a a kamatláb, n pedig a befektetés óta eltelt időszakok (pl. évek) száma. Verhulst munkássága előtt a populációk növekedését a kamatoskamathoz hasonló módon számították. A probléma ez utóbbival az volt, hogy véges életterület nem fogadhat be végtelen sok egyedet. Nyilván egy elegendően sokáig kamatozó pénzösszeg tetszőlegesen nagyra nőhet, bolygónkon (vagy annak egy bizonyos részén) viszont csak véges sok élőlény számára van hely, ha feltételezzük, hogy létezik minimális egyedméret (ez konkrét faj esetén nyilván teljesül).

1963-ban Lorenz felfedezte, hogy pontosan $L(x)$ írja le egyes folyamatok bi-

zonyos aspektusait, ha $\lambda > 2$. Azóta a lézerfizikában, hidrodinamikában, a kémiai reakciók mozgástanában végzett elméleti munka alátámasztotta Verhulst törvényének gyakorlati létjogosultságát is ([14], 6. o.).

Függvényünk egy igen részletes elemzése megtalálható [9]-ben, itt csak utalunk az ottani eredményekre. Nagy szerepet játszanak L periodikus pontjai és az ezekhez egyre közelítő nemperiodikus sorozatok.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat a $p_1, p_2, \dots, p_n$ határciklushoz közelít, ha minden $1 \leq m \leq n$ pozitív egészre $a_{l \cdot n + m} \rightarrow p_m$, ha $l \rightarrow \infty$. (2.9.)

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat a $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ határpályához közelít, ha $l \rightarrow \infty$ esetén $a_l \rightarrow p_l$. (2.10.)

L iteráltjait fogjuk vizsgálni $0 < \lambda \leq 4$ esetén.

1. A $0 < \lambda \leq 1$ esetben egyetlen periodikus pont van: a 0 fixpont. A pályaelemek sorozata ehhez a fixponthoz konvergál. Ennek az az oka, hogy az $y = L(x)$ függvény csak az origóban pontban metszi az $y = x$ függvényt.
2. Ha $1 < \lambda \leq 3$, akkor szintén egyetlen periodikus pont van: $(\lambda - 1)/\lambda$, ez fixpont. A 0-t és az 1-et tartalmazó pályáktól eltekintve minden pályasorozat ehhez tart, amint $n \rightarrow \infty$. A konvergenciának az a magyarázata, hogy az $y = L(x)$ és az $y = x$ függvény egyetlen pontban, 45° -nál kisebb szögben metszik egymást, és a pályaelemek ehhez a metszésponthoz közelítenek.
3. Ha $\lambda > 3$, a konvergens viselkedés megszűnik. A két függvény 45° -nál nagyobb szögben metszi egymást, így (fixponthoz tartó) konvergenciáról nem lehet szó. Léteznek viszont n -periodikus pontok, melyeket a többi pálya elemei (néhány pálya itt is kivétel) fokozatosan megközelítenek:
 - (a) Ha $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$, akkor két periodikus pont van, ezek szintén λ -tól függenek. A pályasorozatok az ezen két periodikus pontból álló határciklushoz közelítenek.

- (b) A $1 + \sqrt{6} \approx 3,449 < \lambda \leq 3,544\dots$ esetben 4, a $3,544\dots < \lambda \leq 3,564\dots$ esetben 8, a $3,564\dots < \lambda \leq 3,568\dots$ esetben 16 periodikus pont van, s ez így megy újabb és újabb 2-hatvány hosszú határciklusokkal a végtelenségig, míg λ el nem éri a bűvös $3,569945672\dots$ számot.

A $\lambda = 3,569945672\dots$ paraméternél tulajdonképpen nincsen határciklus: a pályák állapotелеmei teljesen véletlenszerűen váltakoznak. Ez azért nem teljesen igaz, mert a pályasorozatok egy idő után határozottan az $[1/4, 19/20]$ intervallumon belülre esnek, s $0,6$ és $0,8$ között pedig egyáltalán nincsenek elemek. Úgy tűnik, a dinamikát most nem egy véges ciklus, hanem a $[0, 1]$ intervallum egy végtelen sok pontból álló részhalmaza irányítja, melynek elemei valahol $0,25$ és $0,6$ illetve $0,8$ és $0,95$ között helyezkednek el.

A $3,569945672\dots$ és 4 közötti értékekhez tartozó dinamikus rendszerek között nagyon sokféle viselkedésű található. Néhány² például, amelyekre $\lambda \approx 3,839$, nagyrészt olyan pályákat tartalmaz, amelyek 3-periodikus határciklusokhoz közelítenek. A háttérben meghúzódó jelenség bonyolultságáról a 2.5. ábra próbál képet adni, melynek vízszintes tengelyére λ -t ($\lambda \in [3, 4]$), a függőleges tengelyre pedig a határpályák x_j pontjait ($j = 1, 2, \dots, n$) mértük fel.

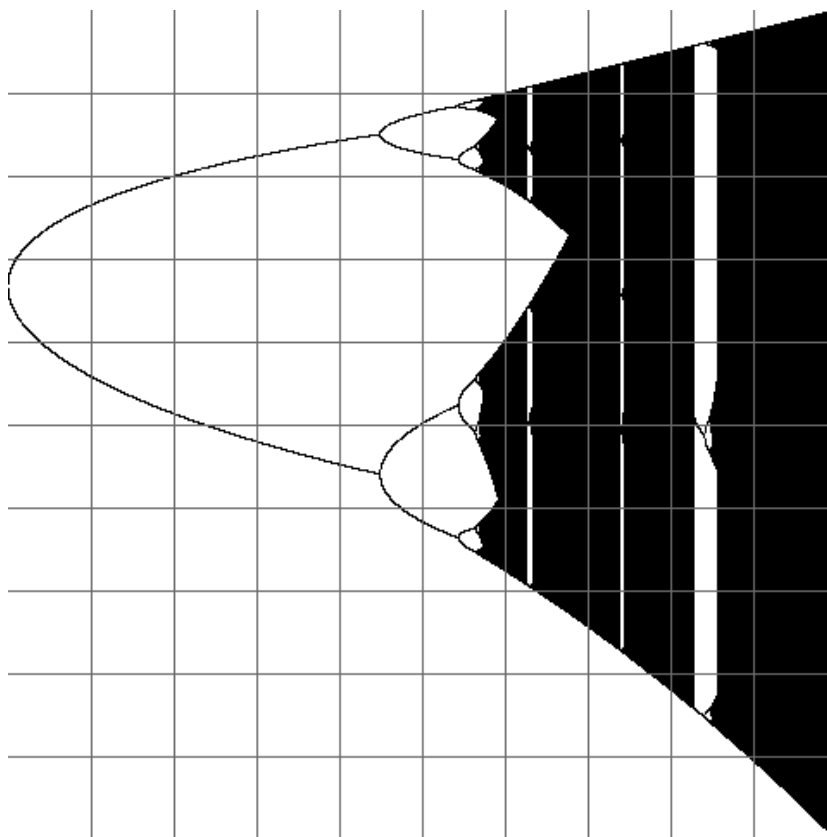
Jól látható a határciklusok kettéosztódása: ezt a jelenséget *bifurkációnak* nevezik.

A bifurkációs pontokra a továbbiakban a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ szimbólumokkal hivatkozunk, így pl. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$, $\dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 3,569945672\dots$

2.6. Az $M(x) = x^2 + \mu$ iteráció

Egy másik nemlineáris dinamikus rendszer az $M(x) = x^2 + \mu$ iteráció, ahol $-2 \leq \mu \leq 1/4$, $-2 \leq x \leq 2$. Ennél egyszerűbb kvadratikus iterációnak csak az $M'(x) = x^2$ vagy az $M''(x) = c \cdot x^2$ függvényeket választhatnánk; M' így is speciális esete M -nek.

²A „néhány” még ebben az esetben is végtelen sok dinamikus rendszert jelent.



2.5. ábra: $L(x)$ bifurkáció-diagramja
 (az $1/2$ -et tartalmazó határpályák; a segédvonalak
 egymástól $1/10$ egységnyi távolságban vannak)

M nagyon hasonlóan viselkedik L -hez. Megfigyelhetjük, hogy a $-0,75 \leq \mu < 0,25$, $-1,25 \leq \mu < -0,75$, $-1,375 \leq \mu < -1,25$, $-1,394 \leq \mu < -1,375$ és $-1,399 \leq \lambda < -1,394$ esetekben rendre 1-, 2-, 4-, 8- és 16-periodikus határciklusok irányítják a dinamikát. A határciklusok hossza L -hez hasonlóan duplázódik, mígnem μ eléri a $\mu_\infty = -1,4011\dots$ számot, s az ekkor megjelenő dinamikus rendszer pályái túlnyomó részének³ elemei egyre közelebb és közelebb kerülnek a $[-2, 2]$ intervallum egy végtelen sok pontból álló részhalmazához. A részleteket a 2.6. ábra mutatja: a vízszintes tengelyre μ -t ($-2 \leq \mu \leq -0,75$), a függőleges tengelyre pedig ismét a határpályák x_j periodikus pontjait ($j = 1, 2, \dots, n$) mértük fel.

A 2.5. és a 2.6. ábra közötti hasonlóság igen szembetűnő. Nemcsak a $3 \leq \lambda < \lambda_\infty$ és a $\mu_\infty < \mu \leq -0,75$ szakaszon, hanem ott is, ahol a pályák sűrűvé válnak:

1. Hasonló mértékben „tágul” L és M határpályáinak halmaza, mígnem a $\lambda = 4$ és $\mu = -2$ esetekben mindkettő a $[0, 1]$ illetve $[-2, 2]$ intervallumokon is sűrűvé válik.
2. Mindkét ábrán „lyukak” fedezhetők fel: bizonyos intervallumokon véges hosszú határciklusok jelennek meg.

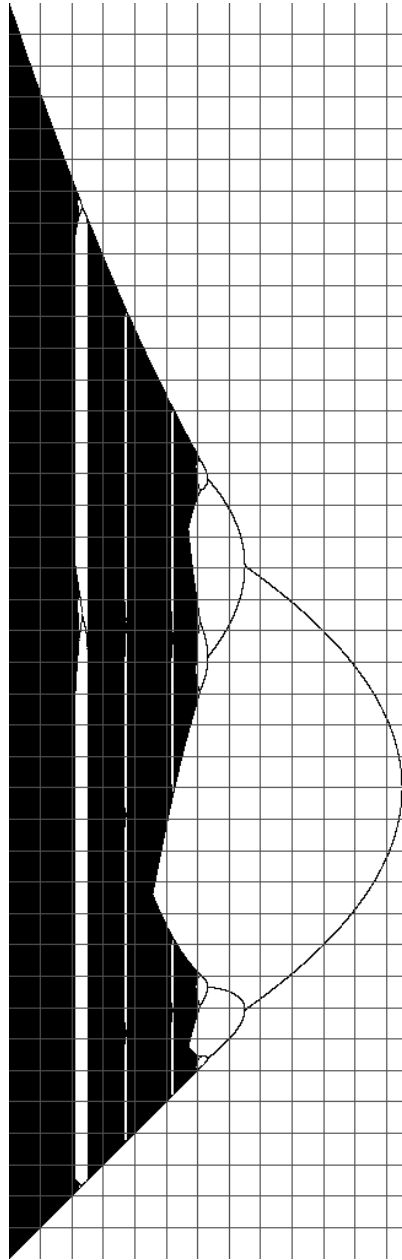
Bizonyíthatóan összefüggés van a bifurkációs pontok távolságai között. A szomszédos bifurkációs távolságarányok egy univerzális számhoz, a δ *Feigenbaum-állandó*hoz tartanak ([5]):

$$\textbf{Tétel.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta = 4,66920160910\dots \quad (2.11.)$$

2.7. A Mandel- λ - és a Mandelbrot-halmaz

Nagyon érdekes ábrákat nyerünk, ha az L és M iterációk komplex számokat is tartalmazó pályáit vizsgáljuk.

³„Túlnyomó rész”: csak megszámlálhatóan sok ellenpélda létezik, ami elenyésző bármely intervallum összes eleméhez képest (ld. az (1.3.) tétel bizonyítását).



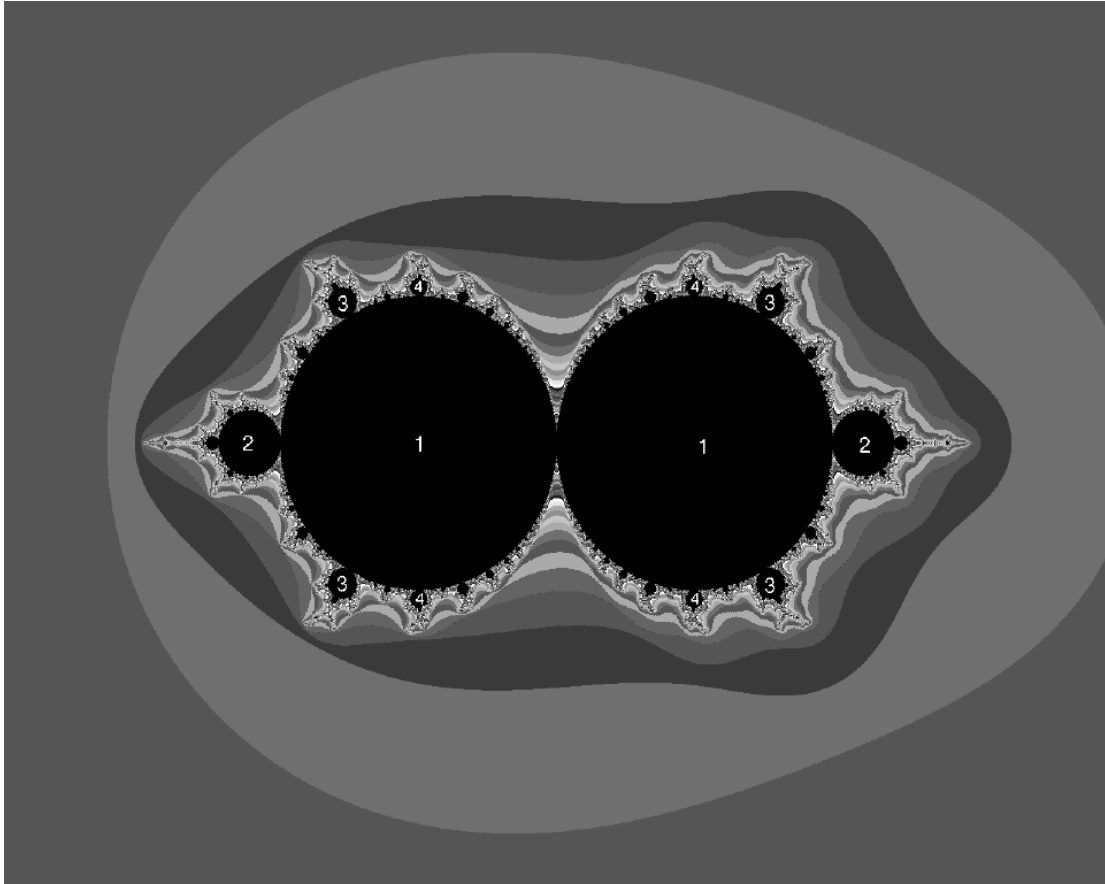
2.6. ábra: $M(x)$ bifurkáció-diagramja
 (a 0-t tartalmazó határpályák; a segédvonalak
 egymástól $1/10$ egységnyi távolságban vannak)

Válasszunk egy λ vagy μ komplex paramétert, s tekintsük a $z_1 = 1/2$ illetve $z_1 = 0$ pontokon átmenő $\{z_n\}$ pályasorozatot. Ha ez a sorozat korlátos, akkor azt mondjuk, hogy λ illetve μ eleme a *Mandel- λ* - illetve a *Mandelbrot-halmaznak*, attól függően, hogy L -et vagy M -et iteráltuk.

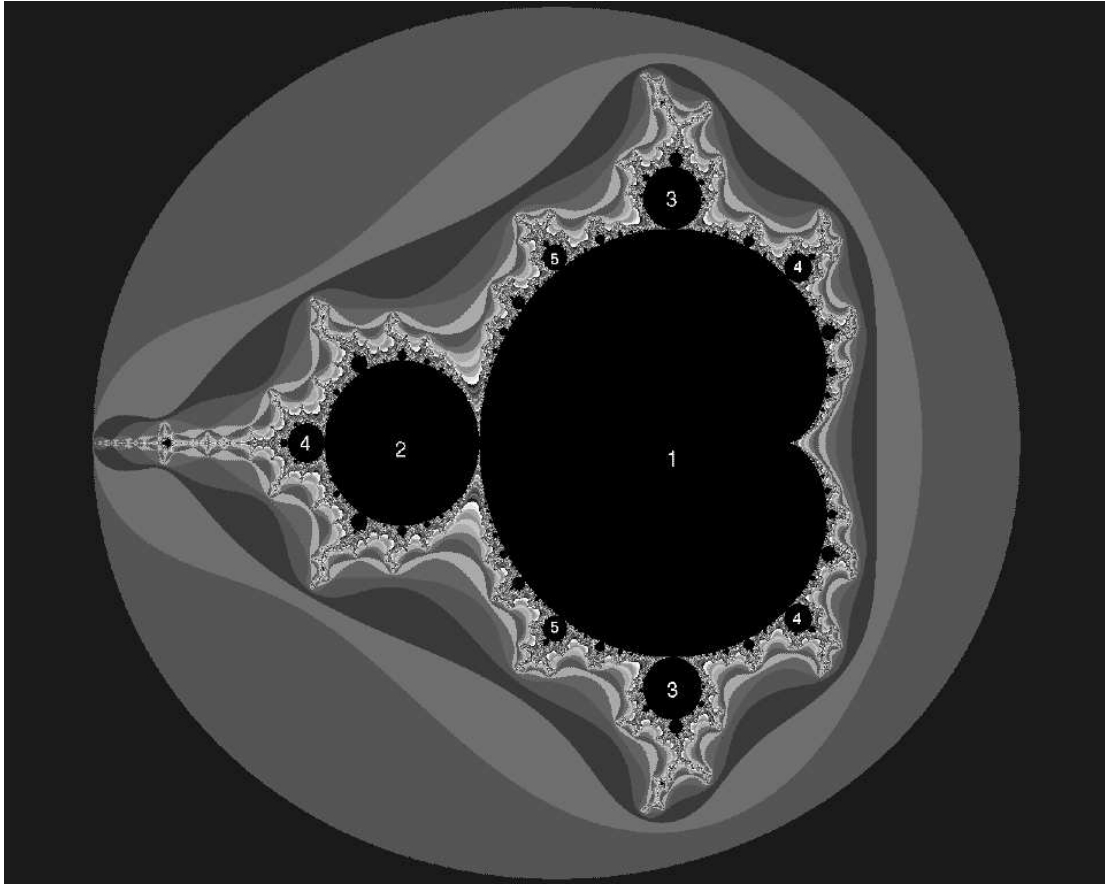
Az így nyert két halmaz pontos meghatározása nehéz, gyakorlatilag lehetetlen feladat. Ha számítógéppel akarjuk ábrázolni, rendszerint azt vizsgáljuk, hogy L illetve M iteráltjainak abszolútértékei túllépnek-e egy olyan R számot, melyre az origó középpontú R sugarú körön kívül határozott valódi divergencia van. Bebizonyítható, hogy mindkét halmaz esetében az $R = 2$ szám megfelelő. Számítógépes ábrázolásnál a halmazok szerkezetéről jobb képet kapunk, ha azokat a pontokat is feltüntetjük, melyek nem elemei ugyan a halmazoknak, de „közel” vannak hozzájuk: azt vizsgáljuk, hogy a $\{z_n\}$ pálya hányadik tagjától esnek a sorozat elemei a $|z| = 2$ körön kívülre, s ettől függően az egyes λ illetve μ pontokat különféle színárnyalatokkal jelöljük. A 2.7. és 2.8. ábrán a Mandel- λ - és a Mandelbrot-halmazt látjuk, amint azokat kívülről az ún. *ekvipotenciális görbék* által közrefogott sávok közelítik.

Mit mondhatunk az ábrák alapján? A λ és μ paramétereknek a komplex síkra való kiterjesztésével szemléletesen igaznak tűnik, hogy a két dinamika alapvetően hasonló jellegű. A két geometriai forma nem ugyanolyan, de sok hasonlóságot mutat: mintha egyre kisebb és kisebb körök csatlakoznának egymáshoz, s ezek végtelen rendszerét hajszálvékony *szálak* kötnék össze (2.9. ábra). Az is igen meglepő, hogy a bifurkációs és kaotikus jelenségek nemcsak a valós tengelyen, hanem a komplex sík különböző részein is megfigyelhetők. Amíg azonban a valós tengelyen a $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ ún. *Feigenbaum-pontokhoz* egyre közeledve periódus-kettőződés történik, addig a komplex síkon „trifurkációkat”, „tetrafurkációkat” és általában minden pozitív egész n -re fellépő periódus n -szereződéseket tapasztalunk. (A 2.7. és 2.8. ábrán feltüntetett számok az adott régió – általában egy *körszerű alakzat* – jellemző határciklushosszát mutatják.)

A síkon nagyon szemléletesen, szinte filmszerűen bemutatható, hogyan n -szereződik meg egy határciklus hossza. A 2.10. ábrán a Mandelbrot-halmaz

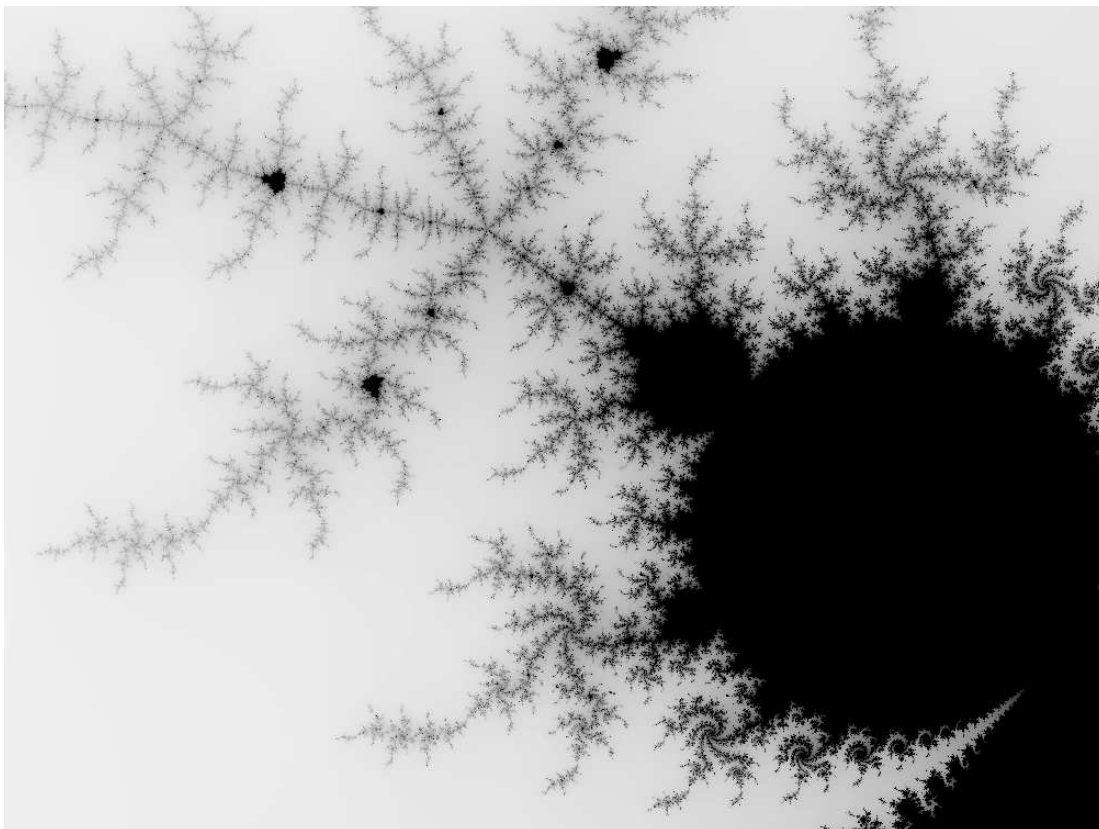


2.7. ábra: A Mandel- λ -halmaz
 (az első 30000 külső ekvipotenciális görbe által határolt sávok szerinti külső
 közelítés: a halmaz a belső fekete részek összessége;
 a λ paramétert a $-2 - 3i$ és az $5 + 3i$ átellenes csúcsú,
 a két tengellyel párhuzamos oldalú komplex téglalapról választottuk)

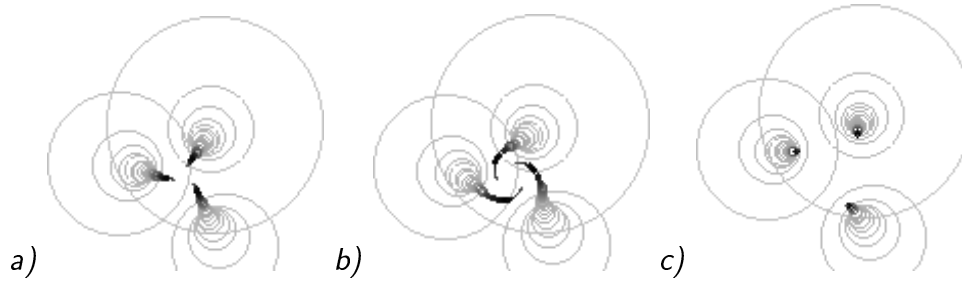


2.8. ábra: A Mandelbrot-halmaz

(az első 30000 külső ekvipotenciális görbe által határolt sávok szerinti külső közelítés: a halmaz a belső fekete „almaemberke” s a hozzá kapcsolódó részek összessége; a μ paramétert a $-2 - 1,34i$ és az $1 + 1,34i$ áttellenes csúcsú, a két tengellyel párhuzamos oldalú komplex téglalaphól választottuk)



2.9. ábra: A Mandelbrot-halmaz egy jellemző részlete



2.10. ábra: Trifurkációs jelenség a Mandelbrot-halmazban
(a z_n sorozat későbbi elemeit sötétebb színű, kisebb sugarú körök jelzik: ezek középpontjai alkotják magát a sorozatot)

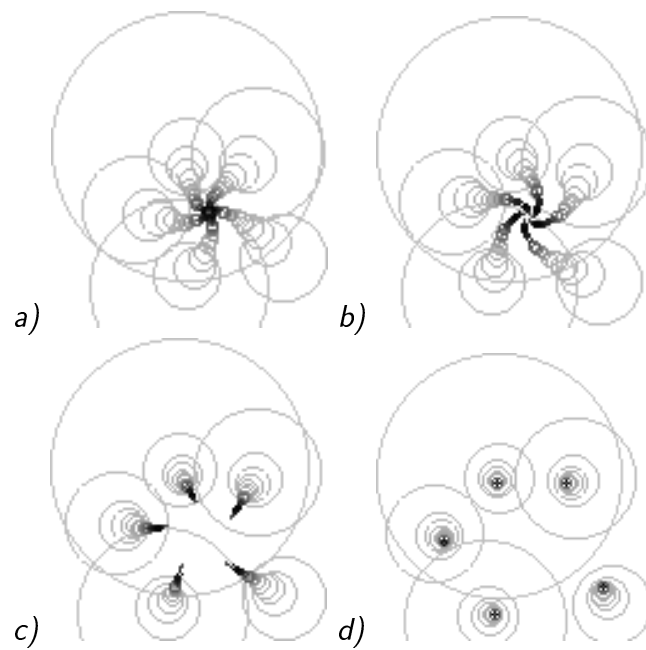
három $z \approx -0,12754 + 0,64196i$ körüli, egyre „fentebb” lévő pontjához tartozó pályasorozatot figyelhetünk meg: ezen a területen háromszorozódik a periódushossz (a fixpontból három elemű határciklus lesz).

Még látványosabb pentafurkáció játszódik le a $z \approx -0,47183 + 0,49791i$ pont közelében (2.11. ábra).

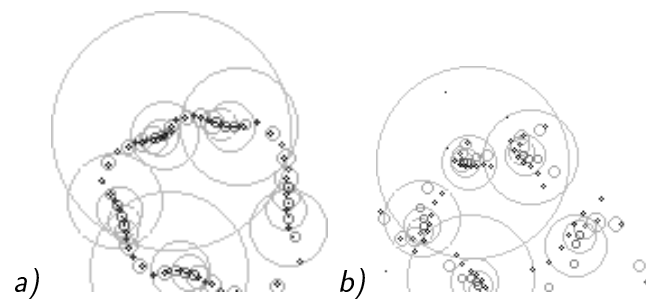
A halmaz szélén, a körszerű alakzatok határain a szabályos viselkedés néhol szabálytalanná, kaotikussá válik: a $\{z_n\}$ sorozat tagjai önmagukon sűrű halmazokon vándorolnak (2.12. ábra).

2.8. A Mandelbrot-halmaz és a káosz

A Mandelbrot-halmaz és a kvadratikus, köbös és egyéb polinomiális (illetve racionális) dinamikák által generált, a komplex sík részhalmazát alkotó *fraktálok* kutatása az elmúlt 20 évben bontakozott ki *Benoit Mandelbrot* korszakalkotó [11] könyvével és más matematikusok munkásságával. Hogy éppen a Mandelbrot-halmaz vált a vizsgálatok egyik központi tárgyává, annak az az oka, hogy a dinamika igen egyszerű, a halmaz szerkezete azonban elképzelhetetlenül komplikált. Példaképpen csak annyit említünk, hogy az ún. *molekulák* (melyek a körszerű *atomok* egymáshoz kapcsolódó végtelen sokasága) végtelen összessége a „nagy” almaemberkéhez kvázi-hasonló mértani formákat alkotnak: ez a majdnem *önha-*



2.11. ábra: Pentafurkáció a Mandelbrot-halmazban



2.12. ábra: Kaotikus viselkedés a Mandelbrot-halmazban
 $a \approx -0,50938 + 0,51043i$ és $a \approx -0,51564 + 0,52296i$ pontok közelében

sonlóság a fraktálok egy jellemző vonása.

A továbbiakban a Mandelbrot-halmazt a rövidség kedvéért $\mathcal{M}$ -mel jelöljük.

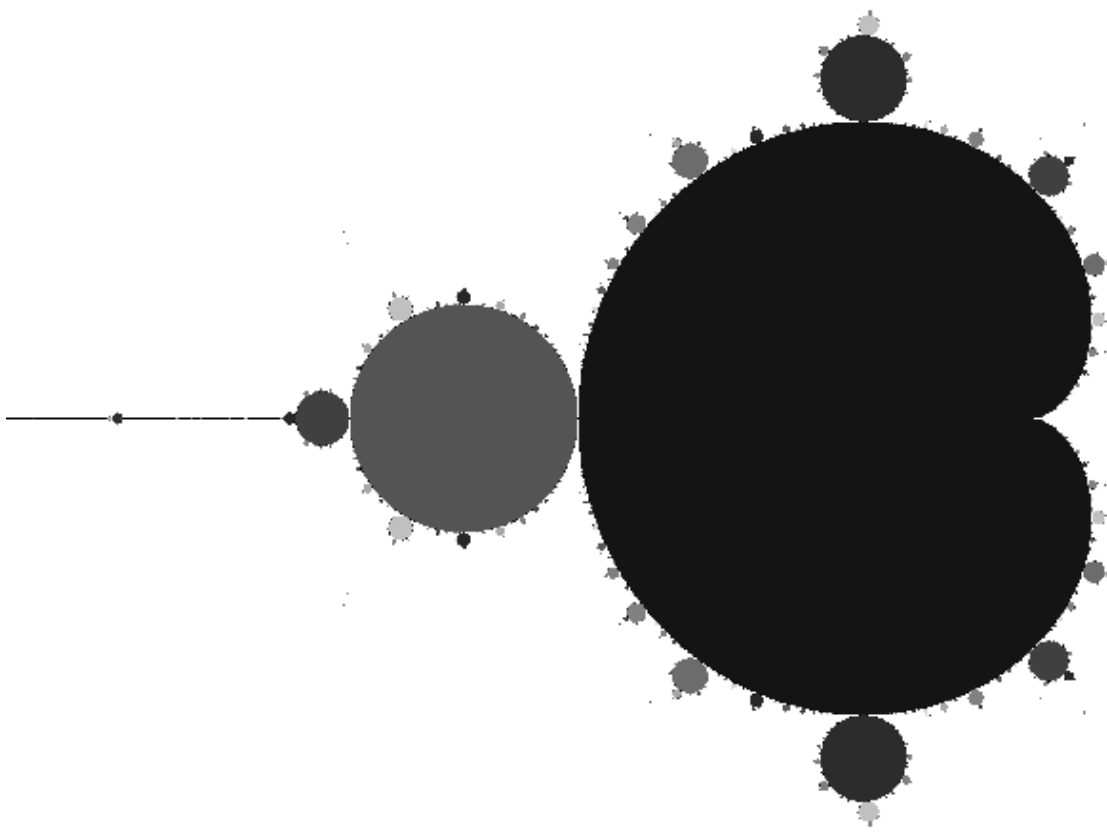
Elemi analitikus eszközökkel könnyen igazolható, hogy $\mathcal{M}$ korlátos. *Douady és Hubbard* 1982-ben megmutatták, hogy $\mathcal{M}$ egyszeresen összefüggő, vagyis nem tartalmaz lyukakat ([4]). Ehhez azt kell belátni, hogy az ekvipotenciális görbék *egyszerű zárt görbék*. *Shishikura* 1991-ben bebizonyította, hogy $\mathcal{M}$ *határhalmazának Hausdorff-dimenziója 2*, míg *topologikus dimenziója 1* ([16]). Ez azért fontos eredmény, mert önhasonló formák egy igen széles körére igaz, hogy azok Hausdorff-dimenziója nagyobb, mint topologikus dimenziójuk: ezzel matematikai értelemben is igazolást nyert, hogy szoros kapcsolat van a komplex dinamikai rendszereket leíró divergencia-grafikonok és egészen más típusú fraktálok között.

Többen $\mathcal{M}$ területét próbálják kiszámítani komplex függvénytani és numerikus módszerekkel. Egyelőre nem lehet sokkal többet tudni annál, hogy a terület 1,506302 és 1,5613027 között van ([19]): arról sincs fogalmunk, hogy ez a szám racionális vagy sem.

Számos más kérdés is tisztázatlan $\mathcal{M}$ tulajdonságaival kapcsolatban. Hogy mennyire nem világos, mi is történik konkrét μ paraméterek választásakor, azt jól mutatja *J. C. Sprott* amerikai fizikus az Interneten hozzáférhető [17] cikke, melyből dolgozatunk végén részleteket közlünk. Sprott írásában a `sci.fractals` levelezőlista öt hozzászólása olvasható, ebből kettőt idézünk. (A korábban nem definiált fogalmakat *dőlt* betűvel kiemeltük; a pontos definíciók megtalálhatók pl. [19]-ben.)

„A Mandelbrot-halmaz és a káosz (J. C. Sprott, 1997. július 3.)

Érdekes kérdés, hogy mely z_1 -ekre kapunk kaotikus pályát. Egy BASIC nyelvű programmal numerikusan próbáltam választ keresni erre. A program $n = 16000$ -ig vizsgálódik: periodikákat keres, s ha egy pálya korlátos marad, de nem periodikus



2.13. ábra: Sprott számítógépes programjának futási eredménye

$n = 16000$ -ig, akkor azt kaotikusnak tekinti. A 2.13. ábrán látható a grafikus eredmény.

A képen a fehér pontok azokat a z_1 -eket jelölik, amelyekhez tartozó pálya nem korlátos. A fekete reprezentálja a kaotikus, a sötétkék a fix pontokat. A fennmaradó színek modulo 13 mutatják a periódusok hosszát.

Kaotikus viselkedést a halmaz határán tapasztalunk, illetve a valós tengelyen balfelé. Az x -tengely mentén a dinamikát az $x_n = x_{n-1}^2 + a$ leképezés irányítja, melyről ismert, hogy kaotikus, ha $-2 < a < -1,4011$, legalábbis az a paraméterek többségénél. Az x -tengelyen kívüli látszólag kaotikus pályák a 16000-es korlát emelésével egyre eltűnnek, számuk mintha 0-hoz tartana.

Ha csak $\mathcal{M}$ határán lehetnek kaotikus pályák (s ez tűnik igaznak), akkor fellépésük valószínűsége legfeljebb annyi, mint amekkora valószínűséggel egy pont a halmaz határára esik. Még nem bizonyított, hogy $\mathcal{M}$ határának nem zérus területe van. Hasonlóan az sincs bizonyítva, hogy ha egy pont a komplex számsík egy véges tartományába esik, akkor nem zéró valószínűséggel a hozzá tartozó pálya kaotikus lesz. Úgy tűnik, hogy ez a valószínűség rettentően kicsi, sőt, vélhetően 0.

Az x -tengelyen kívüli fekete pontok valószínűleg csak a *tranzien*s káosz jelenségére példák. Ezek végül is vagy a végtelenbe tartanak, vagy periodikus ciklusban nyugszanak meg, bár némely esetben ezeket a pályákat több, mint 10^{10} iterációig követve sem találtam periodicitást, de valódi divergenciát sem. Ezek közül az aperiodikus pontok közül néhányról kimutatható, hogy *Ljapunov-exponensük*⁴ pontosan 0. Az ezekhez a pontokhoz tartozó pályák aperiodikusak, fraktálisak; azok a pályák, melyek kezdeti feltételei egymáshoz közel vannak, ingadozóan különülnek el egymástól; de ez az elkülönülés nem nő, sem exponenciálisan, sem másképp. Úgy tűnik, ezekre a pontokra nem érvényes a kezdeti feltételektől való érzékeny függés, pedig ez a tulajdonság rendszerint a káosz meghatározó jellemzője. Ezzel ellentétben a valós tengelyen lévő pontok pályái a $-2 < a < -1,4011$ paraméterek többségében teljesen kaotikusak.

Így $\mathcal{M}$ bármennyire is bonyolult, szemmel láthatólag elhanyagolhatóan kevés valódi kaotikus pályát tartalmaz.

Bob Beland megjegyzése (1997. június 6.):

A komplex sík pontjai különböző típusokba sorolhatók:

- A halmazon kívül, a közelben semmi: a pálya a végtelenbe tart.
- A halmazon belül, nem a határon: a pálya egy vonzó ponthoz konvergál vagy ciklizál (azaz egy határciklushoz közelít).

⁴A Ljapunov-exponens azt fejezi ki, hogy a közeli pontokat az iteráció átlagosan milyen exponenciális rendben távolítja egymástól. Ha pozitív, akkor a leképezés érzékenyen függ a kezdeti adatoktól ([9], 32. o.).

- A halmaz szélén, egy szál végén vagy szál-elágazásnál: a pálya egy véges *taszító* ciklushoz közelít.
- A halmaz szélén, más szál-pontokban, melyekhez *irracionális külső szög* tartozik: kaotikus pálya.
- A halmaz szélén, egy *kardiod* csúcsán vagy *rügy*-kapcsolódási pontban (egy vagy több racionális külső szög): a pálya egy *gyengén vonzó* ciklushoz vagy ponthoz közelít.
- A halmaz egy *komponensének* szélén, nem csúcson, talán rügyek egy váltakozó sorozatának határánál, irracionális külső szögnél: a pálya kaotikus (a *Julia-halmaznak Siegel-lemezei* vannak).

Jay R. Hill megjegyzése (1997. június 26.):

Vannak olyan különleges pontok, melyek egy-egy komponens határán fekszenek, racionális szög tartozik hozzájuk: ezek konvergálnak. Vannak továbbá irracionális szögű pontok a halmaz határán, melyekhez kaotikus pálya tartozik. De éppen azok vannak a halmaz szélén, amelyek Ljapunov-exponense 0-val egyenlő. 1994. február 16-án ezekről a kaotikus pontokról küldtem egy listát, négy ezek közül: $0,33 + 0,06i$, $0,36 + 0,16i$, $0,24 + 0,64i$, $-0,47 + 0,54i$. Ami pedig a tranziens káoszt illeti, nos, én több mint 10^7 iteráción keresztül követtem a pályákat. Még mindig mennek, örökkön-örökké kaotikus útjaikon. Az utak maguk is fraktálok, a generált kép pedig elég mókás.”

Felhasznált irodalom

- [1] *Assaf IV, D., Gadbois, S.:* **Definition of chaos**, letter in **American Mathematical Monthly**, **99.** (1992), 865. o.
- [2] *Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. and Stacey, P.:* **On Devaney's definition of Chaos**, **American Mathematical Monthly**, **99.** (1992), 332–334. o.
- [3] *Devaney, R. L.:* **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems** (Addison–Wesley Publishing Company, 1989)
- [4] *Douady, A., Hubbard, J. H.:* **Iteration des polynomes quadratiques complexes**, **CRAS Paris**, **294.** (1982), 123–126. o.
- [5] *Feigenbaum, M.:* **Quantitative universality in a class of non-linear transformations**, **Journal of Statistical Physics**, **19.** (1978), 25–52. o.
- [6] *Fuchssteiner, Benno:* **MuPAD: Multi Processing Algebra Data Tool; Tutorial** (Birkhäuser Verlag, Basel, 1993)
- [7] *Hajnal Imre–Némethy Katalin:* **Matematika I.** (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988)
- [8] *Knuth, Donald Ervin:* **A számítógépprogramozás művészete, 2. kötet: Szeminumerikus algoritmusok** (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994)
- [9] *Krisztin Tibor:* **Káosz, Polygon, 2.** (1992. szeptember)

- [10] *Leindler László*: **Analízis** (Nemzeti Tankönyvkiadó, 1993)
- [11] *Mandelbrot, B. B.*: **The Fractal Geometry of Nature** (Freeman, San Francisco, 1982)
- [12] *Megyesi László*: **Bevezetés a számelméletbe** (Polygon, Szeged, 1997)
- [13] *N. 172. Középiskolai matematikai lapok* (1998. április), 234. o.
- [14] *Peitgen, Heinz-Otto–Richter, Peter H.*: **The Beauty of Fractals** (Springer-Verlag, New York, 1986)
- [15] *Reiman István*: **Matematika** (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992)
- [16] *Shishikura, M.*: **The Hausdorff Dimension of the Boundary of the Mandelbrot Set and Julia Sets**
(<ftp://math.sunysb.edu/preprints/ims91-7.ps.Z>, 1991)
- [17] *Sprott, J. C.*: **Mandelbrot Set Chaos**
(<http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/manchaos.htm>, 1997)
- [18] *Stewart, Ian*: **Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos** (Blackwell, London, 1989), 141. o.
- [19] *Taylor, Michael C.–Louvet, Jean-Pierre*: **sci.fractals FAQ**
(<http://www.mta.ca/~mctaylor/sci.fractals-faq/>)
- [20] *The Stone Soup Group*: **Fractint 19.20**
(<http://spanky.triumf.ca/www/fractint/>, 1997)
- [21] *Vellekoop, M., Berglund, R.*: **On Intervals, Transitivity = Chaos, American Mathematical Monthly**, 101. (1994), 865. o.
- [22] *Vickers, Steven*: **Zx Spectrum BASIC programming** (Sinclair Research Ltd., Cambridge, 1983)
- [23] *Zsigovics Márta*: **Kaotikus jelenség a lánc törtékben, szakdolgozat** (József Attila Tudományegyetem, Szeged, 1996)

Ábrák jegyzéke

1.1. A $\sqrt{2}$ spektrálpróbája	13
1.2. A π spektrálpróbája	14
1.3. $z(x)$ spektrálpróbája 100-as számrendszerben	16
1.4. $z(x)$ spektrálpróbája 256-os számrendszerben	17
2.1. Lorenz előrejelzése	25
2.2. $K(x)$, az $n = 97$ eset	29
2.3. $K(x)$, az $n = 110$ eset	30
2.4. Az eredeti és a „behorpasztott” $T(x)$ függvény	33
2.5. $L(x)$ bifurkáció-diagramja	36
2.6. $M(x)$ bifurkáció-diagramja	38
2.7. A Mandel- λ -halmaz	40
2.8. A Mandelbrot-halmaz	41
2.9. A Mandelbrot-halmaz egy jellemző részlete	42
2.10. Trifurkációs jelenség a Mandelbrot-halmazban	43
2.11. Pentafurkáció a Mandelbrot-halmazban	44
2.12. Kaotikus viselkedés a Mandelbrot-halmazban	44
2.13. Sprott számítógépes programjának futási eredménye	46

Tartalomjegyzék

1. Véletlenszerű sorozatok	4
1.1. Racionális, irracionális számok	4
1.2. Véletlen sorozatok	7
1.3. Statisztikus módszerek a véletlenszerűség tesztelésére	9
1.4. Lineáris kongruenciasorozatok	14
1.5. Fibonacci típusú rekurziók	18
1.6. Algoritmizálhatóság	19
2. Diszkrét dinamikus rendszerek	22
2.1. A káosz fogalma	22
2.2. Véletlen sorozatok és a káosz I.	25
2.3. Tésztagyúrás, kártyakeverés	27
2.4. Véletlen sorozatok és a káosz II.	30
2.5. A logisztikus görbe	33
2.6. Az $M(x) = x^2 + \mu$ iteráció	35
2.7. A Mandel- λ - és a Mandelbrot-halmaz	37
2.8. A Mandelbrot-halmaz és a káosz	43