Fraktálok, avagy a két és feledik dimenzió

Mandelbrot, 1975. Falconer definíciója: fraktál = olyan alakzat, mely finom struktúrájú, „szabálytalan”, ön-hasonló és egyszerűen definiálható (pl. rekurzívan). Sokféle típus, család létezik.

Helyettesítéses fraktálok

Koch-görbe: **`1/6, V; V=V-V++V-V.`**

Cantor-halmaz: **`V; V=VLV, L=LLL.`**

Hópehely: **`1/6, V++V++V; V=V-V++V-V.`**

Két-két-kétágú fa: **`1/12, ---Vx; x=[+Vx]-Vx.`**

(Szebb kétágú fa: **`1/12, ---Vx; x=60%[+Vx]-Vx.`**)

Fekvő növény: **`1/14, V; V=V[-V]V[+V]V.`**

Bokor: **`1/16, ----V; V=VV+[+V-V-V]-[-V+V+V].`**

Sierpinski-háromszög: **`1/3, V+V+V; V=V[+V]V.`**

Mariano-görbe: **`1/6, yV; x=yV-xV-y, y=xV+yV+x.`**

Hilbert-görbe: **`1/4, x; x=+yV-xVx-Vy+, y=-xV+yVy+Vx-.`**

Sárkánygörbe: **`1/4, x; x=x+yV+, y=-Vx-y.`**

(Fraktál neve: fordulat nagysága, kiinduló forma; átalakítási szabályok. **`V`***: vonalhúzás,* **`L`***: lyuk,* **`-`***: balra fordulás,* **`+`***: jobbra fordulás,* **`[`***: pozíció megjegyzése,* **`]`***: visszalépés megjegyzett pozícióba,* **`60%`***: kicsinyítés 60%-ra.)*

A komplex számsík

A valós számokat úgy tekintjük, mint a síkbeli koordináta-rendszer x-tengelyét, a sík többi pontját *komplex számoknak* nevezzük.

Hogyan adunk össze két komplex számot? Mint két vektort: $(a;b) \oplus (c;d) = (a+c; b+d)$.

Hogyan szorzunk? Minden $(a;b)$ komplex szám egyértelműen $(a;b) = (r \cdot \cos\alpha; r \cdot \sin\alpha)$ alakban írható. Ezután ha $(c;d) = (s \cdot \cos\beta; s \cdot \sin\beta)$, akkor $(a;b) \odot (c;d) = (r \cdot s \cdot \cos(\alpha+\beta); r \cdot s \cdot \sin(\alpha+\beta))$. (Másképpen is lehet szorozni, de az eredmény ugyanez lesz: $(a;b) \odot (c;d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$.

Ebből a négyzetre emelés: $(a;b) \odot (a;b) = (r^2 \cdot \cos 2\alpha; r^2 \cdot \sin 2\alpha)$ vagy $(a;b) \odot (a;b) = (a^2 - b^2; 2ab)$.

A komplex számoknak is van abszolút értékük: egy nemnegatív szám, ami a komplex szám origótól való távolságát jelzi. Az $(a;b)$ szám esetén ez $\sqrt{a^2+b^2}$ (a Pitagorász-tétel miatt).

A Mandelbrot-halmaz

A Mandelbrot-halmazt úgy képzeljük el, mint egy káposzta belsejét. Az őt körülölelő leveleket írjuk le egyenletekkel. Ezekben az egyenletekben komplex számok szerepelnek. Tegyük fel, hogy egy x komplex számot behelyettesítünk az egyenlet bal oldalába, s az egyenlőség fennáll. Ekkor az az x szám (mint síkbeli pont) illeszkedik arra a görbére, amelyik valamelyik levelet írja le matematikai képlettel. Ezek a képletek:

A legkülső levél: $|x| = 2$. Kívülről a második levél: $\left|x^2 + x\right| = 2$. Harmadik levél: $\left|(x^2+x)^2 + x\right| = 2$. Negyedik levél: $\left|((x^2+x)^2+x)^2 + x\right| = 2$. És így tovább... Precíz matematikai fogalmazással azt mondhatjuk, hogy egy x komplex szám pontosan akkor eleme a Mandelbrot-halmaznak, ha az $a_1 = x, a_2 = a_1^2 + x, \ldots, a_n = a_{n-1}^2 + x$ sorozat minden eleme az origó körüli 2 sugarú körben fekszik.