Algebrai struktúrák

1997. december 8.

1. Döntsük el, hogy a felsorolt halmazok a megadott műveletekre nézve algebrai struktúrát alkotnak-e! Ha igen, állapítsuk meg, hogy az adott struktúra — esetünkben grupoid — félcsoport, monoid, csoport illetőleg Abel-csoport-e vagy sem! (U tetszőleges halmaz; P a páros számok halmazát jelenti.)

   (a) $(P; -)$,
   (b) $(P; +)$,
   (c) $(\mathbf{Z} \setminus P; +)$,
   (d) $(P; \cdot)$,
   (e) $(\mathbf{Q}; \cdot)$,
   (f) $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; +)$,
   (g) $(\mathbf{Z} \setminus P; \cdot)$,
   (h) $(\{\text{az összes magyar szó}\}; \ominus)$, ahol pl. alma $\ominus$ fa = almafa,
   (i) $(\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$,
   (j) $(\mathbf{N}; *)$, ahol $x * y := xy - x + y$,
   (k) $(\mathbf{N}; \circ)$, ahol $x \circ y := xy + x + y$,
   (l) $(\mathbf{N}; \diamondsuit)$, ahol $x \diamondsuit y := x$,
   (m) $(\mathbf{Z}; \otimes)$, ahol $x \otimes y := x + (-1)^x y$,
   (n) $(\mathbf{R}; \star)$, ahol $x \star y := ax + by$ ($a, b \in \mathbf{R}$ rögzített),
   (o) $(S_n; \cdot)$,
   (p) $(\{(x\,y) \in S_n : x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}\}; \cdot)$,
   (q) $(P(U), \setminus)$,
   (r) $(P(U), \triangle)$,
   (s) $(A \times B; \dagger)$, ahol $(a_1, b_1) \dagger (a_2, b_2) := (a_1, b_2)$.

2. Gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes algebrák? (Ellenőrizzük, hogy a műveletek valóban nem vezetnek ki az alaphalmazból!) Ha igen, vizsgáljuk meg, hogy a kérdéses gyűrű test-e.

   (a) $(\{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbf{Z}\}; +, \cdot)$,
   (b) $(P(U); \triangle, \cap)$;
   (c) $(\mathbf{R}; \oplus, \odot)$, ahol $x \oplus y := x + y - 1$ és $x \odot y := x + y - xy$.
   (d) $(\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}; +, \cdot)$, ahol az alaphalmaz elemei az n-nel való osztásra vonatkozó maradékosztályokat jelentik (tehát pl. $n = 6$ esetén $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$). (Illusztáljuk példákkal — vagy bizonyítsuk be, de ez jóval nehezebb —, hogy ez a struktúra akkor és csak akkor test, ha n prímszám.)

3. Legyen n pozitív egész szám! Igazoljuk, hogy az n. egységgyökökből és a szorzás műveletből megalkotott $\mathcal{A}$ algebra, illetve az $(1\,2\,3\,\ldots\,n)^k \in S_n$ elemekből ($k = 1, 2, \ldots, n$) és a leképezésszorzásból elkészített $\mathcal{B}$ algebra izomorf egymással. (Segítség: próbáljunk kis n-re (pl. 4-re vagy 5-re) olyan bijekciót keresni, mely művelettartó is; ezután általánosítsunk.)

4. *Cayley tétele* a következőket mondja ki: "Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan csoport, amelynek alaphalmazában m db. elem van. Ekkor biztosan van valamelyik S_n-nek egy olyan részhalmaza, amelyből és a leképezésszorzásból megalkotott $\mathcal{B}$ algebra izomorf $\mathcal{A}$-val." Értsük meg, mit is jelent ez a tétel: adjunk meg egy ilyen $\mathcal{B}$ algebrát, ha $\mathcal{A} = (\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}; \cdot)$ (lásd a 2. d) feladatot is).