

2. ÁTMENET AZ ANALITIKUS SZÁMELMÉLET FELÉ: LÁNCTÖRTEK.

2.1. Történeti bevezetés.

Az általános vélekedéssel szemben nem Diofantosz volt az első, aki egész együtthatós határozatlan egyenletek egész megoldásait kereste, hanem az I.sz. VI.–VII. században élt hindu Aryabhata I. és Brahmagupta. Ezen egyenletek megoldását lényegében az Euklideszi algoritmusra alapozták, és egy új, egyedi jelölésrendszert is bevezettek, ami a mai lánc tört egyik őseinek is tekinthető.

A lánc tört egy másik őseinek a pisai Leonardo érdekes — bizonyos láncolást, folytonosságot sugalló — indus eredetű írásmódja tekinthető. Az 1202-ben elkészült Liber abaci c. könyvében szerepel többek közt az $\frac{111}{345}$ jelsorozat, amelynek a maitól eltérő jelentése a következő volt:

$$\frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{5}}{4}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Itt a jobb oldalon föllelhető az — először az Egyiptomi Középbirodalomban használt — ún. egységtörtekre bontás is.

Az olasz matematika professzor Raffaella Bombelli 1572-es L'Algebra Opera c. könyvében szerepel a $\sqrt{2}$, és a $\sqrt{13}$ közelítése:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + 2 + 2 + 2} \quad \text{és} \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + 6 + 6 + 6}.$$

Ezen „fura” írásmóddal a következő két törtet adta meg:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}}}$$

Vizsgáljuk meg a $\sqrt{2}$ -re adott érték pontosságát. Bombelli racionális (közelítése) $\frac{41}{29}$, ami $4 \cdot 10^{-4}$ -nél kevesebbel tér el a helyes (irracionális) értéktől. A másik közelítés is hasonló pontosságú. Bombellinél még ha föl is merült, hogy az általa adott szám csak közelítés, meg volt győződve arról, hogy véges sok lépéssel folytatva eljárását eljut a korrekt értékhez. A korrekt érték — mint látni fogjuk — egy „ilyen alakú” tagokból álló sorozat határértéke:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}} \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \ddots}}}$$

Bombelli volt Diophantosz Aritmetikájának (az 1-4. könyvek) első (nem görög vagy iszlám) népszerűsítője Európában, amelyet kortársa — a számolómester — Tartaglia fordított le

latinra. Abban még

$$\frac{170}{53} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

alakú számolás is szerepelt (szintén mai szimbolikát használva). Ez korrekt.

2.2. Véges lánc törtek.

Definíció. Legyenek $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{N}$. Az

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{\ddots a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{a_n}}}$$

kifejezést véges lánc törtnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy e kifejezés *egyszerű lánc tört*, ha $b_1 = \dots = b_{n-1} = 1$, azaz

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$$

alakú. A továbbiakban lánc törtön mindig egyszerű lánc törtet fogunk érteni.

2.2.1. Tétel. *Bármely racionális szám fölírható véges (egyszerű) lánc törtként.*

Bizonyítás. Lényegében ugyanazt az eljárást fogjuk követni, amelyet már a hindu Aryabhata I. is ismert.

Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Végezzünk euklideszi algoritmust a és b -n.

$$\begin{aligned} a &= ba_0 + r_1 \\ b &= r_1a_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2a_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}a_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_na_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Tudjuk, hogy $r_1, \dots, r_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, és $a_0 \in \mathbb{Z}$.

Osszuk el az (1)-beli egyenlőségeket rendre $b, r_1, \dots, r_n$ -nel:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} \\ \frac{b}{r_1} &= a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\ \frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\ &\vdots \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n,\end{aligned}$$

amiből szukcesszív helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = \dots$$

Az eljárás végén az

$$(2) \quad \frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$$

lántörtet kapjuk.

Megjegyzés. Az előbbi tétel megfordítása triviálisan igaz.

Példa.

$\frac{51}{19}$ lántört alakja a következő.

$$51 = 2 \cdot 19 + 13$$

$$19 = 1 \cdot 13 + 6$$

$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$

$$6 = 1 \cdot 6$$

Az imént ismerttetett eljárást követve

$$\begin{aligned}\frac{51}{19} &= 2 + \frac{13}{19} = 2 + \frac{1}{\frac{19}{13}} \\ \frac{19}{13} &= 1 + \frac{6}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{6}} \\ \frac{13}{6} &= 2 + \frac{1}{6},\end{aligned}$$

amiből helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$(3) \quad \frac{51}{19} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}.$$

Világos, hogy a (2) lánc törtöt az $a_0, a_1, \dots, a_n$ egészek egyértelműen meghatározzák, így egyszerűen

$$(4) \quad \frac{a}{b} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle\text{-t}$$

írhatunk helyette. Ezt fölhasználva

$$\frac{51}{19} = \langle 2, 1, 2, 6 \rangle.$$

Természetes az a kérdés, hogy hányféle lánc tört előállítása lehet egy racionális számnak. Az előbbi példából ugyanis nyilvánvaló, hogy

$$\langle 2, 1, 2, 6 \rangle = \langle 2, 1, 2, 5, 1 \rangle,$$

sőt (2) alapján az általános

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1 \rangle$$

egyenlőség is nyilvánvaló. Ennek elkerülésére megállapodhatunk abban, hogy a második fajta alakoktól tartózkodunk, azaz mindig föltesszük, hogy lánc törtjeinkben az utolsó jegy nagyobb egynél. Ez a megállapodás hasonló a tizedestörtek fölírásánál tethez, mely szerint a tizedestörtjeink nem végződhetnek végtelen sok 9-esre, azaz a tizedesjegyek nem lehetnek véges sok jegytől eltekintve kilenceseek. Ezen megállapodást elfogadva már egyértelmű a racionális számok lánc tört alakja.

Jelölés. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ -re jelölje $[a]$, ill. $\{a\}$ az a egészrészét, ill. törtrészét. Azaz

$$[a] = \max\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq a\},$$

továbbá

$$\{a\} = a - [a].$$

2.2.2. Tétel. Ha $\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$, $\langle b_0, a_1, \dots, b_l \rangle$ olyan lánc törtetek, amelyekben $a_k, b_l > 1$, akkor

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle = \langle b_0, a_1, \dots, b_l \rangle$$

maga után vonja, hogy $k = l$, és minden $0 \leq i \leq k$ -ra $a_i = b_i$.

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} r_0 &= \langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle, & t_0 &= \langle b_0, a_1, \dots, b_l \rangle, \\ r_i &= \langle a_i, a_{i+1}, \dots, a_k \rangle, & t_j &= \langle b_j, b_{j+1}, \dots, b_l \rangle, \\ 1 \leq i &\leq k, & 1 \leq j &\leq l. \end{aligned}$$

A tétel föltétele szerint $r_0 = t_0$. Tetszőleges $1 \leq i < k$ -ra

$$r_i = a_i + \frac{1}{\langle a_{i+1}, \dots, a_k \rangle},$$

azaz

$$r_i = a_i + \frac{1}{r_{i+1}}.$$

Hasonlóan kapható, hogy bármely $1 \leq j < l$ -re

$$t_i = b_i + \frac{1}{t_{i+1}}.$$

Az is világos, hogy egyrészt $r_i > a_i$ és $t_j > b_j$, és speciálisan $r_k = a_k > 1$ és $t_l = b_l > 1$. Másrészt,

$$a_i = [r_i] \quad \text{és} \quad \frac{1}{r_{i+1}} = r_i - [r_i] = \{r_i\},$$

továbbá

$$b_j = [t_j] \quad \text{és} \quad \frac{1}{t_{j+1}} = t_j - [t_j] = \{t_j\}.$$

Ezek alapján az

$$r_0 = a_0 + \frac{1}{r_1}, \quad t_0 = b_0 + \frac{1}{t_1}$$

egyenlőségekből — mivel $a_0 = b_0$ — az $r_1 = t_1$ egyenlőség adódik. Eljárásunkat folytatva véges sok lépés után a tétel állítását kapjuk.

2.3. Végtelen (egyszerű) lánc törtek.

Definíció. Legyen $a_0, a_1, \dots$ egész számok olyan sorozata, amelyben legfőljebb a_0 nem pozitív. Az

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$$

kifejezést *végtelen egyszerű lánc törtnek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy e lánc tört az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot reprezentálja, ha

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Megjegyzés. A definícióban természetesen föl kell tételeznünk, hogy a határérték létezik. Ezt rövidesen be fogjuk bizonyítani, de addig is használni fogjuk az $\alpha = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$ írásmódot, továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén használjuk az $\alpha_n = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ jelölést is. Ez utóbbit az α lánc tört n -edik kezdő szeletének nevezzük.

Első feladatunk tehát az, hogy a definícióbeli határérték létezését bizonyítsuk. Eljárásunkban (és a későbbi alkalmazásokban is) alapvető szerepet fog játszani a következő két sorozat.

Definíció. Tekintsük az $a_0 \in \mathbb{Z}$ és $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$ egészeket, és alkossuk meg belőlük az $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ és $(q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ sorozatokat.

$$(5) \quad \begin{array}{ll} p_0 = a_0 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_1 a_0 + 1 & q_1 = a_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

2.3.1. Lemma. Legyenek $a_0 \in \mathbb{Z}$ és $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$ egészek, és alkossuk meg az (5)-ben definiált sorozatokat. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ -ra

$$\alpha_n = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = \frac{p_n}{q_n}.$$

Bizonyítás. n -szerinti teljes indukciót fogunk alkalmazni. A lemma állítása $n = 0$ -ra triviális, míg $n = 1, 2$ -re egyszerű számolással kapható. Ezek után tegyük föl, hogy valamely $m > 2$ -re

$$(6) \quad \langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}}.$$

Az indukciós föltevés alapján tudjuk, hogy $p_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-1}, q_{m-2}$ csak az $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ egészeiktől függ, így független a_m -től. Ezért a (6)-ban — kihagyva a középső tagot — a_m helyett $a_m + \frac{1}{a_{m+1}}$ -et írhatunk, és ekkor az

$$(7) \quad \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}} = \left\langle a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_m + \frac{1}{a_{m+1}} \right\rangle$$

egyenlőséget kapjuk. A jobb oldalon formálisan nem egyszerű lánc tört áll, de ezen lánc tört nyilván egyenlő az $\langle a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1} \rangle$ egyszerű lánc törttel. Ezzel a bizonyítás kész, hiszen az iménti észrevételünk, és egy egyszerű számolás után (7)-ből a bizonyítandó

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_m, a_{m+1} \rangle = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

egyenlőség adódik.

2.3.2. Lemma. Az (5)-ben definiált (p_i) , (q_i) és a belőlük nyerhető $(\alpha_i) = \left(\frac{p_i}{q_i}\right)$ sorozatokra,

$$(a) \quad \begin{vmatrix} p_{i-1} & p_i \\ q_{i-1} & q_i \end{vmatrix} = (-1)^i \quad (i \geq 1),$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} p_{i-2} & p_i \\ q_{i-2} & q_i \end{vmatrix} = (-1)^i a_i \quad (i \geq 2),$$

$$(c) \quad \alpha_i - \alpha_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{q_{i-1}q_i} \quad (i \geq 1),$$

$$(d) \quad \alpha_i - \alpha_{i-2} = \frac{(-1)^i}{q_{i-2}q_i} \quad (i \geq 2),$$

$$(e) \quad \ln. k. o.(p_i, q_i) = 1 \quad (i \geq 0).$$

Bizonyítás. Az (a) és a (b) állításokat i -szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

(a) Egyszerű számolással kapjuk, hogy $i = 1$ -re az állítás igaz. Legyen $m > 1$, és tegyük föl, hogy állításunk $i = m - 1$ -re igaz.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} p_{m-1} & p_m \\ q_{m-1} & q_m \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} p_{m-1} & a_m p_{m-1} + p_{m-2} \\ q_{m-1} & a_m q_{m-1} + q_{m-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} p_{m-1} & a_m p_{m-1} \\ q_{m-1} & a_m q_{m-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{m-1} & p_{m-2} \\ q_{m-1} & q_{m-2} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} p_{m-2} & p_{m-1} \\ q_{m-2} & q_{m-1} \end{vmatrix} \\ &= -(-1)^{m-1} = (-1)^m \end{aligned}$$

(b) Ugyanúgy igazolható, mint az (a) állítás, csak a kezdő lépés az $i = 2$.

(c) Ha $k \geq 2$ egész, akkor

$$\begin{aligned} \alpha_k - \alpha_{k-1} &= \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} \\ &= \frac{-(p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1})}{q_k q_{k-1}} = - \frac{\begin{vmatrix} p_{k-1} & p_k \\ q_{k-1} & q_k \end{vmatrix}}{q_k q_{k-1}} \\ &= - \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}. \end{aligned}$$

- (d) Ugyanúgy igazolható, mint a (c) állítás.
 (e) Az (a) állítás alapján nyilvánvaló.

2.3.3. Lemma. Legyen $a_0, a_1, a_2, \dots$ egészekből álló (végtelen) sorozatot, és tegyük föl, hogy legföljebb a_0 nem pozitív. Alkossuk meg az (5)-ben definiált két sorozatot, és tekintsük a belőlük képezhető $(\alpha_i) = \left(\frac{p_i}{q_i}\right)$ sorozatot. Az (α_i) sorozat páros indexű tagjai szigorúan monoton növekvő, míg páratlan indexű tagjai szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak. Továbbá tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}_0$ -ra

$$\alpha_{2m} < \alpha_{2n+1},$$

azaz bármely páros indexű tag kisebb bármelyik páratlan indexű tagnál.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az (5)-ben definiált (q_i) sorozat minden tagja pozitív, így a 2.3.2. Lemma (d) állítása szerint egyrészt bármely $k \geq 1$ -re

$$\alpha_{2k} - \alpha_{2k-2} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k}q_{2k-2}} > 0,$$

másrészt

$$\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}}{q_{2k+1}q_{2k-1}} < 0,$$

amelyek igazolják a lemmában állított monotonitásokat.

Az előbbieket szerint bármely $n, k \in \mathbb{N}$ -re

$$(8) \quad \alpha_{2n} < \alpha_{2n+2k}, \quad \text{és} \quad \alpha_{2n+2k-1} < \alpha_{2k-1}.$$

A 2.3.2. Lemma (c) állítása szerint pedig

$$(9) \quad \alpha_{2n+2k} < \alpha_{2n+2k-1}.$$

(8) és (9) már maga után vonja az

$$\alpha_{2n} < \alpha_{2k-1}$$

egyenlőtlenséget, ami a lemma bizonyítását teljessé teszi.

2.3.4. Tétel. Tekintsük egészek egy olyan $a_0, a_1, a_2, \dots$ (végtelen) sorozatát, amelyben legföljebb a_0 nem pozitív, és alkossuk meg belőle az (5)-szerinti $(p_i), (q_i)$ sorozatokat. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ -re $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$. Az (α_n) sorozat konvergens.

Bizonyítás. A 2.3.3. Lemma szerint az (α_n) sorozat páros indexű tagjai szigorúan monoton növekvő, fölülről korlátos, míg páratlan indexű tagjai szigorúan monoton csökkenő, és alulról korlátos sorozatot alkotnak. Így mindkét részsorozat konvergens.

A 2.3.2. Lemma (c) és (d) állítása alapján az

$$(10) \quad (\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5), \dots$$

intervallum sorozatra egyrészt

$$(11) \quad (\alpha_0, \alpha_1) \supset (\alpha_2, \alpha_3) \supset (\alpha_4, \alpha_5) \supset \dots,$$

másrészt az előbbi Lemma (c) állítása — lévén a (q_k) sorozat pozitív tagú és szigorúan monoton növekvő — maga után vonja, hogy

$$(12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k}| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^{2k}|}{q_{2k+1}q_{2k}} = 0.$$

(11) és (12) együtt azt jelenti, hogy a (10) intervallum sorozatnak egyetlen közös pontja van, amely nem más, mint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Előbbi tételünk teszi értelmessé a fejezet elején bevezetett fogalmat, a végtelen egyszerű lánc tört fogalmát.

2.3.5. Tétel. Minden végtelen egyszerű lánc tört irracionális számot reprezentál.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ végtelen egyszerű lánc tört, és jelölje α_k a k -adik kezdő szeletét. Tudjuk, hogy (2.3.4. Tétel), hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ -re α α_{n-1} és α_n között van, így

$$0 < |\alpha - \alpha_n| < |\alpha_n - \alpha_{n-1}| = \frac{1}{q_n q_{n-1}},$$

azaz

$$(13) \quad 0 < |\alpha - \alpha_n| < \frac{1}{q_n q_{n-1}}.$$

Mivel $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$ kapjuk, hogy

$$|\alpha - \alpha_n| = \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = q_n^{-1} |\alpha q_n - p_n|,$$

azaz fölhasználva a (13) egyenlőtlenségeket

$$(14) \quad |\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{q_{n-1}}$$

adódik.

(14) azonban egyetlen racionális α -ra sem állhat fenn, ugyanis, ha valamely $a, b \in \mathbb{Z}$ -re $\alpha = \frac{a}{b}$, akkor

$$\left| \frac{a}{b} q_n - p_n \right| = \frac{1}{|b|} |a q_n - b p_n| < \frac{1}{q_{n-1}},$$

amiből

$$(15) \quad |a q_n - b p_n| < \frac{|b|}{q_{n-1}}.$$

Az (5) definícióból nyilvánvaló, hogy a (q_n) pozitív tagú sorozat szigorúan monoton nő, így (15) jobb oldala 0-hoz tart, míg a bal oldalon természetes szám áll. Ezen ellentmondás igazolja tételünket.

2.3.6. Tétel. *A különböző végtelen egyszerű lánc törtek különböző valós számokat reprezentálnak.*

Bizonyítás. Tételünk azonnal következik azon egyszerű észrevételből, hogy ha $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$, akkor

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\beta},$$

ahol $a_0 = [\alpha]$ és $\beta = \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$.

2.3.7. Tétel. *Bármely valós irracionális szám reprezentálható végtelen egyszerű lánc törttel.*

Bizonyítás. Olyan eljárást adunk meg, amellyel tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irracionális számhoz megadhatjuk az azt reprezentáló végtelen egyszerű lánc törtet.

Előbb egy $x_0, x_1, \dots$ valós számokból álló sorozatot, majd ennek segítségével egy egészekből álló $a_0, a_1, \dots$ sorozat adunk meg.

Legyen először

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha, \\ x_i &= \frac{1}{x_{i-1} - [x_{i-1}]}, \quad \text{ha } i > 0, \end{aligned}$$

amely nyilván egy végtelen sorozat, ugyanis mindegyik tagja irracionális.

Ezek után alkossuk meg a következő — egészekből álló — sorozatot.

$$a_i = [x_i] \quad \text{minden } i \in \mathbb{N}_0\text{-ra.}$$

A definíciók alapján egyrészt $a_0 = [\alpha]$, másrészt minden $k \geq 1$ -re

$$a_k = [x_k] = \left[\frac{1}{x_{k-1} - a_{k-1}} \right].$$

Következő lépésként azt mutatjuk meg, hogy ha $k \geq 1$, akkor $a_k \in \mathbb{N}$. Valóban,

$$0 < x_k - a_k = x_k - [x_k] < 1,$$

amiből

$$(16) \quad x_{k+1} = \frac{1}{x_k - a_k} > 1.$$

Végül meg kell még mutatni, hogy a kapott $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ végtelen egyszerű lánc tört az α valós számot reprezentálja, azaz

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Ezen állításunk a következő lemmából fog következni, amely alapján a tétel bizonyítását befejezhetjük.

2.3.8. Lemma. *Legyen $a_0, a_1, a_2, \dots$ egészek olyan sorozata, amelyben legföljebb a_0 nem pozitív, és alkossuk meg az (5)-ben definiált $(p_n), (q_n)$ sorozatot. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+$ valós számra és $n \geq 2$ indexre*

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{x}}} = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x \rangle = \frac{xp_{n-1} + p_{n-2}}{xq_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Megjegyzés. E lemma láthatóan a 2.3.1. Lemma általánosítása, csak most $\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x \rangle$ nem egyszerű lánc tört, hanem csak egy arra hasonlító formális kifejezés. Mivel tetszőleges k -ra p_k, q_k számok csak $a_0, a_1, \dots, a_k$ -től függenek, azért a p_i, q_i számok $i < k$ esetén a jelen esetben is egészek.

Bizonyítás. n -szerinti teljes indukciót alkalmazunk.
 $n = 2$.

$$\begin{aligned} \langle a_0, a_1, x \rangle &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x}} = a_0 + \frac{x}{a_1x + 1} \\ &= \frac{a_0(a_1x + 1) + x}{a_1x + 1} = \frac{x(a_1a_0 + 1) + a_0}{a_1x + 1} \\ &= \frac{xp_1 + p_0}{xq_1 + q_0}. \end{aligned}$$

Legyen $n > 2$ és tegyük föl, hogy állításunk igaz minden $2 \leq k < n$ -re. Mivel

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_n, x \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x} \rangle,$$

az indukciós föltétel alapján

$$\begin{aligned} \langle a_0, a_1, \dots, a_n, x \rangle &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{x}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{x}\right)q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{p_n + \frac{1}{x}p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{x}q_{n-1}} \\ &= \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}} \end{aligned}$$

A tétel bizonyításának folytatása.

Írjuk át (16)-ot

$$x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}} \quad (k \geq 0)$$

alakba, és alkalmazzuk az (x_n) sorozat konstrukciójában.

$$\alpha = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = \dots,$$

amiből

$$\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1} \rangle$$

adódik tetszőleges n -re.

Vegyük észre, hogy rögzített n -re az első $n+1$ kezdő szelete az $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ végtelen lánctörtnek ugyanaz, mint az $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1} \rangle$ lánctörté.

Az előbbi Lemma szerint

$$\begin{aligned} \alpha = x_0 &= \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1} \rangle \\ &= \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}, \end{aligned}$$

így ha a korábbi jelölésekkel $\alpha_k = \frac{p_k}{q_k}$ minden $k \leq n$, akkor

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_n &= \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{(-1)(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}. \end{aligned}$$

Ezek után a tétel igazolásához már csak egy rutin becslést kell alkalmaznunk, amelyben fölhasználjuk, hogy $x_{n+1} > a_{n+1}$, ami a definícióból világos.

$$\begin{aligned} |\alpha - \alpha_n| &= \frac{1}{(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &< \frac{1}{(a_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{1}{q_nq_{n+1}}, \end{aligned}$$

amiből már következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ létezik, továbbá

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

2.3.9. Következmény. Legyen α irracionális szám. A korábbi jelölésekkel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Példák.

1. Megadjuk $\alpha = \sqrt{23}$ lánc tört előállítását.

Vegyük észre, hogy $4 < \sqrt{23} < 5$, és alkalmazzuk az 2.3.7. Tétel bizonyításához használt eljárást.

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{23} = 4 + (\sqrt{23} - 4) & a_0 &= 4 \\ x_1 &= \frac{1}{x_0 - [x_0]} = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{23} - 3}{7} & a_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{7}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{2} \\ &= 3 + \frac{\sqrt{23} - 3}{2} & a_2 &= 3 \\ x_3 &= \frac{1}{x_2 - [x_2]} = \frac{2}{\sqrt{23} - 3} = \frac{2(\sqrt{23} + 3)}{14} \\ &= \frac{\sqrt{23} + 3}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 4}{7} & a_3 &= 1 \\ x_4 &= \frac{1}{x_3 - [x_3]} = \frac{7}{\sqrt{23} - 4} = \frac{7(\sqrt{23} + 4)}{7} \\ &= \sqrt{23} + 4 = 8 + (\sqrt{23} - 4) & a_4 &= 8 \\ x_5 &= \frac{1}{x_4 - [x_4]} = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{23} - 3}{7} & a_5 &= 1 \end{aligned}$$

Látható, hogy $x_5 = x_1$, s ha az eljárást folytatjuk, akkor a továbbiakban $x_6 = x_2$, $x_7 = x_3$, $\dots$, $x_9 = x_5 = x_1$ adódik, ami a lánc tört valamiféle periódikusságát jelenti. Kaptuk tehát, hogy a $\sqrt{23}$ -at előállító lánc tört nem más, mint

$$\sqrt{23} \cong \langle 4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \dots \rangle = \langle 4, \overline{1, 3, 1, 8} \rangle,$$

ahol a tizedestörteknél szokásos írásmódot használtuk. E „jelenséggel” rövidesen foglalkozni fogunk.

2. A π lánc tört alakja.

Ha fölhasználjuk, hogy

$$\pi = 3, 141592653 \dots,$$

akkor az előbbi módon számolva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \pi = 3 + (\pi - 3) & a_0 &= 3 \\
 x_1 &= \frac{1}{x_0 - [x_0]} = \frac{1}{0,141592\dots} = 7,06251330\dots & a_1 &= 7 \\
 x_2 &= \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{1}{0,06251330\dots} = 15,99659440\dots & a_2 &= 15 \\
 x_3 &= \frac{1}{x_2 - [x_2]} = \frac{1}{0,99659440\dots} = 1,00341723\dots & a_3 &= 1 \\
 x_4 &= \frac{1}{x_3 - [x_3]} = \frac{1}{0,00341723\dots} = 292,63724\dots & a_4 &= 292 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Ha tovább számolunk ílymódon, akkor a

$$\pi \cong \langle 3, 7, 15, 1, 292, \dots \rangle$$

lánctört előállítását kaphatjuk, amit tetszőleges sok nevezőre számíthatunk ki. A lánctört nem véges, tehát π irracionális szám.

3. Az e lánctört előállítása.

Fölhasználva, hogy $e = 2,718281828\dots$, 1737-ben Euler megmutatta, hogy

$$\frac{e-1}{e+1} \cong \langle 0, 2, 5, 10, 14, 18, \dots \rangle,$$

ahol a nevezők a 10-estől kezdve számtani sorozatot alkotnak.

Tovább számolva kapta, hogy

$$\frac{e^2-1}{e^2+1} \cong \langle 0, 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle,$$

ahol a nevezők szintén számtani sorozatot alkotnak.

Végül az előbbi két lánctörtből már megkapta az e előállítását,

$$e \cong \langle 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots \rangle,$$

ahol az egymást követő páros számokat rendre két-két 1-es választja el. Mivel e lánctört végtelen, adódik az e irracionális volta.

Egy érdekes tény, hogy az e tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 7-es jegy után a kétszer (és nem többször!) előforduló 1828 éppen Lev Tolsztoj, a nagy orosz regényíró, születési éve.

Megjegyzés. Az előbbi két példa volt az első lépés Euler azon sejtésének bizonyítása felé, hogy e két nevezetes konstans — Euler elnevezésével — *transzcendens szám*, mert „a velük való foglalkozás meghaladja az algebrai módszerek erejét”.

2.4. Periódikus lántörtek.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ végtelen egyszerű lántört *periódikus*, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$ egész, hogy minden elég nagy r egészre $a_r = a_{n+r}$, azaz fölírható

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, b_1, \dots, b_n, \dots \rangle.$$

Ez esetben gyakran alkalmazzuk az

$$\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_m, \overline{b_1, \dots, b_n} \rangle$$

írásmódot. Azt is mondjuk, hogy $(b_1, \dots, b_n)$ az α lántört egy lehetséges *periódusa*. A legkisebb ilyen n -et az α lántört periódusa hosszának nevezzük.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy $\sqrt{23}$ lántört alakja periódikus, míg e, π lántört alakja nem periódikus.

Tekintsük a $\gamma = \langle 5, 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots \rangle = \langle 5, \overline{2, 3} \rangle$ végtelen egyszerű lántörtet. Ha β -val jelöljük a $\langle 2, 3, 2, 3, \dots \rangle = \langle \overline{2, 3} \rangle$ lántörtet, akkor γ

$$(17) \quad \gamma = 5 + \frac{1}{\beta}$$

alakban írható.

A β lántörtre fönnáll a

$$\beta = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\beta}}$$

egyenlőség, amelyből β -ra a

$$3\beta^2 - 6\beta - 2 = 0$$

másodfokú egyenlet adódik. Ennek pozitív gyöke (hiszen $\beta > 0$)

$$\beta = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}.$$

Ezt (17)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\gamma = \frac{27 + \sqrt{15}}{6},$$

amely szintén tekinthető egy alkalmas másodfokú egyenlet egy (pozitív) gyökének.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám *kvadrátikus irracionális*, ha

$$\alpha = \frac{a + b\sqrt{c}}{d}$$

alakban írható, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, továbbá $d \neq 0$ és $c > 0$ nem négyzetszám.

Megjegyzések.

(i) Világos, hogy a kvadratikus irracionálisok épp az egész együtthatós másodfokú polinomok irracionális zéróhelyei. Maga az elnevezés is innen ered.

(ii) Látható, hogy az előbbi γ, β periódikus lánc törtek kvadratikus irracionálisok.

Észrevételünk speciális esete a következő tételnek.

2.4.1. Tétel. *Bármely periódikus egyszerű lánc törte kvadratikus irracionális szám és megfordítva, minden (valós) kvadratikus irracionális szám egyszerű lánc törte alakja periódikus.*

Tételünket nem bizonyítjuk. Az első állítás igazolásának önálló elvégzését ajánljuk. A második rész már munkaigényesebb. Az érdeklődők megtalálják például Niven és Zuckermann Bevezetés a számelméletbe c. könyvében.

Emlékezzünk vissza, hogy

$$\sqrt{23} = \langle 4, \overline{1, 3, 1, 8} \rangle,$$

azaz a periódus közvetlenül az első jegy, a $\sqrt{23}$ egész része után kezdődött, amit úgy is mondhatunk, hogy lánc törte alakja „tisztán periódikus”. Megmutatható, hogy bármely $d \in \mathbb{N}$ -re, valahányszor d nem négyzetszám, mindannyiszor $\sqrt{d}$ lánc törte alakja tisztán periódikus. Sőt még ennél is több igaz, a periódus bizonyos szimmetria tulajdonsággal is rendelkezik. Nevezetesen, a következő tétel igazolható.

2.4.2. Tétel. *Ha $d \in \mathbb{N}$ nem négyzetszám, akkor*

$$\sqrt{d} = \langle a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_3, a_2, a_1, 2a_0} \rangle,$$

ahol $a_0 = [\sqrt{d}]$.

Példák.

$$\sqrt{19} = \langle 4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8} \rangle$$

$$\sqrt{73} = \langle 8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16} \rangle$$

$$\sqrt{94} = \langle 9, \overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18} \rangle$$

Megemlíttjük, hogy a száznál kisebb nem négyzetszámok közül a $\sqrt{94}$ lánc törte alakjának a leghosszabb a periódusa, 16 elemű.