

Határozatlan egyenletek.

Ókor és kora középkor.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2016. március 10.

Kína a l.e. l. évezredben: A matematika művészete kilenc könyvben.

Feladatok a 2. könyvből.

- **38. Probléma.** 576 rézpénzért 78 nagy- és kisméretű bambuszt vásároltunk. Mennyibe kerültek az egyes fajták?
- **Megjegyzés.** Állandó feltétel: a kétféle dolog árának különbsége 1 rézpénz. Ki nem mondott feltétel: az ár egész szám.
- **Megoldás** (mai szimbolikával): Ha most x, y jelöli a vásárolt nagy- ill. a kisméretű bambuszok számát, míg u, v az áraikat, akkor a megoldandó egyenletrendszer

$$x + y = 78$$

$$xu + yv = 576$$

$$u = v + 1$$

Kína a l.e. l. évezredben.

Feladatok a 2. könyvből.

- Számoljunk:

$$78v + x = 576,$$

mivel

$$576 = 7 \cdot 78 + 30,$$

az egyenlettel összevetve

$$v + \frac{x}{78} = 7 + \frac{30}{78}$$

adódik, amiből látható az egyetlen egész megoldás

$$v = 7 \quad \text{és} \quad x = 30.$$

- 30 nagy- és 48 kisméretűt vettünk, egyenként 8, ill. 7 pénzért.

Kína a l.e. l. évezredben.

Bonyolultabb problémák a könyvből.

- Az egyes tárgyak mennyiségét különböző mértékegységekben adták meg (az átszámításokhoz táblázatok álltak rendelkezésükre).
- Általános alakjuk az

$$x + y = \frac{m}{n}$$

$$ux + vy = A$$

$$v = u + 1$$

egyenletrendszer. Mindig teljesült, hogy $An > m$.

Kína a I.e. I évezredben.

Megoldási séma.

1. lépés. Az $x' = nx$, $y' = ny$ helyettesítés után:

$$\begin{aligned}x' + y' &= m \\ ux' + vy' &= An \\ v &= u + 1\end{aligned}$$

Kína a I.e. I évezredben.

Megoldási séma (folytatás).

2. lépés. Megoldja az egyenletrendszert az ismert módon.

$$u + \frac{y'}{m} = \frac{An}{m},$$

- amiből az u az $\frac{An}{m}$ tört egészrésze,
- míg az y' e tört törtrészeinek számlálója.
- A könyvben szabály formájában megadják azt az eljárást, amellyel elő kell állítani az $\frac{An}{m}$ tört számlálóját és nevezőjét, majd azt, hogy mindebből hogyan kapható a tört egészrésze, ill. törtrésze.

Kína a I.sz. I évezredben.

II.-V. század.

- A III. századig szinte csak olyan feladatokkal találkozunk, amelyeknek egyetlen pozitív egész megoldása van, vagy csak egyetlen megoldás megadását célozzák.
- A III. századtól megjelennek olyan feladatok is, amelyeknek több pozitív egész megoldása van, és azokat olykor meg is keresik.
- Csen Luan kommentárja (570 körül) szerint a 190 körül élt Hszi Je könyve már tartalmazta a következő probléma megoldását.
- 100 rézpénzért hány kakast, tyúkot és csirkét vásárolhatunk, ha összesen 100 baromfit veszünk, és egy kakas ára 5, egy tyúk ára 4 rézpénz, míg egy rézpénzért 4 csirkét adnak?
- Csen Luan megoldása: **15 kakast, 1 tyúkot és 84 csirkét vettünk.**
- Ez az egyetlen pozitív egész megoldás.

Kína a I.sz. I évezredben.

A „száz madár probléma”.

- Az előbbi probléma más számokkal igen sok keleti könyvben szerepel.
- A középkori Európában harminc volt a madarak száma.
- Csen Lua más adatokkal (árakkal) is megoldotta a problémát, például, ha a kakas ára 4, a tyúk 3 rézpénz, továbbá 3 csirkét adnak egy rézpénzért.
- A megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned}4x + 3y + \frac{z}{3} &= 100 \\ x + y + z &= 100\end{aligned}$$

- Csen Lua (egyetlen pozitív) megoldása: **$x = 8$, $y = 14$, $z = 78$,**
- bár van még egy pozitív: **$x = 16$, $y = 3$, $z = 81$**

Kína a I.sz. I évezredben.

Csang Csiu-csien, VI. század.

- Az ilyen feladatnak nemcsak egy pozitív egész megoldása lehet,
- és meg is adta az összes pozitív megoldást.
- Az ő feladatában az árak rendre 5, 3, $\frac{1}{3}$ voltak.
- Egyenletrendszere

$$\begin{aligned} 5x + 3y + \frac{z}{3} &= 100 \\ x + y + z &= 100, \end{aligned}$$

- amelynek 3 pozitív egész megoldása van:

-

4 kakas	18 tyúk	78 csirke,
8 kakas	11 tyúk	81 csirke,
12 kakas	4 tyúk	84 csirke.

Kína a I.sz. I évezredben.

Csang Csiu-csien, VI. század.

- **Észrevette:** a kakasok száma mindig 4-gyel nő, a tyúkoké 7-tel csökken, míg a csirkéké 3-mal nő.
- Igazolható, hogy ez az összes pozitív egész megoldás.
- Van még egy nemnegatív megoldás is, a 0, 25, 75,
- ami alapján már az általános megoldást is föl tudjuk írni

$$x = 4t, \quad y = 25 - 7t, \quad z = 75 + 3t,$$

ahol $t \in \mathbb{Z}$; s a nemnegatív megoldások a $t = 0, 1, 2, 3$ értékekhez tartoznak.

- DE ez már mai kiegészítés!

A probléma további élete.

Néhány további szerző.

a VII. századi kínai Liu Csun-feng, a szintén kínai Hszi Cse-vej, a VIII. századi yorki Alciun, a X. századi arab (egyiptomi) Abu Kamil, a XII. századi indus Bhaszkara, és a XIII. század elején élt pisai Leonardo (ismertebb nevén Fibonacci).

Az első teljes megoldás.

A XV. századi szamarkandi Dzamsid al-Kasi adta meg (a középkori iszlám matematikusok egyik legnagyobbika).

Még egy keleti problémásereg a III.-IV. századból.

Szun-ce feladata.

Sziang csin: *Adott ismeretlen számú tárgy. Ha hármásával leszámoljuk, a maradék 2 lesz, ha ötösével, úgy a maradék 3, míg ha hetesével, akkor a maradék 2. Hány tárgy van?*

Absztrakt megfogalmazásban.

Keressük meg azt a számot (keressünk olyan számokat), amely(ek) 3, 5, és 7-tel osztva rendre 2, 3, 2 maradékot ad(nak).

Szun-ce feladata.

A Sziang csin-beli megoldás.

- A hármassával történő leszámolásnál és a 2 maradéknál vegyél 140-et,
- az ötösével történő leszámolásnál és a 3 maradéknál vegyél 63-at,
- a hetesével történő leszámolásnál és a 2 maradéknál pedig végy 30-at.
- Számold ezeket össze: $140 + 63 + 30$ az 233. Vonj ki ebből 210-et, és ekkor megkapod a keresett mennyiséget, ami 23.

Egy Gauss által bevezetett fogalom.

Definíció. Legyen $n > 1$ egész, $a, b \in \mathbb{Z}$. Azt mondjuk, hogy **a kongruens b -vel modulo n , ha $n \mid a - b$.**

Jelölése: $a \equiv b \pmod{n}$.

Szun-ce feladata.

Áttekintés Gauss terminológiájával.

- A kínai írrok a legkisebb olyan $x \in \mathbb{N}$ számot kereste meg, amelyre

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

- azaz az előbbi ún. **lineáris kongruenciarendszer** legkisebb pozitív megoldását kereste meg.
- Kövessük az eredeti megoldás lépéseit ezen új technikával.

Szun-ce feladata.

Az eredeti megoldás Gauss terminológiájával.

- 1 Először olyan u, v, w pozitív egészeket keres, amelyekre

$$35u \equiv 1 \pmod{3}$$

$$21v \equiv 1 \pmod{5}$$

$$15w \equiv 1 \pmod{7}$$

- 2 A kongruenciarendszer helyett 3 kongruenciát kell megoldania.
- 3 Ezeket egyszerűsíti

$$2u \equiv 1 \pmod{3}$$

$$v \equiv 1 \pmod{5}$$

$$w \equiv 1 \pmod{7}$$

- 4 A megoldások: $u = 2, v = 1, w = 1$.

Szun-ce feladata.

Az eredeti megoldás Gauss terminológiájával.

- 1 Az $u = 2, v = 1, w = 1$ megoldások alapján az

- 2

$$x = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 140 + 63 + 30 = 233$$

számot határozza meg,

- 3 amelyből a legkisebb pozitív megoldás:

$$x = 233 - 2 \cdot 105 = 23.$$

- 4 Ugyanis $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Megjegyzés.

Az ún. „**kínai maradéktétel**” áll előttünk, s Szun-ce megoldása pontosan az az eljárás, amelyen a tétel egyik ma is alkalmazott bizonyítása alapul.

Két hasonló probléma az I. évezredből.

Még egy kínai.

Egy 17 tagú kalózcsoport egy zsák aranypénzt rabolt. Amikor megpróbálták egyenlő arányban elosztani a zsákmányt 3 érme kimaradt. E maradékon összevesztek, aminek során egy kalózt társai megölték. Újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, de most 10 érme maradt ki. Ezen ismét összezsúrtak, aminek végén ismét megölték egy társukat. Ekkor azonban már a hátramaradottak el tudták osztani a zsákmányt egyenlő arányban egymás között. Mennyi lehetett a zsákmányolt aranypénzek száma?

Brahmagupta feladata a VII. századból.

Ha egy kosárból a tojásokat kettesével, hármassával, négyesével, ötösével, vagy hatosával szedjük ki mindig marad egy tojás a kosárban. Ha azonban hetesével szedjük ki, egy sem marad benne. Keressük meg a kosárban levő tojások (legkisebb) számát.

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

- Jelentősen meghaladták Diophantoszt, ők az összes egész megoldást keresték, míg a görög megelégedett egyetlen racionális megoldással is.
- Az $ax \pm by = c$ alakú egyenletek, ahol $a, b, c > 0$ egészek, egész megoldásainak megadásával először Aryabhata foglalkozott. Módszerét utódai jelentősen továbbfejlesztették. Egy ma is használt eljárást fejlesztettek ki, amelyet az $ax + by = c$ egyenleten mutatjuk be mai jelöléseket használva.

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

Az eljárás a következő:

- (1) Ha létezik a -nak és b -nek olyan m közös osztója amelyre $m \nmid c$ teljesül, akkor nincs egész megoldás.
- (2) Ha ilyen m nincs, akkor osszuk végig az egyenletet $\text{ln.k.o.}(a, b)$ -vel, s így csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor $\text{ln.k.o.}(a, b) = 1$.
- (3) Kövessük most Euklidész algoritmusát, mellyel a legnagyobb közös osztót határozzuk meg, és tegyük föl, hogy $a > b$.

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

Az euklideszi algoritmus legyen az alábbi:

$$\begin{aligned} a &= a_1 b + r_1 \quad (0 \leq r_1 < b), \\ b &= a_2 r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1), \\ r_1 &= a_3 r_2 + r_3 \quad (0 \leq r_3 < r_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

Az első egyenlőségből azt kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$, míg a másodikból

azt, hogy $\frac{b}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$, amit az előző egyenlőségbe helyettesítve

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

adódik.

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

Az eljárást folytatva kapjuk, hogy

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

A fenti típusú kifejezést ma **lánctörtnek** nevezzük. (Ez most természetesen véges.)

- Az indusok az $\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ írásmódot használták (később ez terjedt el a középkori Európában), míg ma az $\frac{a}{b} = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ jelölés a gyakori.

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

- Világos, hogy az eljárás akkor is működik, ha $a < b$. Ez esetben $a_1 = 0$, s minden ugyanúgy megy ezután, mint a korábbi esetben.
- Lánctörtek segítségével a következőképpen kaphatjuk meg az $ax + by = 1$ lineáris, kétismeretes határozatlan egyenlet megoldását, ahol $\text{In.k.o.}(a, b) = 1$.

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

- (1) Az euklideszi algoritmus segítségével fejtjük lánctörtbe az $\frac{a}{b}$ törtet:

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle.$$

- (2) Legyen α_i ezen lánctört i -edik kezdőszelete, azaz

$$\alpha_i = \langle a_0, a_1, \dots, a_i \rangle \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

valamint legyen $\frac{p_i}{q_i}$ az i -edik kezdőszelet egyszerűsített alakja $(i = 0, 1, \dots, n)$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $p_n = a$ és $q_n = b$.

- (3) Bármely i -re $(1 \leq i \leq n)$ teljesül, hogy

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i-1}.$$

2. Határozatlan egyenletek a korai hindu matematikában.

(4) Mindezek alapján az adódik, hogy

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

azaz $x = q_{n-1}$ és $y = -p_{n-1}$ megoldása az

$$ax + by = (-1)^{n-1}$$

egyenletnek, amiből már könnyedén megkapható az $ax + by = 1$ egyenlet tetszőleges egész megoldása.

Az első „igazi” európai matematikus.

A PISAI LEONARDO (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei: Liber abaci (1202, 1228), Practica geometrie (1220), Flos (1225) és Liber quadratorum (1225).
- A könyvek címeiről:
- Liber abaci → Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve (abacus vagy abare az abaci eredete?),
- Flos „Virágocská”, zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is.
- Liber quadratorum → Négyzetszámok könyve (Sain M.??? sic!)

Leonardo: Liber abaci

Egy érdekes feladat a XII. fejezetből.

7 anyóka mendegél Róma felé, minden anyókéval mendegél 7 öszvér, minden öszvéren 7 zsák van, minden zsákban 7 kenyér van, minden kenyér mellett 7 kés van, minden kés 7 tokban van. Mennyi mindezek összege?

Egy régebbi változat: RHIND 79. feladat.

- Van 7 ház, 49 macska, 343 egér, 2401 kalász, 16807 búzaszem.
- Vélhetően a következő feladatról van szó:
- Ha van 7 ház, minden házban 7 macska, minden macska megeszik 7 egeret, minden egér elpusztítana 7 kalászt, és minden kalászban 7 mag van, akkor hány szem gabona menekül meg?

Leonardo: Liber abaci

Középkori orosz kézirat.

Mendegél 7 anyóka, minden anyókánál 7 bot van, minden boton 7 ágacska, minden ágacsán 7 tarisznya, minden tarisznyában 7 lepény, minden lepényben 7 veréb, minden verébben 7 zúza. Mennyi ez összesen?

XIX. századi angol nonszensz-vers (nursery rhyme).

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits,
Kits, cats, sacks, and wiwes,
How many were going to St. Ives?

Leonardo: Liber abaci

A probléma, amelyet mindenki ismer.

Hány pár nyúl jön a világra egy év alatt, ha kezdetben egyetlen páruk van, és minden egyes hónapban minden pártól egy újabb pár születik föltéve, hogy a párok a második hónaptól kezdődően produktívak.

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 1.

A 30 madár probléma: Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonként 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké $\frac{1}{2}$. Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtákból?

Leonardo: Liber abaci

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 2.

A megoldás. A feladat az

$$\begin{aligned}x + y + z &= 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 30\end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszerre vezet, amelynek egyetlen pozitív megoldása az $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$.

Megjegyzés. E feladat egy variánsa az ókori kínai, hindu, valamint a kora-középkori arab forrásokból is ismert **100 madár problémának**.

Leonardo: Liber abaci

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 3.

1. Lóvásárlási probléma. Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

Megoldás.

Ha s a ló ára, akkor megoldandó az ismeretlenekre:

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}y &= s \\ y + \frac{1}{4}x &= s\end{aligned}$$

egyenletrendszer, x és y a „kupeczek” pénze.

Leonardo: Liber abaci

A legkisebb egész megoldás:

$$\begin{aligned}x &= (3 - 1) \cdot 4 = 8 \\ y &= (4 - 1) \cdot 3 = 9 \\ s &= 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11\end{aligned}$$

Általánosítás 3 szereplőre.

2. Lóvásárlási probléma. A megoldandó egyenletrendszer most

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}(y + z) &= s \\ y + \frac{1}{4}(x + z) &= s \\ z + \frac{1}{5}(x + y) &= s\end{aligned}$$

Leonardo: Liber abaci

Megoldás 1.

- Általános jegyeket tartalmaz a **szöveges** megoldás.
- Új határozatlant vezet be: $x + y + z = t$,
- Kivonja belőle mindhárom korábbi egyenletét:

$$\frac{2}{3}(y + z) = \frac{3}{4}(x + z) = \frac{4}{5}(x + y) = t - s = D,$$

- A megoldandó egyenletrendszere így

$$\begin{aligned} y + z &= \frac{3}{2}D \\ x + z &= \frac{4}{3}D \\ x + y &= \frac{5}{4}D \end{aligned}$$

Leonardo: Liber abaci

Megoldás 2.

- x, y, z -re egész értéket akar kapni, ezért D -t 24-nek választja,
- így egyenletrendszere

$$y + z = 36$$

$$x + z = 32$$

$$x + y = 30$$

- amiből $x = 13, y = 17, z = 19$.

Megjegyzés.

Határozatlan egyenletrendszer esetén megoldása szerepel Diophantos Arithmetica c. könyvében, pl az I. 24 feladat megoldása.

Leonardo: Liber abaci

Egy meglepő feladat.

- A vásárlással kapcsolatos feladat — mai terminológiával — a következő egyenletrendszerre vezet.

$$x + y + z + \frac{1}{2}(u + v + w + t) = s$$

$$y + z + u + \frac{1}{3}(v + w + t + x) = s$$

$$\vdots$$

$$t + x + y + \frac{1}{8}(z + u + v + w) = s$$

Leonardo: Liber abaci

Leonardo megoldása.

-

$$x = 507, y = 171, z = 4029 - 4038, u = 1347$$

$$v = 451, w = 131, t = 1431$$

- Itt a z -re kapott megoldást „hiányként” értelmezte, s azért
- **nem oldható meg a feladat**, mert
- az egyik résztvevőnek
- **nincs elegendő pénze**.

Leonardo: Liber quadratorum

A 2. könyv nyitó problémája, palermoi János kérdése.

Melyik az a négyzetszám, amelyhez 5-öt adva is és 5-öt kivonva is négyzetszámok kapunk.

Mai szimbolikával.

Megoldandó az

$$x^2 + 5 = y^2$$

$$x^2 - 5 = z^2$$

egyenletrendszer.

Leonardo megoldása (az eredmény).

$$x = 3 + \frac{5}{12}, \quad y = 4 + \frac{1}{12}, \quad z = 2 + \frac{7}{12}.$$

Palermoi János kérdése.

Leonardo megoldása (a módszer).

- Kezdő lépésként általánosítja a problémát, mintha a következő egyenletrendszert kellene megoldania.

2

$$x^2 + C = y^2$$

$$x^2 - C = z^2$$

Leonardo terminológiája.

Abban az esetben, ha x^2 és C megoldása e problémának, akkor C számot **CONGRUUM**-nak nevezi, míg az x^2 négyzet a **QUADRATUS CONGRUENTUS**.

Palermoi János kérdése.

Az egyenletrendszer megoldása.

- Először összeadja az egyenleteket:

$$2x^2 = y^2 + z^2$$

- $y = u + v$ és $z = u - v$ helyettesítéssel az egyszerűbb

$$x^2 = u^2 + v^2$$

egyenletet kapja.

- Látható: x, u, v egy pitagoraszai számhármassal, aminek megkeresésére jól ismert módszer áll rendelkezésre.

- $x = a^2 + b^2$, $u = 2ab$, $v = b^2 - a^2$.

- Ha a, b páratlanok, akkor lehet 2-vel osztani:

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad u = ab, \quad v = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Palermoi János kérdése.

Leonardo tétele.

Ha a, b relatív prím egészek és $b > a$, akkor

- valahányszor a és b mindegyike páratlan, mindannyiszor $C = ab(b - a)(b + a)$ egy congruum és az ő kongruens négyzete

$$x^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right)^2.$$

- Ha pedig a páratlan és b páros, vagy megfordítva, akkor $C = 4ab(b - a)(b + a)$ egy congruum, és az ő kongruens négyzete $x^2 = (a^2 + b^2)^2$.

Palermoi János kérdése.

Speciális esetek.

- 1 Az $a = 1$ és $b = 9$ esetre Leonardo azt kapta, hogy $C = 720 = 5 \cdot 12^2$ és $x = 41$, $y = 49$, $z = 31$.
- 2 Az x, y, z -re kapott értékeket 12-vel osztva kapta Leonardo az eredeti probléma megoldását, amikor $C = 5$,

$$x = 3 + \frac{5}{12}, \quad y = 4 + \frac{1}{12}, \quad z = 2 + \frac{7}{12}.$$