

A Középbirodalom korának aritmetikája Egyiptomban.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2016. február 11.

Néhány történelmi mérföldkő.

A két birodalom.

- Kapcsolat Mezopotámiával a 4. évezred vége felé: az első írás, a **hieroglifikus**, kialakulása.
- Az első egyesítés i.e. 3100 körül, NARMER (Menész) fáraó, a vezető szerep Felső-Egyiptomé. A „Narmer-kőtábla” (jellegzetes ábrázolás).
- ÓBIRODALOM kora: piramisépítések, és más építészeti, szobrászati emlékek (Abu Simbel, írrok), irodalmi alkotások (Imhotep intelmei)
- I.e. 2200-tól az első átmeneti kor: a birodalom kettéválk.
- kb. I.e. 2040-ben II. Mentuhotep ismét egyesíti a két királyságot. → a KÖZÉPBIRODALOM kora.
- Fajjumi víztározó, Színuhe története, matematikai papirusztekercsek (Rhind, Golenisev, stb.).

Néhány történelmi mérföldkő.

A két birodalom.

- I.e. 1750 körül, külső (hikszosz) támadás, megbukik az egységes birodalom → a második átmeneti kor.
- 1600-tól ismét egységes birodalom: az ÚJBIRODALOM.
- I.e. 280: Manetho listája a 31 dinasztiáról.

Az egyiptomi írások.

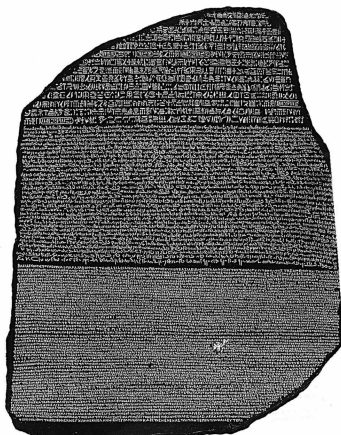
- A **hieroglifikus** írás
 - ▶ képirás, hasonló a másutt, pl. Mezopotámiában használthoz,
 - ▶ eredete nem világos,
 - ▶ első változata vélhetően még az Óbirodalom előtti időből származik.
- 2500 körül egyszerűsödött, „kurzívabbá” vált Ez a **hieratikus** írás vált általánosan használttá.
- Az Újbirodalom vége felé, kb. a I.e. VII. században további egyszerűsítés, kurziválás: a **démotikus** írás.

Néhány történelmi mérföldkő.

Az egyiptomi írások megfejtése.

- 1799, a **Rozetta kő** megtalálása.
- A I.e. II. század elejéről származik, egyiptomi (hieroglifikus és démotikus) írással, valamint
- görög nyelven szerepel ugyanaz a szöveg:
- Memphis főpapja istenként, istenek fiaként köszönti V. Ptolemaioszt.
- 1820-tól Champolion és T. Young
 - ▶ előbb a görög ismeretében megfejtette a két egyiptomi írást,
 - ▶ majd interpolációval megkapták a hieratikus írás megfejtését is.

Rosetta kő.



Az egyiptomi aritmetika.

Hieroglifikus számok

1	I		6
2	II		7
3	III		8
4	IIII		9
5	IIII		
10	∩		
100	9		
1 000	Lotus		
10 000	?		
100 000	Tadpole or bird		
1 000 000	Not in later use		

Az egyiptomi aritmetika.

Hieratikus és démotikus számok

x	10^0	10^1	10^2	10^3
1	I	∩	∩	6
2	II	∩	∩	2
3	III	∩	∩	2
4	—	∩	∩	2
5	∩	∩	∩	2
6	∩	∩	∩	2
7	∩	∩	∩	2
8	∩	∩	∩	2
9	∩	∩	∩	2

Az egyiptomi aritmetika.

Számírásuk.

- 10-es alapú és nem helyiértékes,
- a 10 hatványainak különböző jele volt.
- Törteket is használtak, DE ...

Aritmetika: összeadás.

- Additív jellegű,
- ebben a rendszerben egyszerű összeadni.
- Kezdetben minden műveletet a kettőzésre és az összeadásra vezettek vissza,
- később tízszeresek és feleztek is.

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás kettőzésekkel (hieroglifikusan): $12 \cdot 12$.

			1	12
			2	24
			/4	48
			/8	96 sum 144

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás kettőzésekkel (mai jelölésekkel).

- Ismételt összeadásként végezték: kettőzések után.
- A $12 \cdot 13$ kiszámítása (mai számírással):

1	13
2	26
4	52
8	104

- Az első oszlopban a 4-mal jelzett sorokban $4 + 8 = 12$ áll, így a második oszlop alapján

$$12 \cdot 13 = 52 + 104 = \mathbf{156}.$$

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás tízszerézéssel és felezéssel (hieroglifikusan): $16 \cdot 16$.

			/1
			/10
			/5

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás tízszerézéssel és felezéssel (mai jelölésekkel)

A $17 \cdot 13$ kiszámítása tízszerézéssel és felezéssel: a

1	13
2	26
10	130
5	65

- számolás alapján a $17 \cdot 13$ szorzat, lévén $17 = 2 + 10 + 5$, nem más, mint $26 + 130 + 65$, azaz **221**.

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás mindkét úton (hieroglifikusan): $15 \cdot 110$

		/1	110
		/2	220
		/4	440
		/8	880 sum 1650
Multiplication by ten:			
			1 110
		/10	1110
		/5	550 sum 1650

Az egyiptomi aritmetika.

Osztás.

- Az előbbi szorzás alapján az osztás is elvégezhető akkor, ha a hányados egész, mivel
- additív aritmetikájukban az $a : b$ ugyanis azt jelentette, hogy
- **számolj b -vel addig, amíg a -t kapsz.**

Az egyiptomi aritmetika.

Osztás.

- Bonyolultabb azonban a helyzet akkor, ha a hányados nem egész.
- Meg kell vizsgálni: hogyan számoltak törtekkel,
- egyáltalán milyen törtekkel tudtak számolni.

Törtek.

A korabeli egyiptomiak számára általában nem léteztek az $\frac{m}{n}$ alakú törtek, csak az $\frac{1}{n}$ alakúak.

Törtek: jelölések.

Saját jele csak az $\frac{1}{n}$ alakú törteknek, valamint a $\frac{2}{3}$ -nak volt. Ezeket $\overline{n}$ és $\overline{3}$ fogja jelölni.

Az egyiptomi aritmetika.

Számolás törtekkel.

- Három formula a Londoni börtökercsből.

•

$$\begin{aligned}\overline{6} + \overline{6} &= \overline{3} \\ \overline{6} + \overline{6} + \overline{6} &= \overline{2} \\ \overline{3} + \overline{3} &= \overline{3}\end{aligned}$$

Számolás törtekkel.

- Ezekből könnyen kaphatók a Rhind-papiruszon gyakran alkalmazott

•

$$\begin{aligned}\overline{3} + \overline{6} &= \overline{2} \\ \overline{2} + \overline{3} + \overline{6} &= 1 \\ \overline{3} &= \overline{2} + \overline{6}\end{aligned}$$

Az egyiptomi aritmetika.

Számolás törtekkel.

•

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{6}$$

$$\bar{3} + \bar{2} = 1 + \bar{6}$$

• egyenlőségek.

Az egyiptomi aritmetika.

Az elemi törtek kéteszerezése.

- Az egészek kétszerezése (tízszerzése, felezése) egyszerű, de a törteké?
- Világos, hogy a többszöri kétszerezés igen hosszú számalakokhoz vezet.
- Fontos fölfedezésük: az $\bar{n}$ kétszerezése ugyanazon számhoz vezet, mintha a 2-t n -felé osztanánk.
- A 2: n számolások eredményét az $5 \leq n \leq 101$ értékekre tartalmazza a Rhind papirusz elején található összeállítás.
- Természetesen csak a páros n -ekre.
- Ezen összeállításra Recto-ként is hivatkoznak olykor.

$$2 : 5 = \bar{3} + \bar{15}$$

$$2 : 7 = \bar{4} + \bar{28}$$

$$2 : 11 = \bar{6} + \bar{66}$$

$$2 : 13 = \bar{8} + \bar{52} + \bar{104}$$

$$2 : 17 = \bar{12} + \bar{51} + \bar{68}$$

$$2 : 19 = \bar{12} + \bar{76} + \bar{114}$$

$$2 : 23 = \bar{12} + \bar{276}$$

$$2 : 25 = \bar{15} + \bar{75}$$

$$2 : 29 = \bar{24} + \bar{58} + \bar{174} + \bar{232}$$

$$2 : 31 = \bar{20} + \bar{124} + \bar{155}$$

$$2 : 35 = \bar{30} + \bar{42}$$

$$2 : 37 = \bar{24} + \bar{111} + \bar{296}$$

$$2 : 41 = \bar{24} + \bar{246} + \bar{328}$$

$$2 : 43 = \bar{42} + \bar{86} + \bar{129} + \bar{301}$$

$$2 : 47 = \bar{30} + \bar{141} + \bar{470}$$

$$2 : 49 = \bar{28} + \bar{196}$$

$$2 : 51 = \bar{34} + \bar{102}$$

$$2 : 53 = \bar{30} + \bar{318} + \bar{795}$$

$$2 : 55 = \bar{30} + \bar{330}$$

$$2 : 59 = \bar{36} + \bar{236} + \bar{531}$$

$$2 : 61 = \bar{40} + \bar{244} + \bar{488} + \bar{610}$$

$$2 : 65 = \bar{39} + \bar{195}$$

$$2 : 67 = \bar{40} + \bar{335} + \bar{536}$$

$$2 : 71 = \bar{40} + \bar{586} + \bar{710}$$

$$2 : 73 = \bar{60} + \bar{219} + \bar{292} + \bar{365}$$

$$2 : 77 = \bar{44} + \bar{308}$$

$$2 : 79 = \bar{60} + \bar{237} + \bar{316} + \bar{790}$$

$$2 : 83 = \bar{60} + \bar{332} + \bar{415} + \bar{498}$$

$$2 : 85 = \bar{51} + \bar{255}$$

$$2 : 89 = \bar{60} + \bar{356} + \bar{534} + \bar{890}$$

$$2 : 92 = \bar{70} + \bar{130}$$

$$2 : 95 = \bar{60} + \bar{380} + \bar{570}$$

$$2 : 97 = \bar{56} + \bar{679} + \bar{776}$$

$$2 : 101 = \bar{101} + \bar{202} + \bar{303} + \bar{606}$$

A Rhind 2: n táblázata.

Hogyan számolhatták ki a szereplő hányadosokat?

- Nem egységes elveket alkalmaztak, de
- minden esetben úgy jártak el, hogy a
 - ▶ 2-t előállították, egy egynél nagyobb szám és
 - ▶ egy, kettő vagy három (elemi) tört összegeként.
 - ▶ Az első tag — mai terminológiával — olyan tört volt, amelynek számlálója az aktuális n osztó.
 - ▶ Az első tag megtalálásában nem voltak következtetések.
- Például, ha $n = 3k$, akkor mindig a $2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ fölbontást használták, ami megfelelne a

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$$
 azonosság alkalmazásának, DE
 - ez XX. századi és nem korabeli gondolat!

A Rhind 2: n táblázata.

1.példa: $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$.

- A papiuszon ez olvasható (mai jelölésekkel):

$$1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \text{ az } \frac{1}{12} \quad \frac{1}{3} \text{ az } \frac{1}{51} \quad \frac{1}{4} \text{ az } \frac{1}{68}.$$

- Vegyük észre: $1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$.
- A számolás

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ 11\frac{1}{3} \\ 5\frac{2}{3} \\ 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{array}$$

A Rhind 2: n táblázata.

1.példa: $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$.

- A maradék (a hiány) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$,
- hiszen $(1\frac{1}{4} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 2$,
- azaz ennyi kell még a 2-höz.
- Ezt még elő kell állítani 17-edekben.

A Rhind 2: n táblázata.

1.példa: $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$.

- Ennek kiszámítása

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{17} \\ \frac{1}{34} \\ \frac{1}{51} \\ \frac{1}{68} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{array}$$

- Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy közben fölhasználta az

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

egyenlőséget.

A Rhind 2: n táblázata.

2.példa: $2: 31 = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$

- A kezdő sor:

$$1 + \overline{2} + \overline{20} \text{ az } \overline{20}, \quad \overline{4} \text{ az } \overline{124} \quad \overline{5} \text{ az } \overline{155}.$$

- A számolás az előbbihez hasonló

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{124} \\ \frac{1}{155} \end{array} \quad \begin{array}{r} 31 \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \\ \frac{4}{5} \end{array}$$

- A papiuszon az írrok az első sort is megjelölte, ami másolási hiba.
- A 2 fölbontása most

$$2 = \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

A Rhind 2: n táblázata.

Elemzés

- Az előző két esetben a 2 fölbontása első tagja

$$1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

$$1\frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{31}{20},$$

- azaz olyan tört, amelynek számlálója épp a kettőzendő tört nevezője.
- Utána előbb ezt kiegészítette 2-re,
- majd a kiegészítést előállította megfelelő törtekként.
- Hogyan jött rá az írrok???

A Rhind 2: n táblázata.

3.példa: $2:35 = \overline{30} + \overline{42}$

- A számolás eltér az eddigiektől.
- Az első sor

$$1 + \overline{6} \text{ az } \overline{30} \quad \overline{3} + \overline{6} \text{ az } \overline{42}$$

- A számolás

$$\begin{array}{r} 1 \quad 35 \\ \overline{30} \quad 1 + \overline{6} \\ \overline{42} \quad \overline{3} + \overline{6} \end{array}$$

- Mi a vörös számok — kisegítő számoknak fogjuk nevezni — szerepe?
- A 7 és az 5 jelezheti az $1\frac{1}{6}$ -ban és $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ -ban a hatodik számát, amit a kezdő hatos is alátámaszt.
- A fölbontás: $2 = (1 + \frac{1}{6}) + (\frac{2}{3} + \frac{1}{6})$.

Az egyiptomi aritmetika.

A Rhind 23. feladata.

Mi egészíti ki a $\overline{3} + \overline{15}$ -öt 1-re?

Az eredmény.

10 1 összesen : 11 a maradék 4.

A megoldás.

- Számolj 15-tel, míg 4-et kapsz.
-

$$\begin{array}{r} 1 \quad 15 \\ \overline{10} \quad 1 + \overline{2} \\ \overline{5} \quad 3 \\ \overline{15} \quad 1 \end{array}$$

- A jelzett sorok jobb oldalán $3 + 1 = 4$ található, így $\overline{5} + \overline{15}$ az, amit hozzá kell adni.

Az egyiptomi aritmetika.

Elemzés.

- A feladat lényegében egy

$$1 - (\overline{3} + \overline{15})$$

kivonás.

- A vörös kisegítő számok mutatják, hogy 15-ökben kell számolni: az $\overline{3}$ és $\overline{10}$ számlálói 15-ödben.
- Maga a szám $\frac{11}{15}$, így még $\frac{4}{15}$ hiányzik, ezt állítja elő a számolása

Egy nehezebb feladat.

A Rhind 23. problémája: *Egészítsük ki az*

$$\overline{4} + \overline{8} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{45}$$

számot $\overline{3}$ -ra.

Az egyiptomi aritmetika.

A Rhind 23. problémája.

Egészítsük ki

$$\bar{4} + \bar{8} + \bar{10} + \bar{30} + \bar{45}\text{-öt}$$

$\bar{3}$ -ra.

A papirusz szövege.

$$\begin{array}{cccccc} \bar{4} & + & \bar{8} & + & \bar{10} & + & \bar{30} & + & \bar{45} \\ 11 + \bar{4} & & 5 + \bar{2} + \bar{8} & & 4 + \bar{2} & & 1 + \bar{2} & & 1 \end{array}$$

Az eredmény.

Tehát $\bar{9} + \bar{40}$ -et kell hozzáadni, hogy $\bar{3}$ -at kapjunk.

A Rhind 23. problémája.

Folytatás.

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{4}+ & \bar{8}+ & \bar{9}+ & \bar{10}+ & \bar{30}+ & \bar{40}+ & \bar{45}+ & \bar{3} \\ 11 + \bar{4} & 5 + \bar{2} + \bar{8} & 5 & 4 + \bar{2} & 1 + \bar{8} & 1 + \bar{2} & 1 & 15 \end{array}$$

Az összeg 1.

Elemzés.

- A további részletek hiányoznak a papiruszról, de megadható egy lehetséges rekonstrukció.
- Hangsúlyozzuk**, hogy ez csak egy **lehetséges** eljárás, semmi biztosat nem tudunk az eredeti gondolatmenetről.

A Rhind 23. problémája.

Rekonstrukció.

- A vörös kiegészítő számok alapján az írrok **45-ökben számolt**, ez a közös nevező.
- A vörösben szereplő számlálók összege $23\frac{7}{8}$ negyvenötöd, ezt kell kiegészíteni $\bar{3}$ -ra, azaz $\frac{30}{45}$ -re.
- A „hiányzó” mennyiség $6\frac{1}{8}$ negyvenötöd, azaz $5 + 1\frac{1}{8}$ negyvenötöd.
- Ezt kell meghatározni,

Egy (rövidített) számolás.

$$\begin{array}{cc} 1 & 45 \\ \bar{9} & 5 \\ \bar{4} & 11 + \bar{4} \\ \bar{40} & 1 + \bar{8} \end{array}$$

Az egyiptomi aritmetika.

A Rhind 33. feladata.

Egy mennyiséghez hozzáadva kétharmadát, felét és hetedét 37-et kapunk.

A számolás 1.

$$\begin{array}{cccc} \bullet & & & \\ 1 & 1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7} & & \\ 2 & 4 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28} & (2 \cdot \bar{7} = \bar{4} + \bar{28}) & \\ 4 & 9 + \bar{6} + \bar{14} & (\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}) & \\ 8 & 18 + \bar{3} + \bar{7} & & \\ \text{16} & 36 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28} & & \\ & 28 & 10 + \bar{2} & 1 + \bar{2} \end{array}$$

- A $36 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$ már „nagyon közel” van a 37-hez.
- Ami hiányzik, az $\bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$ kiegészítője 1-re.

Az egyiptomi aritmetika.

A számolás 2.

- A kiegészítés a vörös kiegészítő számokon alapul.
- A közös nevező azonban nem 28, hanem 42. Miért?
- Láttuk: a számlálóknak nem kell egészeknek lenniük, DE összegük már mindig egész.
- Ez 28-cal még nem, de 42-vel már teljesül.

Az egyiptomi aritmetika.

A vörös számok eredete.

A szöveg alapján:

•

$$\begin{array}{rcl} 1 & & 42 \\ \downarrow \overline{3} & & 28 \\ \overline{2} & & 21 \\ \downarrow \overline{4} & & 10 + \overline{2} \\ \downarrow \overline{28} & & 1 + \overline{2} \end{array}$$

- A folytatás: az összeg 40, a maradék 2.
- 40, a kiegészítő számok összege, de az egység 42 „kiegészítő egységet” tartalmaz, tehát 2 még hiányzik.
- E 2-t úgy kapjuk, hogy az osztót, $1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7}$ -et, kiegészítő egységekben fejezzük ki.

Az egyiptomi aritmetika.

A számolás 3.

•

$$\begin{array}{rcl} \downarrow 1 & & 42 \\ \downarrow \overline{3} & & 28 \\ \downarrow \overline{2} & & 7 \\ \downarrow \overline{7} & & 6 \\ \text{az összeg} & & 97 \end{array}$$

- Azaz az osztó 97 kiegészítő egységet tartalmaz, 97-ed része egyenlő $\overline{42}$ -del.
- Már csak egy kétszerezés kell, ami a papiruszon a következő:

•

$$\begin{array}{rcl} \overline{97} & & \overline{42} & 1 \\ \overline{56} + \overline{679} + \overline{776} & & \overline{21} & 2 \end{array}$$

- A kétszerezés a Rhind bevezető táblázatából való.

Az egyiptomi aritmetika.

A végeredmény.

$$37 : (1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7}) = 16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}.$$