

AZ ALEXANDRIAI DIOPHANTOSZ ARITMETIKÁJA

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2016. március 10.

Diophantos, I.sz. 250 körül

Életéről egy rejtély(sír)vers

Vén Diophantoszt rejti e kő. Bár ő maga szunnyad,
Megtanította a sírt, mondja el élte sorát.
Évei egyhatodát tölté ki a gyöngye gyerekkor,
Még feleannyi lefolyt, s áll a szakálla kinőtt.
Egyheted eltelt még, és nászágy várta a férfit,
Elmúlt újra öt év, és fia megszületett.
Ez feleannyi napig láthatta a fényt idefennt, mint
Atyja, mivel neki így szabta az isteni sors.
Őt gyászolva a sír felé hajlott agg Diophantos:
Négy évvel később ő is elérte a célt.
Mondd, hány esztendőt élt hát gyászban, örömben,
S itta az édes fényt, míg hona lett ez a sír.

(Pollák György fordítása)

Legismertebb műve

Aritmetika

- Az **Aritmetika**, 13 könyvből állt a forások szerint, és
- határozott, valamint határozatlan egyenletekre vezető problémákat taglalt.
- Görögül csak 6 könyv maradt fenn, ezeknek több másolata és fordítása létezik.
- Az egyik legismertebb Tartaglia a (harmadfokú egyenletek megoldója) latin fordítása a XVI. századból.
- E fordítás egy XVII. századi kiadásában szerepel (a margón) P. Fermat elhíresült mondata.

Legismertebb műve

Az „Arab könyvek” fölfedezése

- G. Toomer (Brown Univ.) 1973-ban értesült a Mashad Shrine Library (Iran) egy frissen összeállított kézirat-katalógusáról.
- Ebben fölfedezett egy kézirat címet, amely egy Diophantos traktátus arab fordítása lehetett, készítője a 912-ben meghalt Qusta ibn Luqa.
- Első látásra az Aritmetika egy részének tűnt.
- Toomer doktorandusza J. Sessiano alaposan megvizsgálta a kéziratot, és úgy vélte
 - az az Aritmetika egy hiányzó része,
 - amely 4 könyvből áll.
- Megoldandó probléma ezen 4 arab könyv és a már ismert 6 görög könyv viszonya.

A sorrend

Sessiono megoldási javaslata

- ❶ A 4 arab könyv a görög könyvek között helyezendő el összefüggően.
 - ❶ Ha a görög könyveket rendre $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ jelöli,
 - ❷ az arabokat pedig 4, 5, 6, 7,
- ❷ akkor a javasolt sorrend

$A, B, \Gamma, 4, 5, 6, 7, \Delta, E, Z.$

Érvek

A könyvek illetén elrendezése a problémák elemzésén alapul.

Az elrendezés indoklása.

Problémák az A könyvből.

- Két tipikus probléma.
 - ❶ Adjunk meg két olyan számot, amelyek összege és szorzata adott szám.
 - ❷ Adjunk meg két olyan számot, amelyek összege és négyzeteik összege adott szám.
- **Megjegyzés.** Minden probléma megoldásánál konkrét számokból indul, nincs általánosan megfogalmazott elmélet.

Az elrendezés indoklása.

A 2. probléma megoldása (mai szimbolikával).

- Legyen az összeg 20, a négyzetösszeg 208.
- Jelölje a különbséget $2s$. Ekkor a nagyobb szám $10 + s$, a kisebb $10 - s$,
- a négyzetösszeg pedig $2s^2 + 200$, amely 208.
- Ebből $s = 2$, azaz a két szám 12 és 8.
- **Megjegyzés.** Az eredetileg kéthatározatlanos problémát úgy redukálja, hogy a számtani középthez való eltérésre vezet be új határozatlant.
- Ez megoldási módszer ugyanaz, amint amelyet közel két évezreddel korábban (Hammurapi korában) már alkalmaztak a mezopotámiai írnokok:
- az összeg és különbség módszere.

Az elrendezés indoklása.

Egy probléma a B könyvből.

Legyen egy adott szám két négyzet összege. Bontuk ezen összeget két másik négyzet összegére.

Megoldás.

- Legyen az adott szám $13 = 2^2 + 3^2$.
- Tekintsünk egy $s + 2$ oldalú és egy másik négyzetet, amelynek oldala 3-mal kevesebb s valamely többszörösénél, mondjuk $2s - 3$.
- Az első négyzet $s^2 + 4 + 4s$, a második $4s^2 + 9 - 12s$,
- amiből $13 = 5s^2 + 13 - 8s$, azaz $s = \frac{8}{5}$.
- Az első négyzet oldala $s + 2 = \frac{18}{5}$, a másodiké $2s - 3 = \frac{1}{5}$.
- Érdekes (nyitott) kérdés: miért így választotta az új négyzetek oldalait.

Az elrendezés indoklása.

Egy probléma a Γ könyvből.

Határozzunk meg három olyan számot, amelyek közül bármely kettő szorzatát egy adott számmal növelve négyzetszámot kapunk.

Megoldás (az eredeti, de mai jelölésekkel).

- Legyen az adott szám (amivel növelünk) 12, a három számot jelölje x, y, z .
- $xy + 12 = \square_1$, legyen $\square_1 = 25$, amiből $xy = 13$, és legyen $x = 13s$, $y = \frac{1}{s}$.
- $yz + 12 = \square_2$, legyen $\square_2 = 16$, amiből $yz = 4$, így $y = \frac{1}{s}$ lévén $z = 4s$.
- $xz + 12 = 25$ ahol $xz = 13s \cdot 4s = 52s^2$, így olyan s -et kell keresni, amelyre $52s^2 + 12 = \square_3$.
- Diophantos megjegyzése: jó lenne, ha az 52 helyén négyzetszám állna.

12-vel növelve négyzetszámot kapunk.

- Ez egyszerű, legyen e két szám 4 és $\frac{1}{4}$: $4 + 12 = 4^2$ és $\frac{1}{4} + 12 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$.

Az elrendezés indoklása.

A megoldás folytatása.

- Kezdjünk egy újabb számolást. Legyen $x = 4s$, $y = \frac{1}{s}$, $z = \frac{1}{4}s$, ahol s később meghatározandó.
- Látható, hogy csak azt kell már elézni, hogy $xz + 12 = \square$ legyen.
- legyen e „négyzet oldala” $s + 3$, így a négyzet $s^2 + 6s + 9$,
- azaz $6s + 9 = 12$, ahonnan $s = \frac{1}{2}$.
- A keresett három szám: $x = 4s = 2$, $y = \frac{1}{s} = 2$, $z = \frac{s}{4} = \frac{1}{8}$.

Az elrendezés indoklása.

1. Megjegyzés.

Érdekes, hogy azt az esetet, amikor $52s^2 + 12$ négyzetszám az $s = 1$ esetben is, Diophantos nem vette figyelembe. Ebből rögtön adódott volna az

$$x = 13s = 13, \quad y = \frac{1}{s} = 1, \quad z = 4s = 4$$

megoldás.

2. Megjegyzés.

Megoldásában Diophantos a „hamis föltevés” módszerét alkalmazta: tett egy föltevést, és amikor abból nem kapta meg a kívánt eredményt, módosította föltevését, de ugyanazzal a módszerrel dolgozott ismét.

Arab könyvek: néhány formális kérdés

- Összesen $101 = 44 + 16 + 23 + 18$ problémát tartalmaznak.
- A 4. Könyv preambuluma szerint a görög könyvek nem érhetők el az egyszerű moszlim olvasóknak.
- Az alexandriai Diophantos négyzetekről és köbökéről szóló traktátusának negyedik könyve, amelyet a baalbeki Qusta ibn Luqa fordított görögből arabra.*
- A fordító idéz(het) az eredeti nyelvű 4. könyv előszavából, amely az $A - \Gamma$ könyvek anyagára utal megemlítve, hogy azokra épít a későbbiekben.
- Megemlítve például, hogy a korábban négyzetekre vonatkozókat most majd köbökre általánosítja.

A 4. Könyv

1. Probléma

Két olyan köbszámot keresünk, amelyek összege négyzetszám.

Az eredeti megoldás mai jelölésekkel.

- Legyen a két köb oldala x és $2x$. A köbök összege $9x^3$, ennek kell négyzetnek lennie.
- Mérjük a négyzet oldalát x -ben, mondjuk legyen $6x$. Így a négyzet $36x^2$, amelynek $9x^3$ -bel kell egyenlőnek lennie.
- Mivel az x^2 kisebb hatvány, mint az x^3 , elosztjuk az egészet x^2 -tel: az eredmények $9x$ és 36 , így $x = 4$.
- A kisebb köb oldala 4 , a nagyobbé 8 , tehát a köbök 64 és 512 ,
- ezek összege 576 , amely négyzet, 24^2 .

4. Könyv

2. Probléma

Két olyan köbszámot keresünk, amelyek különbsége négyzetszám.

Némileg modernizált megoldás.

- Olyan $a < b$ számokat keresünk, amelyekre $b^3 - a^3 = \square$.
- Ha $a = x$, $b = mx$; akkor

$$(m^3 - 1)x^3 = \square$$

- Legyen $\square = (nx)^2$, és így $(m^3 - 1)x^3 = n^2x^2$; amiből

$$x = \frac{n^2}{m^3 - 1}$$

4. Könyv

A megoldás folytatása.

- Ha $m = 2$, $n = 7$ akkor $x = 7$.
- $a^3 = x^3 = 343$, $b^3 = (2x)^3 = 14^3 = 2744$,
- $\square = 2401 = 49^2$.

Megjegyzés.

A megoldási módszer megegyezik egy, az A Könyvben olvashatóval.

7. Könyv

A 8. Probléma (modern formalizmussal).

Olyan négyzetszámot keresünk, amelynek oldala köbszám, és akkor is négyzetszámot kapunk, ha egy bizonyos számot, valamint annak a kétszeresét hozzáadjuk.

Olyan a, b számokat keresünk tehát, amelyekre

$$(a^3)^2 + 2b = \square_1$$

$$(a^3)^2 + b = \square_2$$

Ha $(a^3)^2 = 64 = (3^3)^2$, akkor

$$64 + 2b = \square_1$$

$$64 + b = \square_2$$

7. Könyv 8. Probléma (egy másik megoldás)

A megoldást egy látszólag másik probléma megoldásával folytatta: keressünk olyan u, v számokat, amelyekre

$$u^2 + 2v = \square_1 \quad (1)$$

$$u^2 + v = \square_2 \quad (2)$$

Ha $u^2 = x^2$ és $v = 2x + 1$, akkor (2) azonosan teljesül.

Így (1)-ből $x^2 + 4x + 2 = \square$, mondjuk $(x - 2)^2$,

ezért $x^2 + 4x + 2 = x^2 - 4x + 4$, és $x = \frac{1}{4}$.

Kapjuk, hogy $u^2 = x^2 = \frac{1}{16}$, $v = 1\frac{1}{2}$.

Legyen most t tetszőleges arány(=racionális szám), és ekkor $u^2 t^2, vt^2$ szintén megoldások, az $u_1^2 = 1$, $v_1 = 24$ egészek pedig megoldásai az előbbi segédproblémának.

7. Könyv 8. Probléma (3. Megoldás)

A keresett megoldást (az eredeti probléma megoldását) 64-gyel való szorzás révén kapjuk ebből:

$$(a^3)^2 = 64 \quad b = 64 \cdot 24 = 1536,$$

amiből

$$\square_1 = 3136 = 56^2, \quad \square_2 = 1600 = 40^2.$$

Az utolsó probléma általánosítása

A megoldandó egyenletrendszer

$$(x^3)^2 + ky = A^2$$

$$(x^3)^2 + my = B^2$$

$k, m \in \mathbb{Z}$.

Egy segédegylet:

$$u^2 + kv = A^2 \quad (3)$$

$$u^2 + mv = B^2 \quad (4)$$

Az utolsó probléma általánosítása

A $kv = 2nu + n^2$, n tetszőleges, választással (3) teljesül.

Ezután azt kell elérni, hogy

$$u^2 + \frac{2mn}{k}u + \frac{m}{k}n^2 = B^2$$

legyen.

Ez pedig egyszerűen elérhető.