

Egy máig is nyitott ókori probléma.

Barátságos számpárok.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2016. március 24.

Barátságos számpárok.

Pithagoras véleménye.

- A legenda (Jamblikusz, I.sz. III. század) szerint Pithagoras azon kérdésre, hogy „Ki a barát?” azt felelte, hogy „Az én másik énem.”
- A pithagoreusok szerint a **(220, 284) barátságos számpárt alkot, mert mindkettő megegyezik a másik részei összegével.**

A legkorábbi előfordulás.

A Biblia korai kommentátorai rámutattak, hogy amikor a Teremtés könyve 32:14 verse szerint Jákob 20 nőtény és 20 bak kecskét ajándékoz Ézsauinak, akkor „nagyon bölcsen” választotta meg az ajándék mennyiségét, ezzel a barátságot erősítette meg.

Barátságos számpárok.

Formális definíció.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ -re $\sigma^*(n) = \sigma(n) - n$. $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ **barátságos számpár**, ha $\sigma^*(m) = n$, és $\sigma^*(n) = m$, ahol $\sigma(n)$ az $n \in \mathbb{N}$ összes pozitív osztóinak összege.

Példák.

- (220, 284) görögök (Biblia?)
- (17.292, 18.416) P. Fermat 1636,
- (9.363.584, 9.437.056) Descartes 1638,
- 1764-ben Euler 64 barátságos számpárt jelentett be (kettő tévedés volt),
- (1184, 1210) B.N.I. Paganini (1866), ez a második legkisebb.

Barátságos számpárok.

Thabit ibn Qurra (836-901) eredménye.

Ha $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$, továbbá $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prímszámok, akkor az

$$M = 2^n p q \quad \text{és} \quad N = 2^n r$$

barátságos számpárt alkot.

Thabit párpai.

(220, 284), (17.292, 18.416), (9.363.584, 9.437.056)

Ezek az $n = 2, 4, 7$ értékekhez tartoznak.

Paganini számai nem ilyen alakúak.

Hogyan jöhetett rá Thabit általános eredményére?

A görög pár elemzése.

- $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ és $284 = 2^2 \cdot 71$,
- e két szám $2^n pq$ és $2^n r$ alakban írható, ahol $n = 2$, és a p, q, r prímek:

$$p = 5 = 3 \cdot 2^1 - 1,$$

$$q = 11 = 3 \cdot 2^2 - 1,$$

$$r = 71 = 9 \cdot 2^3 - 1,$$

- azaz írhatók olyan alakban, mint a Thabit állításában szereplők.

Hogyan tovább?

- Milyen alakúnak kellene lennie a p, q, r prímeknek, hogy
- az $a = 2^n pq$ és az $b = 2^n r$ számok barátságos párt alkossanak,
- miért a speciális alak, egyáltalán miért jó, ha prímek?

van der Waerden elemzése 0.

Mit kell föltételeznünk?

Legalább azt, hogy

- Thabit meg tudta határozni az ilyen alakú számok osztóit, és
- összegüket is ki tudta számolni (általánosan).

van der Waerden elemzése 1.

Egy „mai” számolás.

- Ha (a, b) barátságos számpár, akkor $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$.
- $\sigma(a) = (1 + 2 + \dots + 2^n)(r + 1)$ és $\sigma(b) = (1 + 2 + \dots + 2^n)(pq + p + q + 1)$.
- A bal oldalak egyenlők, így

$$r = pq + p + q. \quad (1)$$

- A mértani sorok összegzésével kapjuk, hogy

$$(2^{n+1} - 1)(r + 1) = (2^{n+1} - 1)(pq + p + q + 1).$$

- amiből a $\sigma(a) = a + b$ összeg

$$(2^{n+1} - 1)(pq + p + q + 1) = 2^n pq + 2^n r \quad (2)$$

van der Waerden elemzése 2.

- Ha az (1)-et a (2)-be helyettesítjük, akkor

$$(2^{n+1} - 1)(pq + p + q + 1) = 2^n pq + 2^n(pq + p + q) \quad (3)$$

- Thabit számára ismert átalakításokkal adódik, hogy

$$2^n(p + q + 2) = pq + p + q + 1 \quad (4)$$

- Bevezetve a $p + 1 = P$ és a $q + 1 = Q$ jelöléseket (amiből $r = PQ - 1$ is adódik) a (4) formula egyszerűsödik:

$$2^n(P + Q) = PQ \quad (5)$$

van der Waerden elemzése 3.

- Ismét az ismert átalakítási technikákat alkalmazva: mindkét oldalhoz adjunk 2^{2n} -et, majd vonjunk ki $2^n(P + Q)$ -t:

$$2^{2n} = PQ - 2^n P - 2^n Q + 2^{2n}$$

$$2^{2n} = (P - 2^n)(Q - 2^n)$$

- A jobb oldalon vagy mindkét tag pozitív, vagy mindkettő negatív. Az utóbbi nyilván lehetetlen.
- Föltehető, hogy $P < Q$, s ekkor
-

$$P - 2^n = 2^{n-t}$$

$$Q - 2^n = 2^{n+t}$$

van der Waerden elemzése 3.

- A legegyszerűbb választás a $t = 1$, s ekkor

$$P = 2^n + 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$Q = 2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n$$

- amiből már adódik Tabit megoldása:

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

$$q = 3 \cdot 2^n - 1$$

$$r = PQ - 1 = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

Euler általánosítása.

Euler tétele.

Legyenek $n > m > 0$ egészek. Ha a

$$p = (2^{n-m} + 1) \cdot 2^m - 1,$$

$$q = (2^{n-m} + 1) \cdot 2^n - 1,$$

$$r = (2^{n-m} + 1)^2 \cdot 2^{m+n} - 1,$$

számok prímek, akkor a

$$2^n pq \quad \text{és} \quad 2^n r$$

számok barátságos számpárt alkotnak.

Megjegyzés.

Thabit tétele az $m = n - 1$ esetnek felel meg. Eddig két párt találtak e tétel alapján: $(m, n) = (1, 8), (29, 40)$.

Néhány mai eredmény.

- 1 Mintegy 12 millió barátságos számpár ismert. Van közöttük 282 decimális jegyű. E lista tartalmazza az összes olyat, amelyek kisebbek 10^{10} -nél.
- 2 Nem ismeretes, hogy van-e végtelen sok barátságos számpár.
- 3 1955-ben Erdős Pál megmutatta, hogy a barátságos számpárok sűrűsége 0 a természetes számok között.
- 4 Nem ismeretes olyan pár, amelyben a két szám relatív prím lenne. Igazolták, hogy egy ilyen párban mindkét szám nagyobb 10^{25} -nél és szorzatuk legalább 22 különböző prímmel osztható.
- 5 Nem ismeretes, hogy vannak-e olyan barátságos számpárok, amelyekben különböző paritású a két szám.
- 6 Az ismert barátságos számpárokból zömmel páros számok szerepelnek, de vannak páratlan párok is, például: $(12.285, 14.595)$ és $(69.615, 87.633)$. Az előbbi a legkisebb ilyen pár.

Néhány érdekesség.

- 1 Léteznek olyan barátságos párok, amelyekben a számjegyek összege megegyezik. Ilyenek például a

$(69.615, 87.633)$, $(100.485, 124.155)$, $(1.358.595, 1.486.845)$

párok. Az első 5000 barátságos pár közül 427 ilyen.

- 2 Léteznek olyan (a, b) párok is, amelyek közül mindkettő osztható jegyeik összegével, pl. a $(2620, 2924)$ pár.
- 3 Nincs olyan pár, amelyben valamelyik tag négyzetszám.