

Számfogalom a XIX. század végéig.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2016. április 7-14.

Az analízis válsága: Konvergenca problémák.

XVIII. század.

- Newton és Leibniz **infinitezimális kalkulusa**: szabadon számoltak **végtelen kicsi/nagy** „számokkal”.

- Euler:

$$e^x = \left(a + \frac{x}{i}\right)^i,$$

ahol i „végtelen nagy szám”.

- Modern jelölésekkel:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- Alapvető kérdés: **mi is a végtelen kis/nagy szám, mi egy végtelen sok tagú összeg?**
- Akkor csak intuitív megközelítés volt (pl. mint a görbe aszimptotája).

Kitekintés.

XIX.-XX. század: Végtelen sorok konvergenciája.

- **Definíció.** Legyenek $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ valós számok. A

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

végtelen sor konvergens, ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

határérték létezik és véges. Ellenkező esetben a végtelen sor **divergens**.

- **Megjegyzés.** Világos, hogy a konvergencia szükséges feltétele, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ legyen.

Kitekintés.

XIX.-XX. század: Hatványsorok konvergenciája.

- **Definíció.** Az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

alakú kifejezéseket, ahol $a_i \in \mathbb{R}$ és x valós változó, **hatványsoroknak** (pontosabban valós-) nevezzük.

- **Definíció.** Az előbbi **hatványsor konvergens** az (a, b) intervallumon, ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

(véges) határérték létezik minden $x \in (a, b)$ -re.

Az analízis válsága: Konvergenca problémák.

XVIII. század.

- J. Fourier: a rezgő húr problémája: analitikus sorfejtések.
- Az $f(x)$ függvény **Fourier sora**
-

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

- ahol

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Az analízis válsága: Konvergenca problémák.

XVIII. század.

- Súlyos probléma: több olyan függvény került elő, amelynek Fourier sora nem állította elő a kiindulási függvényt.
- Nagy kérdés: hol a hiba?
 - ▶ Nem korrekt a sorbafejtés, vagy
 - ▶ a konvergenca fogalma sántít.

A kiút keresése a válságból.

XIX. század eleje: a határérték fogalma.

A definíció:

- Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat határértéke az a szám, azaz e sorozat a -hoz konvergál, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\nu \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > \nu$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.
- De hogyan lehet megállapítani egy sorozatról, hogy ez teljesül? Meg kell „álmodni” előbb az a -t?

Kísérlet a konvergenca eldöntésére.

- Cauchy ún. belső konvergenca kritériuma a XIX. század elején.
- Az (a_n) számsorozat konvergens, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ létezik, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan ν , hogy valahányszor $m, n > \nu$ mindannyiszor $|a_m - a_n| < \varepsilon$.
- Probléma: e feltétel szükségessége nyilvánvaló, de elegendő is? Hogyan kapható meg a határérték.

A kiút keresése a válságból.

Egy újabb súlyos probléma: a függvények folytonossága.

- A folytonos függvények Bolzano-Darboux tulajdonsága:
- Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $f(a)$ és $f(b)$ közötti $c \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $y \in [a, b]$, hogy $f(y) = c$.
- A probléma: Nem sikerült e szemléletesen nyilvánvaló állítást bizonyítani.

A probléma gyökere.

Egyre erősödik az a nézet, hogy az igazi probléma a **valós szám fogalmának tisztázatlansága, pontatlansága**.

A „nagy kérdés”.

Valójában mik is a valós számok?

A válaszra még várni kell.

Egy kis összegzés.

XVI. század.

- A század végére: vannak a természetes számok, talán még szám a 0 is, meg vannak a pozitív racionálisok, amelyek előállnak két természetes szám hányadosaként.
- Időnként, főleg a hiány megjelenítésére használni lehet negatív számokat (egészek és racionálisok), de ezek nem „igazi” számok.
- Vannak még olyan mennyiségek is, mint pl. $\sqrt{2}$, de ezek nem „igazi” számok, de lehet őket „közelíteni” számokkal.
- Az, hogy ez mit jelent homályba veszett.
- Egyenletek formális megoldásakor ugyan előjöhettek $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezések, amelyekkel lehet számolni, de „minek”.

Egy kis összegzés.

XVII. század.

- Nincs lényegi előrelépés.
- A „nem racionálisokra”, a $\sqrt{2}$ félékre nem aritmetikai, hanem geometriai eljárásokat, szabályokat kell alkalmazni, mert
- önmagukban nem léteznek, csak az általuk reprezentált „folytonos geometriai mennyiséggel” együtt, azaz
- Euklidesz V. könyvében leírtakat kell alkalmazni.
- az $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezéseket nem is említik.

Egy kis összegzés.

XVIII. század.

- Integrálási problémákban ismét előjönnek az $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezések, és **képzetes, imaginárius számoknak** nevezik őket (Leibniz és Euler), mert nem a valóságban, hanem „csak a képzeletünkben léteznek”.
- Ugyancsak integrálási problémákból indulva Euler inkorrekt úton korrekt eredményre jut a negatív és az imaginárius számok logaritmusával kapcsolatban.
- Ugyancsak Euler sejtje meg, hogy **vannak olyan számok, amelyek meghaladják az algebrai módszerek erejét**, azaz nem algebraiak, ezek a **transzcendens számok**.
- Sejtése szerint az e , π , valamint a trigonometrikus és a logaritmus függvények értékei általában ilyenek.
- Bizonyítani csak azt tudták (ő és Lambert), hogy a két konstans irracionális.

Egy kerülőút lépései.

A komplex számok 1.

- Az 1830-as években a komplex szám „intuitív” fogalma széles körben használatos, de ez többeket nem elégtett ki.
- William Rowland HAMILTON (1805-65): *Conjugate Functions and on Algebra as the Science of Pure Time* c. 1837-es dolgozata.
- Hamilton legfontosabb észrevételei:
 - 1 Pontosítja az ún. komplex egység fogalmát: i -vel egy olyan **szimbólumot** jelöl, amelynek négyzete -1 .
 - 2 Egy $a + bi$ alakban írott komplex szám NEM olyan összeg, mint például a $2 + 3$. A „plusz jel” használata történeti tévedés, hiszen a bi nem adható hozzá a -hoz az ismert, a $+$ -szal jelölt összeadással.
 - 3 **Az $a + bi$ komplex szám nem több (és nem is kevesebb), mint az (a, b) (valós számokból álló) rendezett pár.**

Egy kerülőút lépései.

A komplex számok 2.

- A műveletek a következők.

$$\begin{aligned}(a, b) \pm (c, d) &= (a \pm c, d \pm d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ \frac{(a, b)}{(c, d)} &= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)\end{aligned}$$

- A „szokásos” műveleti tulajdonságok: asszociativitás, kommutativitás, stb. egyszerű számolással belátható. **Ezzel a komplex szám fogalma — a valós szám fogalmára építve — logikailag is korrekt megalapozást nyert.**
- Azt sajnos még mindig NEM TUDJUK, hogy mik is a valós számok, de nekik az $(a, 0)$ alakú párok felelnek meg.

Egy kerülőút lépései.

A komplex számok 3.

- Nem mellékes „melléktermék”: a bizonyos értelemben misztikus $\sqrt{-1}$ problémája is rendeződött, mivel az nem más, mint a $(0, 1)$ pár, hiszen $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, de $(0, -1)^2 = (-1, 0)$ is áll.
- Gauss egy 1837-ben Bolyai Farkashoz írott levelében megemlítette, hogy ő már 1831-ben eljutott a komplex szám ezen fogalmához, de (természetesen) ezt sem publikálta. Így a matematikai világ a prioritást Hamiltonnak adta és adja a mai napig is. A „komplex szám” elnevezés minden bizonnyal Gausztól ered.
- Cauchy 1847-ben egy másik definícióját adta meg a komplex számok testének, s így a komplex számoknak is:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1).$$

Egy kerülőút lépései.

Egy lehetséges továbblépés.

- A **valós számokat** tekinthetjük **egydimenziós számoknak**, a **komplexe**ket **kétdimenziósoknak**. Jogos kérdés: **léteznek-e háromdimenziós számok** annál is inkább, hogy a minket körülvevő tér is három dimenziós.
- Ugyanis, a komplex számok síkvektoroknak (is) tekinthetők és hasznosak a síkgeometriában. Miért ne lehetne ugyanígy háromdimenziós számokat használni a térgeometriában?
- A komplex (kétdimenziós) számok geometriai alkalmazásával — a legtöbbször e síkbeli reprezentációt tekintve definíciójuknak — többen is foglalkoztak: Caspar WESSEL 1797-ben, Jean Robert ARGAND 1806-ban, John WARREN 1828-ban, és mint már említettük Carl Fridrich GAUSS 1831-ben.

Vizsgálatok a háromdimenziós számokkal kapcsolatban.

Hamilton vizsgálatai.

- Az útról, amelyen Hamilton tovább tudott haladni, számos forrásból tudunk olyan részleteket, amelyekből nyomon követhető a fölfedezés szinte minden mozzanata.
- Egy 1843. október 17-i keltezésű bejegyzés Hamilton noteszében.
- Ugyanezen keltezésű levele John Graves-hez.
- Az *On a New Species of Imaginary Quantities Connected with the Theory of Quaternions* című dolgozata, amelyet 1843. november 23-án nyújtott be a Proceedings of the Royal Irish Academy c. folyóirathoz.
- A *Lectures on Quaternions* c. 1853-ban megjelent könyvének előszava.
- Archibald nevű fiának, nem sokal a halála előtt, 1865-ben írott levele.

Vizsgálatok a háromdimenziós számokkal kapcsolatban.

- **A nagy kérdés:** Hogyan szorozunk háromdimenziós számokat a kétdimenziósokhoz hasonlóan?
- Ez nem bizonyult egyszerűnek. Az 1865-ös, fiának írt, levelében ez áll:
 - ▶ A korábban említett hónap [1843. októbere] első felének minden reggelén, amikor lejöttem reggelizni testvéred William Edward és te is azt kérdezted mindig: „Tudod-e már apa szorozni a hármasokat?” Én pedig mindig azt kényszerültem válaszolni fejemet rázva: „Nem, csak összeadni és kivonni tudom azokat.”
- Az (a, b, c) hármast olyan $a + ib + jc$ vektorként tekintette, ahol $1, i, j$ három, egymásra páronként merőleges egységnyi hosszúságú vektor.
- Az $(a + ib + jc)(x + iy + jz)$ szorzattól megkövetelte, hogy
 - 1 a szorzást tagról-tagra kell végezni,
 - 2 a szorzatvektor hossza a tényezők hosszúságának szorzata legyen.

Ma már tudjuk (A. Hurwitz): ez csak 1,2,4 és 8 dimenziós térben teljesül.

Vizsgálatok a háromdimenziós számokkal kapcsolatban.

Kísérletek a szorzatra: előzmény.

- A kétdimenziós esetben (a „közönséges” komplex számok) a (2) föltétel teljesüléséhez az szükséges, hogy $ii = -1$.
- De mi legyen ij és ji ?
- Ha föltesszük hogy $ij = ji$,
- akkor

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy)$$

- de mi legyen az ij , hiszen az eredmény nem a kívánt $\alpha + i\beta + j\gamma$ alakú.

Vizsgálatok a háromdimenziós számokkal kapcsolatban.

Első kísérlet.

$(ij)^2 = 1$ kellene, mivel $i^2 = j^2 = -1$, de ez $ij = 1$, vagy $ij = -1$ -et vonna maga után, ám ez nem jó, mert így nem teljesül a 2. föltétel.

Második kísérlet.

- A legegyszerűbb eset az

$$(a + bi + cj)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc.$$

- Ha kiszámítjuk a jobb oldalon az $1, i, j$ együtthatói négyzetösszegét, akkor

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

- Most teljesül a 2. föltétel, de ehhez láthatóan az kellett, hogy $ij = 0$ legyen. „Ez sem az igazi.”

Vizsgálatok a háromdimenziós számokkal kapcsolatban.

Harmadik kísérlet.

Az eddigieket összegezve azt írta Graves-nek, hogy az $ij = 0$ föltevés nem vezetett eredményre, ezért azt kellene föltenni, hogy $ij = -ji$, továbbá az $ij = k \cdot t$, s meg kellene vizsgálni, hogy egyáltalán lehetséges-e a $k = 0$ eset.

Negyedik kísérlet.

- Megvizsgálta az $(a + ib + jc)(x + ib + jc)$ szorzatot.
- Ismét a Graves-levélből: ha továbbra is azt tételezzük föl, hogy a k együtthatója eltűnik, akkor az $1, i, j$ együtthatói

$$ax - b^2 - c^2, \quad (a + x)b, \quad (a + x)c$$

lesznek,

- amit lehet geometriailag interpretálni. Ez megerősíteni látszik az $ij = -ji$ összefüggést, de még mindig nincs semmi információ arról, hogy mi is legyen a k értéke.

A nagy ötlet: ugrás a negyedik dimenzióra.

Előkészület.

- Próbálkozzunk bátran ismét a hármasok általános szorzatával! írta a sokat idézett levélben:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy)$$

- Ezt az $ij = -ji = k$ feltétellel kapota.
- Megvizsgálta, hogy a $k = 0$ esetben teljesül-e a (2) feltétel, az

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2$$

egyenlőség.

A nagy ötlet: ugrás a negyedik dimenzióra.

Előkészület.

- A válasz nem, hiszen a bal oldal éppen $(bz - cy)^2$ -tel több a jobb oldalnál, ami nem más, mint a k együtthatójának négyzete az $ij = -ji = k$ feltétel mellett.
- Ez volt a kritikus pont, amikor egy új ötlete villant föl. Ismét a levélből idézve:
- És ekkor jöttem rá arra, hogy valami újat kell bevezetni, s ez a valami a tér negyedik dimenziója, ami azért kell, hogy számolni tudjak a hármasokkal...*
- Vagy ezt a paradoxont algebrai nyelvre lefordítva, be kell vezetni egy újabb, egy k harmadik képzetes szimbólumot, amely nem eshet egybe i vagy j -vel,*
- de megegyezik azzal a szorzattal, amelyben i a szorzó és j a szorzandó, s ez elvezetett ahhoz, hogy bevezessem a kvaterniókat, az $a + ib + jc + kd$ -ket, vagy másként az (a, b, c, d) -ket.*

A nagy ötlet: ugrás a negyedik dimenzióra.

A harmadik képzetes egység beillesztése az eddigi rendszerbe.

A definiáló egyenlőségek.

$$\begin{aligned} ik &= iij = -j, & kj &= ijj = -i \\ ki &= j, & jk &= i \\ k^2 &= ijj = -iij = -1 \end{aligned}$$

A nagy ötlet: ugrás a negyedik dimenzióra.

Hamilton indoklása fiának írt leveléből.

...De a hónap [1843. októbere] 16. napján, amely hétfőre esett, s ami az Ír Királyi Akadémia ülésnapja, miközben oda igyekeztem, hogy elnököljek az ülésen, s anyád is velem jött a Royal Canal mentén...ő beszélt hozzám, és ekkor egy belső sugallatom jött szinte villámcsapásként, aminek fontosságát rögtön észrevettem, hiszen egy sokéves töprengés után villant meg a megoldás lehetősége. Rögtön elővettem noteszom — ami még ma is megvan — s följegyeztem azt amire rájöttem. Annak sem tudtam ellenállni, bármennyire is hihetetlen lehet, hogy belevésem késemmel Brougham Bridge kövébe az i, j, k szimbólumokra vonatkozó alapvető összefüggést:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

amely megoldása a PROBLÉMÁNAK, ami azonban, mint fölírat, már régen elmállott.

A nagy ötlet: ugrás a negyedik dimenzióra.

Hamilton noteszéből.

Remélem jól rendezem gondolataim. Az $ij = 0$ egyenlőséget az a körülmény ajánlotta figyelmembe, hogy

$$(ax - y^2 - z^2)^2 + (a + x)(y^2 + z^2) = (a^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ezért meggondoltam, hogy vajon igaz-e, hogy

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cz)^2,$$

de ahhoz, hogy ez igaz legyen a második taghoz [a jobb oldal] hozzá kell adni még $(bz - cy)^2$ -t. Ez pedig arra **készítetett**, hogy ne hagyjam figyelmen kívül az ij -s tagot, s arra **inspirált**, hogy ennek k -val, egy új képzetessel kellene egyenlőnek lennie.

Léteznek-e négynél több dimenziós számok?

Hamilton levele Graves-nek, 1843. október 17.

Megalkotta a **nyolcdimenziós számokat**, amelyhez a „báziselemeket”, az „egységeket”

$$1, i, j, k, l, m, n, o,$$

és szorzásokra teljesülnek a következők.

Léteznek-e négynél több dimenziós számok?

Az azonosságok (Graves).

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1 \\ i &= jk = lm = on = -kj = -ml = -no \\ j &= ki = lm = mo = -ik = -nl = -om \\ k &= ij = lo = nm = -ji = -ol = -mn \\ l &= mi = nj = ok = -im = -jn = -ko \\ m &= il = oj = kn = -li = -jo = -nk \\ n &= jl = io = mk = -lj = -oi = -km \\ o &= ni = jm = kl = -in = -mj = -lk \end{aligned}$$

Léteznek-e négynél több dimenziós számok?

Az oktávok.

Ha ezen egyenlőségek alapján vezetünk be szorzást a nyolcdimenziós vektorok között az algebrában megszokott módon, azaz az

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k + \varepsilon l + \eta m + \xi n + \lambda o, \quad \alpha, \dots, \lambda \in \mathbb{R}$$

alakú kifejezések – az ún. **oktávok** — között, akkor az már nemcsak **nem kommutatív**, hanem még **asszociatív sem** lesz.

Léteznek-e négynél több dimenziós számok? Frobenius válasza.

Egy algebrai fogalom.

- Legyen K test és $\mathcal{V}$ vektortér e test fölött.
- Vezessük be egy szorzásnak jelölt műveletet $\mathcal{V}$ -n és teljesüljenek a

$$(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$$

azonosságok, ahol $\lambda \in K$ és $a, b \in \mathcal{V}$.

- Az így kapott $\mathcal{V}$ struktúrát **K fölötti algebrának** nevezzük.
- Ezen algebra **asszociatív/kommutatív/zérusosztómentes**, ha a $\mathcal{V}$ -beli szorzás asszociatív/kommutatív/zérusosztómentes.
- A $\mathcal{V}$ K fölötti algebra **véges dimenziós**, ha $\mathcal{V}$ mint K fölötti vektortér véges dimenziós.

Léteznek-e négynél több dimenziós számok? Frobenius válasza.

Frobenius tétele 1882.

A valós számtest fölötti végesdimenziós, zérusosztómentes asszociatív algebrák a következők egyikével izomorfak.

- (1) A valós számtest,
- (2) a komplex számtest,
- (3) a kvaterniók ferdeteste.

Megjegyzés.

E tétel lezárja a számfogalom bővítésének folyamatát, már a kvaterniók esetén is föl kell adni a szorzás kommutativitását.

DE

A VALÓS SZÁMOK PROBLÉMÁJA, AZAZ, HOGY MIK IS VALÓJÁBAN, MÉG MINDIG NYITOTT KÉRDÉS.

Mik is a valós számok?

G. Cantor eljárása 1.

- Ha $a_i \in \mathbb{Q}$, $i \in \mathbb{N}$, akkor (a_i) jelöli az $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ végtelen sorozatot.
- E sorozat **korlátos**, ha van olyan $t \in \mathbb{N}$, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ -re $|a_i| < t$.
- Jelölje $\mathbb{Q}^\infty$ az összes racionális tagú korlátos, végtelen sorozat halmazát
- 1. Tétel.** A $\mathbb{Q}^\infty$ halmaz, a sorozatok tagonkénti összeadásával és szorzásával **integritástartomány**.
- Definíció.** Az $(a_i) \in \mathbb{Q}^\infty$ sorozat **nullasorozat**, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ -hoz van olyan $\nu \in \mathbb{N}$, hogy valahányszor $k > \nu$, mindannyiszor $|a_k| < \varepsilon$. A nullasorozatok halmazát $\mathbb{Q}_0^\infty$ fogja jelölni
- 2. Tétel.** A nullasorozatok $\mathbb{Q}_0^\infty$ halmaza **ideálja** a $\mathbb{Q}^\infty$ **integritástartománynak**.

Mik is a valós számok?

G. Cantor eljárása 2.

- Definíció.** A $k_1 < k_2 < \dots$ természetes számok $\Phi = (k_1, k_2, \dots)$ sorozatát **indexsorozatnak** nevezzük.
- $(a_i)^\Phi$ fogja jelölni az (a_i) sorozatnak a $(k_1, k_2, \dots)$ indexsorozathoz tartozó **részsortozatát**.
- Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $(a_i) \in \mathbb{Q}^\infty$ sorozat **Cauchy-sorozat**, ha bármely Φ indexsorozatra $(a_i) - (a_i)^\Phi \in \mathbb{Q}_0^\infty$. A Cauchy-sorozatok halmazát $\mathbb{Q}_C^\infty$ fogja jelölni.
- 3. Tétel.** A Cauchy-sorozatok $\mathbb{Q}_C^\infty$ halmaza olyan **részgyűrűje** a $\mathbb{Q}^\infty$ **integritástartománynak**, amelyben $\mathbb{Q}_0^\infty$ **maximális ideál**.
- Következmény.** A $\mathbb{Q}_C^\infty / \mathbb{Q}_0^\infty$ **faktorgyűrű test**.
- 4. Tétel.** A racionális számok $\mathbb{Q}$ teste **beágyazható** a $\mathbb{Q}_C^\infty / \mathbb{Q}_0^\infty$ **faktortestbe**.
- Tetszőleges $a \in \mathbb{Q}$ esetén az $a \mapsto (a) + \mathbb{Q}_0^\infty$ leképezés szolgáltatja az előbbi beágyazást.

Mik is a valós számok?

Megjegyzések.

1. Belátható, hogy a Cauchy-sorozatokat éppen azon racionális tagú sorozatok, amelyekre teljesül az ún. Cauchy-féle belső konvergencia-kritérium.
2. Jelölje a továbbiakban minden $(a_i) \in \mathbb{Q}_\mathbb{C}^\infty$ -re az $(a_i) + \mathbb{Q}_0^\infty$ mellékosztályt $\overline{(a_i)}$.
3. Ha valamely (a_i) Cauchy-sorozathoz van olyan $a \in \mathbb{Q}$ racionális szám, hogy $(a_i) - (a)$ nullasorozat, akkor a Következményben említett beágyazáskor a -nak az $\overline{(a_i)}$ osztály felel meg, és nyilván $\overline{(a_i)} = \overline{(a)}$.
4. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az (a_i) sorozat **határértéke** az a racionális szám.
5. A $\mathbb{Q}_\mathbb{C}^\infty / \mathbb{Q}_0^\infty$ testet a **valós számok** testének nevezzük.

Mik is a valós számok?

További megjegyzések.

1. Az $\overline{(a)}$ osztályt azonosíthatjuk az a racionális számmal, míg az így nem jellemezhető osztályokat is jelölhetjük egyetlen szimbólummal. Az ezen eljárással kapott testet $\mathbb{R}$ -rel fogjuk jelölni.
2. Ezen $\mathbb{R}$ testre is részben elvégezhetjük azokat a sorozat konstrukciókat, amelyeket az előbb a $\mathbb{Q}$ testre végeztünk: azaz definiálhatjuk a Cauchy-sorozat fogalmát.
3. Megmutatható, hogy minden valós tagú Cauchy-sorozatnak van határértéke a valós számok halmazában (másképpen mondva teljes metrikus tér), továbbá
4. hasonlóan a racionális számok testéhez, a valós számok testének is van olyan rendezése, amelyre nézve a műveletek monotonok (azaz van neki egy ún. „pozitivitás tartománya”).