

Az Óbabiloni Birodalom aritmetikája és számelmélete.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2014. február 25.

Mezopotámia a II. évezred előtt.

- ➊ Már a I.e. VIII. évezred elején is lakott volt a kellemetlen ökológiai viszonyok ellenére.
- ➋ Kevés ásványi nyersanyag, pusztító árvizek: özönvizek.
- ➌ Az első városok (falvak) kultikus helyeken 7000-től:
 - ➊ Dzsarmo (Kurdisztán) kb. 150 lakos,
 - ➋ Jerico (Palesztina) kb. 2000 lakos 6000 körül,
 - ➌ Ur (Dél-Mezopotámia) kb. 34.000 (!) lakos 2800 körül.

Az itt élő népek 1.

- ➊ Az őslakók ismeretlenek.
- ➋ Az első ismert bevándorlók a SUMEROK.
- ➌ Nem tudjuk merről jöttek,
- ➍ biztosan nem tartoztak a semi-, ill. az indoeurópai népek családjába.

Mezopotámia a II. évezred előtt.

Az itt élő népek 2.

- ➊ Városállamokat alapítottak,
- ➋ a IV. évezred végén összeolvadtak az őslakókkal.
- ➌ Megbízható régészeti (írással) források kb. 2750-től vannak, zömmel a városállamok harcairól a hegemoniáért.
- ➍ Például Uruk ↔ Kis, és Ur ↔ Lagas.
- ➎ 2500-tól Ur, a kor legnagyobb lakosságú városa, hegemoniája.
- ➏ 2400 körül Lagas a vezető hatalom, az első társadalmi reform: Urukagina a kistermelők érdekében, majd az első kísérlet egységes birodalom létrehozására.
- ➐ 2370 körül Sarrukín (Szargon) vezetésével **AKKÁD** hódítók, az első sémi nép e tájon. Átveszik és terjesztik a sumér kultúrát.

Mezopotámia a II. évezred előtt.

Az itt élő népek kultúrája.

- ➊ Ismeretlen eredetű képirás.
- ➋ 2600 körül: a *Gilgames eposz*, az első irodalmi alkotás.
- ➌ Özönvíz legendák.
 - ➊ Mintegy 250 ilyen legenda ismert.
 - ➋ Görögök: Zeusz bosszúja az emberi romlottság miatt.
 - ➌ Maják: A gyékényen ülő bölcsék könyve.
 - ➍ A „klasszikus” bibliai történet.
- ➍ Fontos találmányaik.
 - ➊ fazekaskorong,
 - ➋ lovak használata,
 - ➌ ló vontatta kerek járművek.
- ➎ Kezdetleges, helyiértékes jegyeket is hordozó, számírás: jele az 1-nek és a 10-nek, meg a 60 hatványainak volt.

Mezopotámia a II. évezred első harmadában

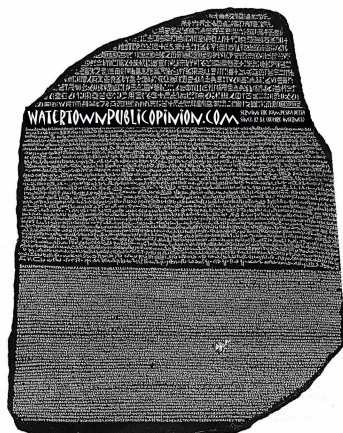
- 1 2000 körül több hullámban újabb, nomád, hódító sémi népek jönnek: (ismét) akkádok, elámiak, amurok/amoriták és mások.
- 2 Letelepdednek, újabb városokat alapítanak, köztük **BABILON**T. Gyors „lakosságcsere”, a sumer holt nyelv lesz, az akkád válik általánosan használttá.
- 3 A XVIII. század elején **HAMMURAPI** megalapítja az **Óbabiloni Birodalmat**.
- 4 Hammurapi törvényei, 1801, Susa.
- 5 Ma is érvényes és használt matematikai eredmények.
- 6 1600 körül a hettita hódítók megdöntik a birodalmat. Rövidesen a kassuk is jönnek, elterjesztik a lótenyésztést.
- 7 Asszir hódítók.

Mezopotámia a II. évezred első harmadában

Írásos emlékek.

- 1 Az első számottevő leletegyüttes: Asszurbanipal asszir uralkodó Ninive-i könyvtára.
- 2 1870. A Behistum kőtábla megtalálása:
- 3 perzsa, asszir és méd nyelven tudósít I. Dareiosz perzsa uralkodó Kambüesz fölötti győzelméről
- 4 A perzsa ismeretében megfejtették a másik kettőt, majd az asszir alapján az akkádót.

Behistum tábla



Mezopotámia a II. évezred első harmadában

A mezopotámiai számírás.

60-as alapú — következetesen helyiértékes — számírást alkalmaztak. Mindössze két jelet használtak: saját jele az 1-nek és a 10-nek volt. Hiányossága: nem volt jele a számjegy hiányának.

A számjegyek írása.

- Az 1 jele, az „ék”:
↓
- Nemcsak az 1-et, hanem a 60 bármely egész kitevős hatványát jelölhette.
- A 10 jele, a „sarokpánt”:
↙
- Ez szolgált a 60 bármely egész kitevős hatványa tízszeresének jelölésére is.

A mezopotámiai számírás.

A lehetséges jelentések.



- Ha egész szám, akkor lehet például

-

$$1 \times 60^3 + 10 \times 60^2 + 20 \times 60 + 5 = 253.205,$$

- vagy

$$1 \times 60^2 + 30 \times 60 + 5 = 5.405,$$

- vagy akár

$$60 + 35 = 95$$

- sőt még

$$1 \times 60^2 + 35 = 3635$$

A mezopotámiai számírás.

DE ők hatvanados törtekkel is számoltak. Újabb hiányosság: hatvanados vessző nincs.

A lehetséges jelentések száma növekszik.

Törtek.

Néhány lehetséges jelentés:

-

$$1 + 10 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-3} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{43.200},$$

-

$$60 + \frac{35}{60} = 60 \frac{7}{12}.$$

A mezopotámiai számírás.

Neugebauer ötlete.

A 60-as számrendszerben megadott számok decimális jegyekkel való fölírására Neugebauer adott meg egy módszert: a 60-ados jegyeket decimálisan írjuk, és vesszővel választjuk el egymástól. A „hatvanados-vesszőt” pontosvesszővel jelöljük. Így az előbbi számok a következőképp írhatjuk:

Az átírás.

$$1 \times 60^3 + 10 \times 60^2 + 20 \times 60 + 5 = \mathbf{1, 10, 20, 5} = 253.205,$$

$$1 \times 60^2 + 30 \times 60 + 5 = \mathbf{1, 30, 5} = 5.405,$$

$$1 + 10 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-3} = \mathbf{1; 10, 20, 5} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{43.200}$$

Aritmetika Hammurapi korában.

Egyszerű észrevételek 1.

- A helyiértékes számírás egyszerűsítette a számítások elvégzését, lehetővé tette egyszerű táblázatok alkalmazását a szorzásra és az osztásra.
- Ilyen, számolást könnyítő táblát ezres nagyságrendben találtak.
- Ha „mai fejjel” gondolkodunk:
 - ▶ 58 szorzótáblát kellett készíteniük: a 2-től 59-ig terjedő számokra.
- Ők „még praktikusabbak” voltak, rövidítették a legtöbb táblát:
 - ▶ 1-20-ig minden szám szerepel, de utána csak a 30, 40 és az 50.
 - ▶ Világos miért: a hiányzó értékek összeadással megkaphatók.
- **DE** nem került elő egyetlen teljes, 58 táblás kollekció,
- **SŐT** a különböző lelőhelyekről sem.

Aritmetika Hammurapi korában.

Egyszerű észrevételek 2.

- Olyan táblákat (is) találtak, amelyek

1, 20 1, 30 1, 40 3, 20 és 3, 45

többszöröseit (szorzatait) tartalmazták.

- Ha ezek az ismertek folytatásai, akkor $60^2 = 3600$ táblából állt volna egy „kollekció”.
- Ez nehezen képzelhető el, mert agyagtáblák voltak, nem könnyű papirusz-tekercek.
- Sőt, olyan táblát is találtak, amelyen a 44, 26, 40 szám szorzatai szerepelnek.
- Ha még ezek is egy „teljes kollekció” részei, akkor az $60^3 = 216000$ darabos lett volna.
- Ez elképzelhetetlen, mert kezelhetetlen is.**

Aritmetika Hammurapi korában.

Egyszerű észrevételek 3.

Meglepőnek tűnhet, hogy nem találtak táblákat a 11-gyel, 13-mal, 14-gyel, 17-tel és a 19-cel való szorzásra.

Mi lehet ennek az oka?

A rejtély kulcsa néhány első látásra nehezebben értelmezhető tábla.

Aritmetika Hammurapi korában.

Egy „rejtélyes” tábla

2	30	16	3, 45	45	1, 20
3	20	18	3, 20	48	1, 15
4	15	20	3	50	1, 12
5	12	24	2, 30	54	1, 6, 40
6	10	25	2, 24	1	1
8	7, 30	27	2, 13, 20	1, 4	56, 15
9	6, 40	30	2	1, 12	50
10	6	32	1, 52, 30	1, 15	48
12	5	36	1, 40	1, 20	45
15	4	40	1, 30	1, 21	44, 26, 40

Kérdés.

- Mit rejt e tábla?
- A kulcs egy kis számolás.

Aritmetika Hammurapi korában.

Számolás.

- A háromszor két oszlopban összetartozó párok vannak,
- például

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0; 30 \\ \frac{1}{3} &= 0; 20 \\ \frac{1}{4} &= 0; 15 \\ \frac{1}{1, 21} &= 0; 0, 44, 26, 44 \end{aligned}$$

- azaz reciprok-párok.

Aritmetika Hammurapi korában.

Elemzés.

- Mivel nem volt jelük a számjegy hiányára, más olvasat is lehet, például

$$\begin{aligned} 2 \cdot 30 &= 1, 0, \\ 2 \cdot 0; 30 &= 1, \\ 0; 2 \cdot 0; 30 &= 0; 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Vélhetően** a táblázatban olyan $(a, \bar{a})$ párok szerepelnek, amelyekre

$$a \cdot \bar{a} = 60^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Megjegyzés.** Itt és később az egyiptomi matematikához bevezetett $\frac{1}{n} = \bar{n}$ írásmódot fogjuk használni.

Aritmetika Hammurapi korában.

Egy kérdés.

Mi az oka a „hiányoknak”? Miért nem szerepelnek pl. a 7, 11, 13, 14, ... számok?

Egy egyszerű válasz.

- Az ilyen számok reciprocai nem véges hatvanados törtek, például

$$\begin{aligned} 1 : 7 &= 0; 8, \overline{34, 17}, \\ 1 : 11 &= 0; 5, \overline{27, 16, 21, 49}, \end{aligned}$$

(periódikus) hatvanados törtek.

- Vélhetően a végeseket tekintették „szabályosoknak”, hiszen azokkal lehetett könnyen számolni.
- Sokszor tettek egy kivételt: 1 - 10-ig csak a 7 nem szabályos, olykor szerepeltették a 7 többszöröseit is.

Egy meglepetés: approximáció jellegű eredmények.

1. Tábla (Sachs)

- A szöveg a 7, 11, 13, 14 és 17 reciprokait tárgyalja, de 14 és 17 esetén nem $a \cdot \bar{a} = 1$, hanem $a \cdot \bar{a} = 10$ alakban,
- és kétoldali közelítést ad $\bar{7}$ -re,

$$8, 34, 16, 59 < \bar{7} < 8, 34, 18$$

Az YBC 7289 agyagtábla.



2. a YBC 7289 tábla.

A táblán egy négyzet látható két átlójával. Az oldalán a 30, átlóin az 1, 24, 51, 10 és a 42, 25, 35 számok olvashatók.

Ezek interpretációja:

- Vegyük észre, hogy

$$1, 24, 51, 10 \cdot 30 = 1, 24, 51, 10 : 2 = 42, 25, 35$$

- ami azt rejti, hogy az $a = 30$ oldalból a $d = 42, 25, 35$ átlót a

$$\sqrt{2} = 1; 24, 51, 10$$

érték segítségével kaptuk.

Mennyire jó az approximáció?

Számoljunk

- Emeljünk négyzetre

$$1; 24, 51, 10^2 = 1; 59, 59, 59, 38, 1, 40$$

- azaz a hiba kisebb mint $22 \times 60^{-4} \approx 10^{-7}$.
- Decimálisan e szám 1,41421296, a mai kalkulátor adta 1,4142135 helyett.

Egy jogos kérdés.

- Ismerték a Pitagorasz-tételt több mint 1000 évvel a görög matematikus előtt?
- A válasz IGEN, de ...
- Később indoklunk.

További approximációk.

- Használták a pontosabb $\sqrt{2} \approx 1; 25$ közelítés is.
- Ebből származhat a III.-IV. századi hindu Sulva-Sutra

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

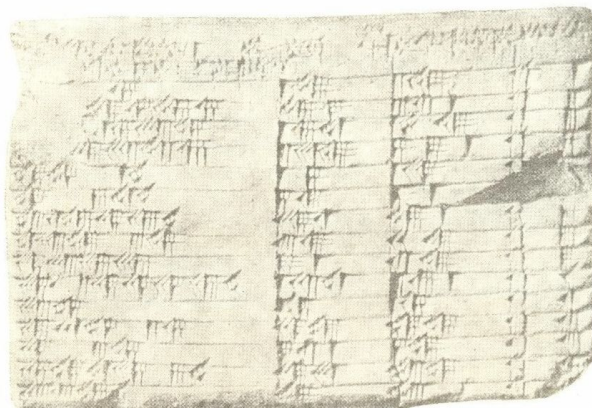
értéke,

- amelynek szexageszimális megfelelője:

$$1; 25 - 0; 0, 8, 49, 24 = 1; 24, 51, 10, 35, \dots$$

- Még ekkor is használták az egyiptomi elemi törtet.

A Plimpton 322 agyagtábla.



A Plimpton 322 agyagtábla.

Az első benyomás.

- A New York-i Columbia Egyetemen őrzött tábla töredezett, még újkori megtalálása előtt megragasztották.
- Az eredetileg minden bizonnyal nagyobb táblán négy oszlop található, az utolsó jelentősége csekély, csak a sorok számozását tartalmazza.
- Mindegyik fölött megnevezés is van (az elsőé letörött)
- II. szélességmegoldó szám,
- III. átmérőmegoldó szám,
- IV. neve.

Plimpton 322 Neugebauer átírásában

I	II(= b)	III(= d)	IV
[1, 59, 0,]15	1, 59	2, 49	1
[1, 56, 56,]58, 14, 50, 6, 15	56, 7	3, 12, 1	2
[1, 55, 7,]41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1, 50, 49	3
[1,]5[3, 1,]0, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	4
[1,]48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
[1,]47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
[1,]43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
[1,]41, 33, 59, 3, 45	13, 19	20, 49	8
[1,]38, 33, 36, 36	9, 1	12, 49	9
1, 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
1, 33, 45	45	1, 15	11
1, 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
[1,]27, 0, 3, 45	7, 12, 1	4, 49	13
1, 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 31	53, 49	14
[1,]23, 13, 46, 40	56	53	15

A Plimpton 322 agyagtábla.

Néhány egyszerű észrevétel.

- Az eredeti tábla néhány hibát tartalmaz:
 - (a) II.9-ben 9,1 áll, a helyes érték 8,1 lenne,
 - (b) II.13-ban 7,12,1 áll 2,41 helyett,
 - (c) III.15-ben 53 található 1,46 helyett,
 - (d) III.2-ben 3,12,1 áll 1,20,25 helyett.

E hibák vélhető okai.

- (a) egyszerű elírás lehet, pl. másolási hiba,
- (b) a szereplő érték a helyes szám négyzete: $2,41^2 = 7,12,1$
- (c) az írnok a helyes érték felét írta oda: $53 : 2 = 1,46$
- (d) nincs rá magyarázat.

A Plimpton 322 agyagtábla.

??? észrevétele.

I.8. helyes értéke a főntivel (amely Neugebauer könyvében szerepel) szemben [1]41, 33, 45, 14, 3, 45. E hiba okát sem magyarázza Neugebauer. Az elemzés alapján amennyiben d^2 leírásánál 7, 13, 20, 01 helyett egyszerűen 7, 13, 21-et írunk, a táblázabeli értékhez jutunk.

A Plimpton 322 agyagtábla.

Neugebauer elemzése 1.

- A II. és a III. oszlopban álló b, d számok ún **pitagoraszai számok**, ugyanis

$$d^2 = l^2 + b^2,$$

- Az l szám ugyan nem található meg a (jelenlegi) táblázaton, de könnyen kiszámítható b és d ismeretében.
- Vélhetően egy időközben letörött (és vissza nem ragasztott) oszlopban szerepeltek.
- Az első oszlop pedig a $\frac{d^2}{l^2}$ számokat tartalmazza.
- Itt a Pitagorasz-tétel?**,
- sőt **itt kezdődött a pitagoraszai-számhármasok vizsgálata?**

A Plimpton 322 agyagtábla.

Az előbbi / értékek.

sor	/	sor	/	sor	/
1	2,0	6	6,0	11	1,0
2	57,36	7	45,0	12	40,0
3	1,20,0	8	16,0	13	4,0
4	3,45,0	9	10,0	14	45,0
5	1,12	10	1,48,0	15	1,30

Három megválaszolandó kérdés.

- Milyen elv szerint rendezték el a számhármasokat?
- Hogyan számolták ki a táblázaton szereplő számokat? Hogyan határoztak meg olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám?
- Milyen „szinten”, milyen „mélységben” ismerték a Pitagorasz-tételt?

A válaszok.

1. Kérdés.

- Az első sorból

$$\frac{b}{l} = \frac{1,59}{2,0} = 0;59,30 \approx 1$$

- azaz a háromszög egyenlőszárú, egy négyzet fele.
- Egyszerűen kapható, hogy a 15. sornak megfelelő derékszögű háromszög két hegyesszöge közelítőleg 30° és 60° .
- A közbülső értékek pedig olyanok, hogy az I. oszlopbeli $\frac{d^2}{l^2}$ értékek közelítőleg lineárisan csökkennek, ami még inkább teljesül a $\frac{d}{l}$ értékekre.

3. Kérdés.

A válasz egyszerű: empirikus eredményként.

A válaszok.

2. Kérdés.

- Tudjuk (MA), hogy minden pitagoraszai számhármas megkapható a következő formula alapján.

$$l = 2pq, \quad b = p^2 - q^2, \quad d = p^2 + q^2,$$

- ahol $p, q \in \mathbb{N}$, amelyekre ln. k. o. $(p, q) = 1$, $p > q$, nem lehet mindkettő páratlan.
- Ezekből

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{2}(p\bar{q} + \bar{p}q).$$

- Világos, hogy $\frac{d}{l}$ csak akkor véges hatvanados tört (a táblán ez mindig teljesül), ha p, q szabályos számok, azaz csak a 2,3,5 lehetnek prímosztói.
- Sőt, mindegyik olyan, hogy reciproka szerepel majd mindegyik táblázatban.

A válaszok.

2. Kérdés, a számolás menete.

- Sok olyan feladat szerepel az agyagtáblákon, amelyekben két mennyiséget kell meghatározni akkor, ha ismerjük szorzatukat valamint összegüket vagy különbségüket.
- Ha modern jelöléseket használunk, akkor

$$\begin{aligned}x \cdot y &= a \\ x \pm y &= b\end{aligned}$$

alakú egyenletrendszerhez jutunk, amelyből

$$\begin{aligned}x &= \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a} \\ y &= \pm \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}\end{aligned}$$

A válaszok.

2. Kérdés, a számolás menete.

- Eljárásukat ismerjük, ugyanaz, ami „összeg és szorzat módszereként” szerepel az alexandriai Diophantosznál I.sz. 250 körül.
- Alkalmazásához tudni kell az $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ azonosságot, és tudni kell négyzetgyököt vonni.
- A pitagoraszai számhármaskok esetén az

$$\begin{aligned}a &= x + y \\ b &= x - y\end{aligned}$$

egyenletrendszerből lehet kiindulni, de teljesülnie kell még az

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{és} \quad c^2 = 4xy$$

főltétel párnak.

A válaszok.

2. Kérdés, a számolás menete.

- Ha x, y egész, akkor a, b is egészek,
- de $c = 2\sqrt{xy}$ csak akkor (pozitív) egész, ha $\sqrt{xy}$ egész, tehát

$$x = p^2, \quad \text{és} \quad y = q^2,$$

- valamely $p, q \in \mathbb{N}$ -re.
- Ebből már egyszerűen adódik, hogy a, b, c pitagoraszai számhármask, ha valamely $p, q \in \mathbb{N}$ -re, ahol $p > q$ és nem lehetnek egyszerre páratlanok, és

$$a = p^2 + q^2, \quad b = p^2 - q^2, \quad c = 2pq.$$

Egy BM agyagtábla alapján.

Négyzetgyökvonás.

- Ha a 2 négyzetgyököt akarjuk meghatározni akkor egy olyan számot kell keresnünk, amelyiket önmagával megszorozva 2-t kapunk.
- Az is világos, hogy a keresett szám nagyobb 1-nél, de kisebb 2-nél.
- Az agyagtábláról tudjuk, hogy lépésenként egymás után olyan számokat számoltak ki, amelyeket önmagukkal szorozva a 2-höz egyre közelebb kerültek.

Egy BM agyagtábla alapján.

A számolás menete.

- **1. lépés:** Legyen az első közelítés $1;30$ és osszuk el ezzel a 2 -t, $1;20$ -at kapunk. **A $\sqrt{2}$ e két szám közé esik.**
- **2. lépés:** Vegyük e két szám összegének felét (számtani közepüket), ami az előbbi kettő között van. Ez

$$0;30(1;30 + 1;20) = 0;30 \cdot 2;50 = 1;25.$$

- Ha ezzel elosztjuk a 2 -t, akkor $1;24,42,21$ -et kapunk. **E két szám is közrefogja a $\sqrt{2}$ -t, de már közelebről.**
- **3. lépés:** Vegyük e két utóbbi szám számtani közepét:

$$\begin{aligned} 0;30(1;25 + 1;24,42,21) &= 0;30 \cdot 2;49,42,21 \\ &= 1;24,51,10,30. \end{aligned}$$

Egy BM agyagtábla alapján.

A számolás menete.

Ha elhagyjuk az utolsó 60 -ados jegyet, vagy a 21 felét 10 -nek vesszük, megkapjuk a YBC 7289 agyagtábla értékét: **$1;24,51,10$.**

XX.-XXI. századi kérdések.

Két kérdés.

- Biztosan konvergál-e az iménti eljárással kapott sorozat tetszőleges $a \in \mathbb{Q}^+$ esetén $\sqrt{a}$ -hoz?
- Ha a válasz igen, mit mondhatunk a konvergencia sebességéről, azaz mennyire hatékony az eljárás?

Válasz az 1. kérdésre.

- Alkalmazzuk az eljárást tetszőleges $a \in \mathbb{Q}^+$ -ra.
- **1. lépés:** Legyen a_1 , és $b_1 = \frac{a}{a_1}$. $\sqrt{a}$ e két érték között van.
- **2. lépés:** Legyen $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ és $b_2 = \frac{a}{a_2}$.
- E két szám is közrefogja $\sqrt{a}$ -t, és
- a_2, b_2 az a_1 és b_1 közé esik.

XX.-XXI. századi kérdések.

Válasz az 1. kérdésre.

- Az eljárást folytatva olyan

$$a_1, a_2, \dots \quad b_1, b_2, \dots$$

sorozatokat kapunk, amelyre

- egyrészt a_i és b_i ($i = 1, 2, \dots$) közrefogja $\sqrt{a}$ -t, másrészt

$$|a_1 - b_1| > |a_2 - b_2| > \dots$$

- Ez azt jelenti, hogy az $\{a_i, b_i\}$ párok által meghatározott intervallum sorozat tagjainak hossza 0 -hoz tart, azaz egyetlen közös pontjuk van, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{a}.$$

XX.-XXI. századi kérdések.

Válasz a 2. kérdésre.

- Alkalmazzuk eljárásunkat $\sqrt{2}$ kiszámítására egy 8 jeggyel dolgozó kalkulátort használva.
- Legyen $a_1 = 1,5$.
- Maximálisan kihasználva e kalkulátor lehetőséget, $a_4 = 1,4142135$.
- Ez az érték megegyezik azzal, amelyet kalkulátorunk négyzetgyökvonó funkciója ad.
- Ha a Windows kalkulátorát használjuk, akkor az

1,4142135623730950488016887242097

számot kapjuk.

- A pontosság $6 \cdot 10^{-7}$.
- Emlékeztetőül, az agyagtábla értéke decimálisan $1,41421\overline{296}$