

Hilbert VII. problémája, avagy mik is a valós számok.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2012. május 6.

Út a valós szám mai fogalmához: a kezdetek.

Euler előtt.

- Elméletileg: valós szám = ami a valóságban létezik.
- Gyakorlatilag: kezdetben pozitív, később tetszőleges racionális szám (= előáll, mint két egész szám hányadosa), végül bizonyos algebrai irracionálisokat, pontosabban a $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[m]{b}$ alakú számokat, — lényegében azokat, amelyek szerepelnek Euklidesz X. könyvében — is ide sorolták.
- De már a pisai Leonardo rámutatott, hogy nem minden egyenlet gyökei kaphatók meg az előbbi alakban.

Euler.

- Megjelenik — nem pontosan — a képzetes (=komplex) szám fogalma, de az a valós szám fogalmán alapul.
- **Euler egy sejtése:** vannak olyan számok is, amelyek **meghaladják az algebrai módszerek erejét.**

Út a valós szám mai fogalmához: a kezdetek.

Euler pontosít.

- Pontosabban: vannak olyan „valós(=valóságos) számok” is, amelyek nem racionálisok, de nem is gyökmennyiségek.
- **Definíció.** Az α „valós szám” **algebrai szám**, ha van olyan $f(x)$ racionális (egész) együtthatós nemzérő polinom, hogy $f(\alpha) = 0$.
- A korábbi sejtés pontosabban: Az irracionális számoknak két osztálya van: az előbb definiált algebraiak, valamint azok, amelyek „meghaladják” az algebrai módszerek erejét, azaz nem gyökei egyetlen racionális együtthatós (nemzérő) polinomnak sem.
- Ez utóbbiakat Euler **transzcendens számoknak** nevezte.
- Az elnevezés eredete: transcend=meghalad.

Hogyan ismerhetők föl a transzcendens számok?

- Tételezzük föl, hogy vannak ilyenek.
- Euler sejtése szerint léteznek transzcendens számok, pl. e, π ilyen, de a logaritmus függvények, valamint a trigonometrikus függvények is a legtöbb helyen ilyen értéket vesznek föl.

Egy kézenfekvő ötlet.

- Egyszerűen igazolható, hogy a racionális számok tizedestört alakja véges, vagy periódikus.
- Bizonyítható, hogy egy α valós szám pontosan akkor racionális, ha lánc tört alakja véges, így a végtelen lánc törték állítják elő az irracionálisokat.
- Hasonlóan, mint a tizedestörtöknél, definiálható a lánc törték periodicitása.
- **Jámber óhaj:** De szép lenne, ha éppen a periódikus végtelen lánc törték lennének az algebrai irracionálisok.

Hogyan ismerhetők föl a transzcendens számok?

- **Sajnos** nem így van, a periódikus lánc törtek az ún. (valós) kvadratikus irracionálisokat, az

$$\frac{a + b\sqrt{t}}{c}, \quad a, b, c, t \in \mathbb{Z}, \quad t > 0 \text{ négyzetmentes}$$

alakú valós számokat reprezentálják,

- azaz az egész együtthatós másodfokú egyenletek nem racionális gyökei.

Euler egy eredménye

Az e irracionális, mert lánc törtek alakja végtelen, DE vélhetően NEM kvadratikus irracionális, mert lánc törtek alakja nem tűnik periódikusnak.

Hogyan ismerhetők föl a transzcendens számok?

e lánc törtek alakja

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

$$= \langle 2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots \rangle$$

Ez tényleg nem tűnik periódikusnak, sőt a π lánc törtek alakja sem:

Lambert (Euler tanítványa)

$$\pi = \langle 3; 7, 15, 1, 282, \dots \rangle$$

Áttörés:

LIIOUVILLE.

Az 1840-es évek elején folytatott vizsgálatai elvezettek annak igazolásához, hogy

LÉTEZIK TRANSCENDENS SZÁM.

Áttörés:

Liouville módszere

- **Definíció.** $\alpha \in \mathbb{R}$ n -edfokú (valós) algebrai szám, ha a legalacsonyabb fokszámú olyan $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, amelyre $f(\alpha) = 0$ n -edfokú.
- Az áttörést lehetővé tevő módszer a **diofantikus approximáció**.
- **Definíció.** Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az α valós szám n -edrendben approximálható racionális számokkal, ha létezik olyan — csak α -tól függő — $K(\alpha)$ valós szám, hogy az

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{K(\alpha)}{q^n}$$

egyenlőtlenség végtelen sok (p, q) egészekből álló párra teljesül.

Áttörés:

Egy tétel.

Bármely irracionális szám approximálható másodrendben racionális számokkal. A legjobb másodrendű approximációkat a szám lánctört alakjának kezdő-szeletei adják.

Liouville tétele (1844)

Ha α n -edfokú valós algebrai szám, akkor nem approximálható n -edrendnél jobban racionális számokkal.

Következmény.

Létezik transzcendens szám, ha létezik olyan valós szám, amely tetszőleges rendben approximálható racionális számokkal.

Az első ismert transzcendens szám.

Liouville tétele (1844).

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001 \overbrace{0 \dots 0}^{17 \text{ zérus}} 10 \dots$$

sor konvergens, és összege tetszőleges rendben approximálható racionális számokkal, így az transzcendens szám.

Kitérő: A számfogalom fölépítésének vázlata.

Természetes számok.

- A természetes számok a következő axiómarendszer egy modellje.
- A Peano axiómák.
- $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, ha
 - 1 $\in \mathbb{N}$,
 - $\forall k \in \mathbb{N}$ -hez létezik egy $k' \in \mathbb{N}$,
 - nem létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $1 = k'$,
 - ha valamely $m, n \in \mathbb{N}$ -re $m' = n'$, akkor $m = n$,
 - ha $S \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $1 \in S$, és valahányszor $m \in S$, mindannyiszor $m' \in S$, akkor $S = \mathbb{N}$.
- Az $\mathbb{N}$ halmazon definiálható két asszociatív és kommutatív művelet, amelyeket általában $+$ és $\cdot$ jelöli, és összeadásnak, valamint szorzásnak nevezzünk.

Kitérő: A számfogalom fölépítésének vázlata.

Egész számok.

- A természetes számok halmazán általában nem oldhatók meg az $a + x = b$ alakú egyenletek, ahol $a, b \in \mathbb{N}$, ezért azt bővíteni kell.
- Végezzük el a következő konstrukciót.
 - Legyen $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és definiáljuk a következő relációt.
 - Tetszőleges $(a, b), (c, d) \in A$ -ra $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.
 - Definiáljunk összeadást és szorzást az $A/\sim$ halmazon:

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} \quad \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

- Megmutatható, hogy az $(A/\sim; +, \cdot)$ algebra egységelemes kommutatív zérusosztómentes gyűrű (=integritástartomány).
- Ezen a gyűrű elemeit egész számoknak nevezzük, és halmazukat $\mathbb{Z}$ jelöli. $\mathbb{N}$ beágyazható $\mathbb{Z}$ -be, azaz létezik $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ injektív homomorfizmus.

Kitérő: A számfogalom fölépítésének vázlata.

Egész számok.

- Egyszerűen látható, hogy tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ -re
-

$$\begin{aligned}(a, b) &\sim (a + c, b + c) \\ (a, a) &\sim (b, b) \\ \overline{(a, b)} + \overline{(c, c)} &= \overline{(a, b)} \\ \overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} &= \overline{(c, c)} \\ \overline{(a, b)} + \overline{(b + c, a + d)} &= \overline{(c, d)}\end{aligned}$$

- A $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A/\sim, n \mapsto \overline{(a + n, a)}$ leképezés művelettartó és injektív, amely azt jelenti, hogy $A/\sim$ tekinthető $\mathbb{N}$ bővítésének.

Kitérő: A számfogalom fölépítésének vázlata.

Racionális számok.

- A bővítési folyamatot tovább kell vinni, meg kell konstruálni az egész számokat tartalmazó legszűkebb testet, amelyben már megoldhatók az $ax = b$, $a \neq 0$ alakú egyenletek is.
- Végezzük a következő konstrukciót:
 - Legyen $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, amelyen két műveletet és egy (ekvivalencia) relációt definiálunk:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (ad + bc, bd) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd),\end{aligned}$$

- $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.
- Ismét kiterjesztjük a műveleteket az $A/\sim$ faktorhalmazra.

Kitérő: A számfogalom fölépítésének vázlata.

Racionális számok.

- Tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$ -ra
-

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \overline{(0, b)} &= \overline{(a, b)} \\ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, d)} &= \overline{(a, b)} \\ a \neq 0 &\Rightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(d, d)}\end{aligned}$$

- Az utóbbiból következik, hogy ha $a \neq 0$, akkor megoldható az

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(c, d)}$$

egyenlet.

- Ez azt (is) jelenti, hogy a $A/\sim$ algebra test, amelyet a racionális számok testének nevezünk, és általában $\mathbb{Q}$ -val jelöljük.

Kitérő: A számfogalom fölépítésének vázlata.

Racionális számok.

- A racionális számok testében — többek közt — nem oldhatók meg a következő problémák.
 - Bár a konvergens sorozat fogalma definiálható: *a racionális számokból álló (a_n) sorozat konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ racionális számhoz van olyan $\nu \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy bármely $m, n > \nu$ -re $|a_n - a_m| < \varepsilon$ az ilyen sorozatoknak gyakran nem létezik határértéke.*
 - A $\mathbb{Q}$ test algebrailag nem zárt, azaz egy nemzéró $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak nem föltétlenül van racionális szám zéróhelye.
- A következő bővítést úgy végezzük, hogy az első probléma megoldódjék.

Valós számok.

G. Cantor eljárása 1.

- Jelölje $\mathbb{Q}_\infty$ az összes racionális tagú végtelen sorozat halmazát, és legyen $\alpha = (a_k) \in \mathbb{Q}_\infty$. Ezen sorozat *nullasorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ esetén van olyan $\nu \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > \nu$ -re $|a_n| < \varepsilon$.
- A nullasorozatok halmazát jelölje $\mathbb{Q}_0$.
- Azt mondjuk, hogy az α sorozat *konvergens*, ha tetszőleges α' részsorozatára $\alpha - \alpha' \in \mathbb{Q}_0$.
- Egyszerűen látható, hogy ez egy átfogalmazása a konvergencia korábban adott definíciójának.
- A konvergens sorozatok halmazát jelölje $\mathbb{Q}_\infty^k$.
- Világos, hogy e halmaz a sorozatok szokásos összeadásával és szorzásával egységelemes kommutatív gyűrű.

Valós számok.

G. Cantor eljárása 2.

- Vezessük be a következő $\sim$ relációt $\mathbb{Q}_\infty^k$ -n:
- Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_\infty^k$.

$$\alpha \sim \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta \in \mathbb{Q}_0$$

- Egyszerűen belátható, hogy $\sim$ kongruenciája a $\mathbb{Q}_\infty^k$ gyűrűnek.
- Ugyancsak egy egyszerű eljárással kaphat, hogy

$$\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$$

test.

- Világos, hogy e testnek van olyan részteste, amely izomorf a racionális számok $\mathbb{Q}$ testével: valamely $a \in \mathbb{Q}$ -nak azt az osztályt feleltessük meg, amely tartalmazza az (a) ún. konstans sorozatot.

Valós számok.

G. Cantor eljárása 3.

A $\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$ testet a valós számok testének nevezzük.

Megjegyzés.

Megmutatható, hogy a $\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$ test, amelyet a következőkben $\mathbb{R}$ jelöl, kielégíti az 1. feltételt, azaz bármely, az elemeiből képezett konvergens sorozatnak van határértéke $\mathbb{R}$ -ben. A második feltételt azonban csak a komplex számok teste elégíti ki.

Egy nem éppen kedvező eredmény.

G. CANTOR (1874)

- A valós számok (a végtelen tizedestörttekkel reprezentálható számok) „többnek”, mint a racionális számok, azaz egy ún. **nem megszámlálható** halmazt alkotnak, de
- az összes (valós és komplex) algebrai számok halmaza megszámlálható.
- Következésképp, **a transzcendens számok (külön a valósok is!) nem megszámlálható halmazt alkotnak**, „ugyanannyian” vannak, mint az összes valós (vagy komplex) számok.
- Másképpen mondva a transzcendens számok halmaza *kontinuum számosságú*, azaz **majdnem minden valós szám transzcendens**.

Néhány fontos konstans.

HERMITE (1873)

Az e szám transzcendens.

LINDEMANN (1882)

- Ha $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ különböző algebrai számok, akkor

$$e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_k}$$

lineárisan függetlenek az algebrai számok teste fölött.

- Másképpen mondva (az előbbi jelölésekkel) tetszőleges $p_1, \dots, p_k$ algebrai számokra

$$p_1 e^{\alpha_1} + \dots + p_k e^{\alpha_k} = 0 \Leftrightarrow p_0 = \dots = p_k = 0.$$

Néhány fontos konstans.

Következmények.

- Ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, akkor e^α , továbbá, ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0, 1$, akkor $\log \alpha$ transzcendens.
- Az $e^{i\pi} + 1 = 0$ egyenlőség alapján $i\pi$ transzcendens, így — mivel az algebrai számok testet alkotnak, és i algebrai — π is transzcendens.
- Így a kör négyszögesítésének ókori problémája nem megoldhatónak bizonyult.
- Lindemann tételéből következik Hermite eredménye: ha $n = 2$, $p_1 = 1$, $x_2 = 0$, akkor e^{x_1} nem algebrai, s így e sem lehet az.

Néhány fontos konstans.

Három nyitott kérdés.

- Természetes kérdés ezek után, hogy az $e + \pi$ szám transzcendens-e.
 - A válasz nem ismert, míg
 - $e + i\pi$ transzcendens volta triviális.
- Ugyancsak ismeretlen az ún. Euler-konstans, a

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right),$$

szám milyensége, a sejtés: transzcendens.

- Szintén ismeretlen az α^β alakú számok természete, ha α algebrai, β pedig irracionális algebrai szám, például algebrai- e vagy transzcendens $2^{\sqrt{2}}$ szám.

Részlet D. Hilbert 1900-as párizsi előadásából.

Hermite és Lindemann eredményeit — amelyek az exponenciális függvényekre vonatkoznak — minden matematikus nagyra értékeli. Ezen az úton tovább kell haladni, s az elkövetkező időben az alábbi problémát kellene megoldani. Bizonyos — az analízisben fontos — transzcendens függvények egyes algebrai szám helyeken algebrai szám értékeket vesznek föl. Úgy tűnik, hogy ezt érdemes alaposan megvizsgálni. Ugyanis általában azt képzeljük, hogy a transzcendens függvények mindenütt transzcendens értékeket vesznek föl. Tesszük ezt annak ellenére, hogy ismerünk olyan transzcendens függvényeket, amelyek algebrai számokhoz algebrai számot, sőt racionálisat rendelnek.

Részlet D. Hilbert 1900-as párizsi előadásából.

Például az $e^{i\pi z}$ exponenciális függvény értéke minden $z \in \mathbb{Q}$ -ra algebrai, míg minden $z \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ -ra transzcendens. Ezen állítás geometriailag is megfogalmazható. Ha egy egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szög és a szárak által alkotott szög aránya transzcendens, akkor az alap és a szár aránya is transzcendens. Bár ez egy igen egyszerűen hangzó állítás, ekvivalens Hermite és Lindemann eredményével, s a bizonyítása is igen nehéz, sőt meglehetősen bonyolult. Hasonlóan nehéz lehet a bizonyítása a következő állításnak is.

HILBERT VII. PROBLÉMÁJA.

Hilbert kérdése.

Legyen $\alpha \in \mathbb{A}$ és $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$, ekkor az α^β alakú számok, például $2^{\sqrt{2}}$, $e^\pi = i^{-2i}$ mindig transzcendens szám, vagy legalább irracionális.

Tovább az előadás.

Biztos vagyok benne, hogy ezen, és a hasonló problémák megoldása egészen új módszereket igényel, s egy új szemléletet is ad. Új megvilágításba helyezi az irracionális és a transzcendens számokat.

A probléma megoldása.

Részlet Hilbert egy előadásából, Göttingen 1919.

- ❶ A VII. Probléma nagyon nehéz, így érdemes összehasonlítani néhány ismert problémával.
- ❷ A Riemann-hipotézis bizonyítása irányába az utóbbi években komoly előrehaladás történt, így nagyon reméli, hogy még megéri a bizonyítását.
- ❸ Számos biztató eredmény van a Fermat-sejtéssel kapcsolatban is, ezért talán a hallgatóság legfiatalabb tagjai megérik a sejtés bizonyítását.
- ❹ Annak a bizonyítását azonban, hogy a $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám, a jelenlevők közül senki sem fogja látni.

Hilbert vélekedéséről.

Az első két kérdésről.

- A Riemann-hipotézis, azaz a ζ függvény minden komplex zéróhelyének a valós része $\frac{1}{2}$, a mai napig nyitott kérdés.
- A Fermat sejtés bizonyítását 1993-ban publikálta A. Wiles.
- Azaz egy kérdésben Hilbert tévedett, egyben talán nem, ha ...

A harmadikról.

Az első részleges megoldás, az első nem teljes válasz 1929-ben jelent meg, majd pár év alatt teljessé vált a megoldás.

A VII. Probléma részleges megoldása.

Gelfond tétele. (1929)

Ha β komplex kvadratikus irracionális szám, akkor α^β transzcendens.

Ez tartalmazza az e^π esetet, hiszen e^π az i^i egyik értéke. i pedig komplex és kvadratikus irracionális.

Kuzmin és Siegel tétele. (1930)

α^β akkor is transzcendens, ha β valós kvadratikus irracionális szám.

Megjegyzések.

- 1 A két matematikus eredményét egymástól függetlenül érte el.
- 2 Hilbert megérte annak bizonyítását, hogy $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám?

A VII. Probléma teljes megoldása.

Gelfond – Schneider tétel. (1934)

Ha α, β 0 és 1-től különböző algebrai számok, továbbá β irracionális, akkor α^β transzcendens szám.

Két további ekvivalens állítás.

- 1 Ha α, β 0, 1-től különböző algebrai számok, akkor $\log \alpha / \log \beta$ racionális, vagy transzcendens.
- 2 Legyenek α, β nemzérő algebrai számok. Ha $\log \alpha, \log \beta$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött, akkor lineárisan függetlenek az algebrai számok teste fölött.

A VII. Probléma teljes megoldása.

Megjegyzések.

- 1 Gelfond és Schneider egymástól függetlenül jutott el ezen eredményhez.
- 2 Hilbert sejtése a legerősebb formában bizonyult igaznak.
- 3 Hilbert 1943-ban halt meg, azaz megérte sejtése teljes bizonyítását.
- 4 Még egy 1919-es tévedése.

DE

Az előbbi tévedések nem árnyékolják be azon általános vélekedést, miszerint **David Hilbert a XIX. század utolsó harmadának és a XX. század első felének egyik legnagyobb hatású matematikusa volt.**

Egy záró gondolat.

- Gelfond bizonyításában alapvető szerepe volt a következő komplex függvénynek:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} C_{kl} e^{(k \log \alpha + l \log \beta)z}$$

- ahol $C_{kl} \in \mathbb{Z}$ és $|F^{(k)}(p)|$ „nagyon kicsi” sok p, k értékre.

Az előbbi függvény csak egy szerény adalék a probléma nehézsége illusztrációjához.