

A görög klaszikus kor.

Logisztika (aritmetika) és számelmélet.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2014. március 4.

Történeti áttekintés.

A folyamamenti kultúrák hanyatlása a II. évezred közepétől

- a nagy- és növekvő számú új papirusz és agyagtábla nem jelentett minőségi fejlődést,
- a bronzot fölváltotta a vas $\Rightarrow$ az ennek birtokában levő népek gyors fölemelkedése,
- az I. évezred elején a fejlődés súlypontja a Földközi tenger medencéjébe (a partvidék és a szigetek) tevődött át $\Rightarrow$ a „tengeri kor” kezdete.

Átmenet a kultúra területén: a MINOSZ-i kultúra Krétán.

- I.e. 2500 - 1400-ig létezett,
- élénk hajóforgalom, kereskedelem Kréta és Egyiptom között,
- Minosz palota, pusztulása I.e. 1400 körül,

Történeti áttekintés.

A görög törzsek bevándorlása.

- A 3 bevándorló törzs előbb a kisázsiai partvidéket, utána a szigetvilágot (beleértve néhány Földközi tengeri szigetet, pl. Ciprust is), majd a Peloponeszoszi félszigetet foglalta el.
 - A ionok zömmel „szelíd” hódítók voltak, átvették a krétai eredetű kultúrát,
 - az achájok már szervezett birodalmat alakítottak ki és megkezdték a hatalom átvételét,
 - ezt a dorok befejezték,
 - korábbi helyett szinte egyeduralkodóvá tették ősi indoeurópai hitvilágukat ötvözve a krétaival.
- A kétféle — minoszi és indoeurópai — hitvilágból alakult ki az ismert GÖRÖG MITOLOGIA, amelyben egyaránt találhatók műkénei- és indoeurópai istenek.
- I.e. 1200 körül Agamemnon vezetésével szövetség Troja ellen, a híres **Trojai háború**.

Történeti áttekintés.

A görög kultúra kezdetei.

- Az első jelentős és hosszan létező görög városállam a kisázsiai **MILETOSZ** volt, amely egészen I.e. 540-ig alapvető szerepet játszott.
- Fontos keleti kapcsolatok: vita a matematika történészek és a filológusok között,
- Platon: „Bármit is vettek át a barbároktól, azt mindig magasabb tökélyre fejlesztették.”
- Thalész, Pithagorasz, Demokritosz és Eudoxos utazásai.
- van der Waerden: „... a hellének nem lehettek olyan korlátoltak, hogy ne vették volna észre és ne becsülték volna meg, ami az idegen kultúrákban érték.”

Történeti áttekintés.

A Klasszikus Görög Kor: I.e. 550 - 350.

- A „görög demokrácia virágkora”.
- Híres matematikai és filozófiai iskolák.
- Ion Iskola, Pitagoreusok, Eleaták, Archytasz iskolája, Szofisták, Akadémia, Lyceum, Eudoxos iskolája.
- Az iskolák jellege.
- Platon filozófiai művei, Arisztotelesz logikája.
- A matematika deduktív tudománnyá válása.
- A két enciklopédikus összegző matematikai munka: EUKLIDÉSZ, ELEMÉK, és APOLLONIUSZ, KÚPSZELETEK.

A Pitagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

Pithagorasz

- 1 A szamoszi Pithagorasz életéről.
 - 1 Legenda szerint Thalész tanítványa (is) volt.
 - 2 Utazásai: Egyiptom, Mezopotámia, India (?), Kína (???)
 - 3 Iskolát alapított Crotonban (Dél-Itália),
 - 4 Logisztika, aritmetika, geometria.
- 2 Az iskoláról:
 - 1 A legendák szerint Pithagorasz sok tanítványa volt, DE
 - 2 a név szerint ismert tagok: Philolaosz (V. sz.) és ARCHYTASZ (428-347)
 - 3 Proklosz (I.sz. V. sz.) szerint: ... *Pithagorasz a matematikát szabad előadásokban ismertette, ... ő volt (Pithagorasz), aki megteremtette a „tisztá matematikát”, s ezzel e tudományt a „szabad művészetek” részévé tette.*
 - 4 Ez azt (is) jelentette, hogy csak aritmetikával és geometriával foglalkoztak (a domináns az előbbi).

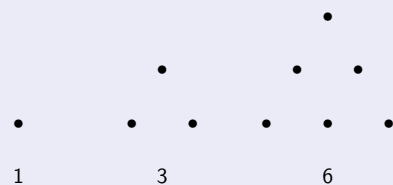
A Pitagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400.

- **Nagy kérdés:** valóban ők voltak-e a deduktív matematika megteremtői, vagy csak — tiszteletre méltó — előfutárai.
- **Konkrétabban:** **a szám absztrakt fogalma tőlük ered-e?**
- Kezdetben a szám fogalma még náluk sem különült el a fizikai valóságtól (pl. kövek), erre utalnak a figurális számokkal kapcsolatos eredmények, DE ebben is benne van az absztrakció csírája.
- Proklosz és Eudemosz $\longleftrightarrow$ Arisztotelész.

A Pitagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

Logisztika: figurális számok.

A háromszögszámok.



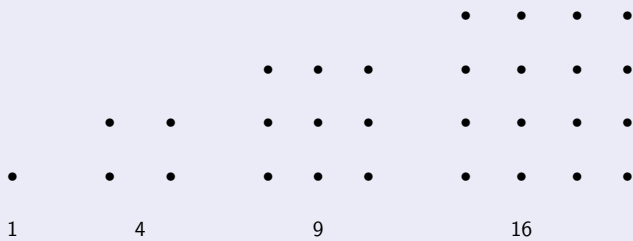
Háromszögszámok.

Általában:

$$h_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A Pitagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Logisztika.

Négyzetszámok:



Összefüggés a négyzetszámok és a háromszögszámok között:

$$n_k = h_k + h_{k+1} = \frac{k}{2}(k+1) + \frac{k+1}{2}(k+2) = (k+1)^2$$

A Pitagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400

Logisztika: négyzetszámok.

További észrevételeik a négyzetszámokkal kapcsolatban:

•

$$k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

•

$$1 + 3 + \dots + (2k + 1) = k^2.$$

A Pitagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Logisztika.

Ötszögszámok.

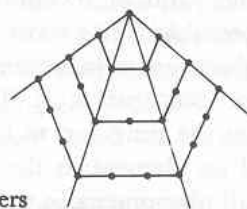


Figure 3.5. Pentagonal numbers

1, 5, 8, 11, ...

A Pitagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Logisztika.

Hatszögszámok.

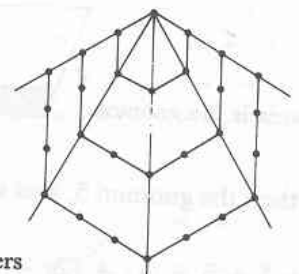


Figure 3.6. Hexagonal numbers

1, 6, 10, 14, ...

A Pitagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Aritmetika (számelmélet).

Általuk bevezetett fogalmak.

- A szám fogalma, páros- és páratlan szám,
- prímszám, összetett szám,
- osztó (rész),
- tökéletes szám, pl. 6, 28, 496, 8128. Nichomachos sejtése.
- A számtani-, a mértani- és a harmónikus közép fogalma.
- Zenei arány:

$$p : \frac{p+q}{2} = \frac{2pq}{p+q} : q$$

- Összemérhetőség: a és b (számok, szakaszok) összemérhetők, ha van olyan c , hogy $a = mc$, $b = nc$ valamely m, n számra.
- Nem összemérhető = irracionális.

Pitagoreus eredetű fogalmak.

Euklidesz, Elemek VII.

- **VII.1.D** Az *egység* az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk.
- **VII.2.D** A *szám* az egységekből összetevődő sokaság.
- **VII.3.D** Egy kisebb szám egy nagyobbban *hányada* (része), ha osztja a nagyobbat.
- **VII.12.D** *Prímszám*, amelyik csak az egységgel osztható. (**A8**)
- **VII.13.D** Számok egymáshoz *relatív príme*k, ha csak az egység közös osztójuk.
- **VII.14.D** *Összetett* az a szám, amelyiket valamely szám oszt.

Pitagoreus eredetű fogalmak.

Euklidesz, Elemek VII.

- **VII.17.D** A két szám összeszorzásakor keletkező számot *síkszám*nak nevezzük, az összeszorzott számokat pedig az oldalaknak.
- **VII.23.D** Egy szám *tökéletes*, ha egyenlő osztói (részei) összegével.

A Pitagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Aritmetika (számelmélet).

Nekik tulajdonított (Eudemosz és mások) összefüggés (tétel).

- Ha m páratlan szám, akkor
- $$\left(m, \frac{m^2 - 1}{2}, \frac{m^2 + 1}{2}\right)$$
 ún. pitagoraszai számhármas, azaz az ilyen oldalhosszúságú háromszögek derékszögűek.
- A „párosról és a páratlanról szóló tanítás,” Euklidesz, Elemek IX. 21-33. Tétel.
- Arisztotelész szerint: az, hogy a négyzet oldala és átlója nem összemérhető az ő fölfedezésük.
- Az, hogy $\sqrt{2}$ összemérhetetlen az 1 egységgel, először ők igazolták, módszerük a „reductio ad absurdum” volt. → Szabó Árpád elmélete.

Elemek IX. Könyv.

A Párosról és a Páratlanról szóló tanítás.

- **IX.21.** Bárhány páros számot adunk össze, az összeg páros.
- **IX.23.** Ha összeadunk valahány páratlan számot, amelyek páratlan sokan vannak, akkor az összeg is páratlan lesz.
- **IX.25.** Ha egy páros számból páratlant vonunk ki, a maradék páratlan.
- **IX.30.** Ha egy páratlan szám oszt egy párosat, akkor a felét is osztja.
- **IX.31.** Ha egy páratlan szám relatív prím valamely számhoz, akkor a kétszereséhez is relatív prím.

A Pitagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Aritmetika.

Nekik tulajdonított (Eudemosz és mások) eredmény (folytatás).

- Az összemérhetetlen arányok $\rightarrow$ irracionális mennyiségek (számok) elméletének kezdete $\rightarrow$ Elemek X. könyve.
- Végtelen sok prímszám van.
- Elegendő föltétel valamely páros szám tökéletes szám voltára.
- Két szám legnagyobb közös osztójának (közös részének) létezése, kiszámítása.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

Tételek.

- **IX.20.** *Prímszámok bármely adott sokaságánál van több.*
- **Bizonyítás.** (az eredeti) Legyenek az adott prímszámok a, b és c . Azt állítom, hogy több prímszám van, mint a, b és c .
- Vegyük ugyanis a, b és c legkisebb közös többszörösét, ami $\equiv a \pmod{VII. 36.}$ Tétel szerint $\equiv abc$ és tekintsük az $d = abc + 1 = e + 1$ számot.
- Ez vagy prímszám, vagy összetett szám.
- Legyen először prím. Találtunk tehát az a, b, c számoknál több prímet, ezeket és még d -t.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

A bizonyítás folytatása.

- Ne legyen most d prím. Ekkor osztja valamely prímszám (VII. 31. Tétel). Ossza a g prím.
- Azt állítom, hogy g az a, b és c egyikével sem azonos.
- Tegyük föl ugyanis, hogy az a, b és c osztják e -t, tehát g is osztja e -t (ugyanis a, b és c az összes prím).
- Viszont g d -t is osztja, tehát a maradék egységet is osztja g , ami ellentmondás, hiszen g szám.
- g tehát nem azonos az a, b, c számok egyikével sem.
- A feltétel szerint prím, tehát találtunk az adott a, b, c prímeknél több prímet, a -t, b -t, c -t és g -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

A bizonyítás folytatása.

- 1. **Megjegyzés.** Az oszthatóság egy elemi tulajdonságát használja, amelyet — két másikkal egyetemben — sohasem fogalmaz meg, de ismertnek tételez föl: ha $z = u + v$, $t|z$, $t|u$ akkor $t|v$.
- 2. **Megjegyzés.** Az iménti bizonyítás lényegében megegyezik azzal, amelyet az elemi számelméleti tanulmányainkban megismertünk, csak ott a föltételben szereplő „összes” prímszám a $p_1, p_2, \dots, p_k$. Euklidesz bizonyítása lényegében csak azt használja ki, hogy abból a föltételből, hogy csak véges sok prímszám létezik, szükségképp ellentmondásra jutunk. Tehát tulajdonképpen azt igazolja, hogy végtelen sok prímszám van, de ezt így nem fogalmazza meg, hiszen az ő világa véges.

Egy még meglepőbb tétel.

A IX. könyv utolsó tétele.

IX.36. *Ha az egységtől indulva kétszeres arányban mértani sorozatot alkotunk addig, amíg az összeg prímszám nem lesz, és ezt megszorozzuk az utolsó taggal, akkor tökéletes számot kapunk.*

Mai terminológiával, szimbolikával

A

$$(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1})2^{k-1}$$

szám tökéletes, ha az első tényező, azaz

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

prímszám. Ekkor k is prím.

Megjegyzések.

- A XVIII. században L. Euler igazolta e tétel megfordítását, azaz azt, hogy minden páros tökéletes szám ilyen alakú.
- Ebből következően, a páros tökéletes számok keresése $M_k = 2^k - 1$ alakú, ún Mersenne-prímek keresésére redukálódik.
- Világos, hogy M_k csak akkor prím, ha k prím.
- Természetes kérdések:
 - létezik-e végtelen sok Mersenne-prím, azaz végtelen sok páros tökéletes szám.
 - létezik-e páratlan tökéletes szám.

Tökéletes számok: a mai helyzet.

I.sz. 100 körül Nichomachosz

- Az első 4 tökéletes szám: 6, 28, 496, 8128.
- Két sejtést fogalmazott meg e számokkal kapcsolatban:
 - Az n -edik tökéletes szám n jegyű,
 - A páros tökéletes számok fölváltva 6-ra és 8-ra végződnek.
- Mindkét sejtés hamis, DE...

Kora középkori kommentárok.

- St. Augustinus (VI.sz.): *bár Isten a Világot egyszerre is megteremthette volna, de jobbnak látta ezt hat napig tartónak nyilvánítani, mert a mű tökéletességét a hat tökéletes szám is szimbolizálja.*
- Az Univerzum tökéletességét az is szimbolizálja, hogy egy holdhónap (az az idő, amely alatt a Hold megkerüli a Földet) 28 napos, vagyis egy tökéletes számmal adható meg.

Tökéletes számok: a mai helyzet.

Kora középkori kommentárok.

- yorki Alcuin (VIII.sz.): ... *a mai emberiség a Noé bárkájában utazó nyolc lélek leszármazottja, s ez a második teremtés már kevésbé tökéletes, mint az eredeti, lévén a nyolc nem tökéletes szám.*

További tökéletes számok.

- Hidaricus Regius (a XV. század): $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.
- XV. századi névtelen kézirat: az ötödik tökéletes szám

$$P_5 = 2^{12}(2^{13} - 1) = 33.550.336,$$

- Nichomachos 1. sejtése?
- Ugynő, a hatodik tökéletes szám: $P_6 = 2^{16}(2^{17} - 1) = 8.589.869.056$.
- A második sejtés is hamis.

Tökéletes számok: a mai helyzet.

Marin Mersenne 1644

- A $M_k = 2^k - 1$ számokat vizsgálta a $k \leq 257$ prímekre.
- Állítása: M_k prím, valahányszor

$$k = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 \text{ és } 257.$$

- Véltetően csak a $k < 31$ eseteket tesztelte explicite.
- Euler megállapította, hogy M_{31} prím,
- megkapta a nyolcadik (páros) tökéletes számot:

$$P_8 = 2^{30}(2^{31} - 1) = 2.305.843.008.139.952.128$$

Tökéletes számok: a mai helyzet.

Marin Mersenne 1644

- A lista öt hibát tartalmaz:
 1. M_{67} és M_{257} nem prímek,
 2. a listán nem szereplő M_{61}, M_{89}, M_{107} prímek.
- M_{127} prím voltát csak a XIX. század végén igazolta E. Lucas.

A továbbblés.

- Lucas tétele. *Képezzük a következ (rekurzív) sorozatot:*
 $r_1 = 3, r_{m+1} = r_m^2 - 2$. *Egy $4k + 3$ alakú p prímre M_p pontosan akkor prím, ha $M_p | r_{p-1}$.*
- Lehmer általánosítása a XX. század 20-as éveiből: *Módosítsuk az előző tételben szereplő sorozatot annyiban, hogy az első tag 4 (és nem 3). Tetszőleges p prímre M_p pontosan akkor prím, ha $M_p | r_{p-1}$.*

Tökéletes számok: a mai helyzet.

Mára az összes $M_n, n < 257$ teljes faktorizációja ismert. Ezek közül talán a legnehezebb (a leghosszadalmasabb) az M_{251} faktorizációja volt, amelyet először 1984-ben tudtak elvégezni, s 32 óra CPU időt igényelt egy szuperszámítógépen.

Jelenleg (2014. február) 48 Mersenne prím (páros tökéletes szám) ismert, a legnagyobb a

$$p = 57.885.161$$

kitevőhöz tartozik, decimális jegyei száma

$$17.425.170,$$

tesztelése 39 napot vett igénybe egy számítógépen. A 47. Mersenne prím 12.978.189 jegyű.

Tökéletes számok: a mai helyzet.

Két nyitott kérdés

- ❶ Létezik-e végtelen sok páros tökéletes szám?
- ❷ Létezik-e páratlan tökéletes szám?

Euklidesz.

- ❶ Euklidesz az Akadémián tanulhatott, de Alexandriában dolgozott i.e. 300 körül.
- ❷ A klasszikus kor után élt, de annak szellemében írta könyveit (Elemek, Kúpszeletek, Optika, stb.).
- ❸ Az Elemek a klasszikus kor matematikája egy részének enciklopédikus összefoglalása, mai szóhasználattal nem formális axiómatikus elméletként.
- ❹ Sok szerző művéből állította össze.
 - ❶ khioszi Hippokatesz, a platonista Leon könyvei,
 - ❷ Eudoxos és Theaitetosz számos eredményét építette be.

Euklidesz.

- ❶ Milyen formában maradt fenn?
 - ❶ A megírás korából nincs fennmaradt kézirat.
 - ❷ Későbbi görög kommentárok: az alexandriai Heron, Pappos (i.sz. 3. sz.), az alexandriai Theon és a neoplatonista Proklosz (mindkettő i.sz. 4. sz.) a legjelentősebbek.
 - ❸ A tőlük származó görög nyelvű töredékek és a későbbi arab fordítások az autentikus források.
 - ❹ A legrégebbi teljes kézirat 10. századi és a Vatikáni Könyvtárban őrzik. Görög nyelvű változat a Theon előtti időkből.
 - ❺ Bath-i Adelard latin fordítása 1142.
- ❷ Euklidesz többi könyve jelenleg ismeretlen, a Kúpszeletek Apolloniusz könyvének elején részben olvasható.

Az Elemek szerkezete.

- 13 „könyvből” áll.
- Kevés kivétellel mindegyik definíciókkal kezdődik.
- Ezeket változó számú tétel és azok szigorú bizonyítása követi.
- Az első könyv más: a definíciók után 5 posztulátum (mai terminológiával axióma) majd 9 axióma (ma axióma séma) következik a tételek előtt.
- **Megjegyzés.** Az axiómák száma kiadásról-kiadásra változhat, olykor a posztulátumokhoz csatolják.

A II. Könyv (a „geometriai algebra”).

Tételek eredeti szöveggel.

- **II.1.** Ha van két szakasz, és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölosztatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével.
- **Bizonyítás.**

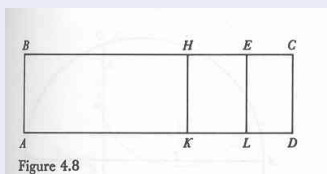


Figure 4.8

- Formalizálva: $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$

A II. Könyv (a „geometriai algebra”).

Tételek eredeti szöveggel.

- **II.4.** Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra emelt négyzet egyenlő az egyes részekkel szerkesztett négyzeteknek meg a két rész által közrefogott téglalap kétszeresének összegével.
- **Bizonyítás.**

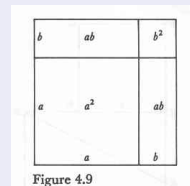


Figure 4.9

Formalizálva: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Az V. Könyv (Eudoxos: Mennyiségek elmélete).

Definíciók (csak mai terminológiával).

- **V.5.D** Legyenek a, b, c, d mennyiségek. Ezekre főáll, hogy

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

- Ha a, c -t tetszőleges egész számmal, mondjuk m -mel, míg b, d -t tetszőleges egész számmal, mondjuk n -nel megszorozzuk, akkor m, n bármely választásánál

•

$$ma < nb \Rightarrow mc < nd,$$

$$ma = nb \Rightarrow mc = nd,$$

$$ma > nb \Rightarrow mc > nd.$$

Az V. Könyv (Eudoxos: Mennyiségek elmélete).

Tételek (csak mai terminológiával).

Legyenek $a, b, \dots$ tetszőleges mennyiségek, $m, n, \dots$ egész számok.

- **V.1.** $ma + mb + mc + \dots = m(a + b + c + \dots)$

- **V.4.** Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor

$$\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}.$$

- **V.12.** Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, akkor

$$\frac{a}{b} = \frac{a + c + e}{b + d + f}.$$

- **V.17-18.** Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor

$$\frac{a \mp b}{b} = \frac{c \mp d}{d}.$$

A VII. Könyv (az első aritmetikai).

Definíciók.

- **VII.1.D** Az *egység* az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk.
- **VII.2.D** A *szám* az egységekből összetevődő sokaság.
- **VII.3.D** Egy kisebb szám egy nagyobbak hányada (*része*), ha *osztja* a nagyobbat.
- **VII.12.D** *Prímszám*, amelyik csak az egységgel osztható.
- **VII.13.D** Számok egymáshoz *relatív príme*k, ha csak az egység közös osztójuk.
- **VII.14.D** *Összetett* az a szám, amelyiket valamely szám oszt.
- **VII.17.D** A két szám összeszorzásakor keletkező számot *síkszámnak* nevezzük, az összeszorzott számokat pedig az oldalaknak.
- **VII.23.D** Egy szám *tökéletes*, ha egyenlő osztói (részei) összegével.

A VII. Könyv (az első aritmetikai).

Tételek.

- **VII.1.** Ha van két nem egyenlő számunk, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sohasem osztja a megelőző számot, míg csak nem az egység a maradék, akkor az eredeti számok relatív prímek.
- **VII.2.** Keressük meg két adott nem relatív prím szám legnagyobb közös osztóját.
- **VII.16.** A két szám összeszorzásakor keletkező számok egyenlők egymással [függetlenül a sorrendtől].
- **VII.18.** Ha egy számot megszorunk két számmal, akkor a keletkezett számok aránya ugyanaz, mint a szorzóké.
- **VII.22.** Az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek relatív prímek.
- **VII.31.** Bármely szám prím, vagy osztja egy prímszám.

A VIII. Könyv (a második aritmetikai: sorozatok).

Tételek.

- **VIII.1.** Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat szélső tagjai relatív prímek, akkor a sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, amelyeknek ugyanaz az aránya, mint nekik.
- **VIII.6.** Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat első tagja nem osztja a másodikat, akkor egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat.
- **VIII.14.** Ha egy négyzetszám oszt egy másikat, akkor az oldala is osztja a másíknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala osztja a másíknak az oldalát, akkor az egyik négyzetszám is osztja a másik négyzetszámot.
- **VIII.22.** Ha egy háromtagú mértani sorozat első tagja négyzetszám, akkor a harmadik is négyzetszám.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

Tételek.

- **IX.2.** Ha két szám összeszorzásakor négyzetszám keletkezik, akkor a számok hasonló síkszámok.
- **IX.11.** Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, akkor egy kisebb tag egy nagyobbban valamely, a sorozatban előforduló szám szerint van meg.
- **IX.14.** Prímszámok legkisebb közös többszörösét egyetlen más prímszám sem osztja, csak amelyek eredetileg is osztják.

A könyv további tételeiről már szoltunk.

A X. Könyv (az irracionálisok ókori elmélete).

- **X.1.D** Mennyiségeket összemérhetőeknek mondunk, ha ugyanazon mértékkel mérhetők, összemérhetetleneknek pedig, ha nem található hozzájuk közös mérték.
- **X.4.D** És nevezzük az adott szakasz négyzetét racionálisnak, és az azzal összemérhető felületeket racionálisnak, az azzal összemérhetetleneket pedig irracionálisoknak, az őket előállító szakaszokat — ti. ha a felületek négyzetek, magukat az oldalakat, ha pedig valamely más sokszögek, a velük egyenlő négyzeteket fölrajzoló szakaszokat — irracionálisoknak.
- **X.1. Tétel.** Ha adva van két nem egyenlő mennyiség és a nagyobbikból levonunk a felénél többet, és a maradékból ismét a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, amely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

A X.1. Tétel bizonyítása 1.

- Legyen a két nem egyenlő mennyiség a, c és $a > c$.
- Az V.4. Definíció — mennyiségek egymáshoz viszonyított arányáról akkor beszélünk, ha az egyik többszöröse meghaladja a másikat — értelmében c -nek van olyan többszöröse, amely meghaladja a -t. Legyen ez $dc > a$.
- **Megjegyzés.** Euklidesz eredeti bizonyításában $d = 3$, amit úgy használ, hogy az nem szorítja meg az általánosságot.
- Adjuk meg a következő $e_1, \dots, e_{d-1}$ mennyiségeket:

$$e_1 > \frac{a}{2}, e_2 > \frac{a - e_1}{2}, e_3 > \frac{a - (e_1 + e_2)}{2}, \dots, \\ e_{d-1} > \frac{a - (e_1 + \dots + e_{d-2})}{2}$$

A X.1. Tétel bizonyítása 2.

- Az a mennyiségből ezután levonjuk e_1 -et, majd az $a - e_1$ mennyiségből az e_2 -t, az $a - (e_1 + e_2)$ -ből az e_3 -at és így tovább, összesen $d - 1$ számú lépést teszünk.
- Látható: az $e_1, \dots, e_{d-1}$ mennyiségeket úgy határozzuk meg, hogy a levonások mindig elvégezhetők legyenek, azaz pozitív mennyiség maradjon minden egyes lépés után.
- Tekintsük most a dc mennyiségeket, és abból is vonjunk le $d - 1$ számú lépésben mindig c -t. Ez esetben mindig az adott (kapott) mennyiség felénél kevesebbet vonunk le.
- Hasonlítsuk most össze a két eljárásunkat.

A X.1. Tétel bizonyítása 3.

- Mivel $dc > a$,

$$\begin{aligned} dc - c &= (d - 1)c > a - e_1 \\ (d - 1)c - c &= (d - 2)c > a - (e_1 + e_2) \\ &\vdots \\ (d - (d - 2))c - c &= c > a - (e_1 + \dots + e_{d-1}). \end{aligned}$$

- Az utolsó egyenlőtlenség éppen a bizonyítandó, hiszen

$$\begin{aligned} (d - (d - 2))c - c &= c > a - (e_1 + \dots + e_{d-1}) = \\ &= (\dots((a - e_1) - e_2) - \dots - e_{d-2}) - e_{d-1}. \end{aligned}$$

A X.1. Tétel bizonyítása 4.

Megjegyzések.

- ❶ Euklidesznél a főnti bizonyításban $d = 3$, de gondolatmenete megegyezik az általunk leírt általános esetről alkalmazottal.
- ❷ Euklidesz megjegyzi: „hasznoló a bizonyítás, ha a fele részeket vonjuk le”.
- ❸ **Vegyük észre:** Euklidesz azt használta — hivatkozva az V. könyv 4. definíciójára —, hogy
... *ha két nem egyenlő mennyiség közül a kisebbiket véges számú lépésben önmagához adjuk, akkor a nagyobbiknál nagyobb mennyiséget kapunk.*
- ❹ **DE** az idézett definíció erre nem jogosít, az csak arányuk létezéséről szól.

A X.1. Tétel bizonyítása 5.

Archimedesz megjegyzése.

Archimédész rámutatott, hogy ezt posztulálni kellett volna, amit Eudoxos meg is tett. Archimédész ugyancsak posztulátumként használta, azóta nevezik **Archimédész - Eudoxos axiómának**.

A X.1. Tétel bizonyítása 6.

Kommentárok.

- ❶ A kutatások szerint a X. könyv legnagyobb része Eudoxostól és Theaitetosztól ered, így lehet, hogy Euklidesz „egyszerűbbre való törekvésével” találkozunk itt.
- ❷ A. DE MORGAN rövid summázata: „Euklidesz e könyvben összegzi az összes olyan szakaszra vonatkozó ismeretet, amelyek (modern terminológiával) megadhatók, mint

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},$$

ahol a, b összemérhető szakaszok.”

- ❸ Világos, hogy nem az összes irracionális reprezentálható ílymódon, Euklidesz e részben a geometriai algebrájával (a II. könyv tartalma) kezelhető esetekre szorítkozott.

A X. Könyv befejezése.

Egy régen várt tétel.

A 115. Tétel (az utolsó) után következik a **X.27.** Függelék. *Mutassuk meg, hogy a négyzetekben az átló lineárisan összemérhetetlen az oldallal.*