

## A Középbirodalom korának aritmetikája Egyiptomban.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2014. február 18.

## Néhány történelmi mérföldkő.

### A két birodalom.

- Kapcsolat Mezopotámiával a 4. évezred vége felé: az első írás, a **hieroglifikus**, kialakulása.
- Az első egyesítés i.e. 3100 körül, NARMER (Menész) fáraó, a vezető szerep Felső-Egyiptomé. A „Narmer-kőtábla” (jellegzetes ábrázolás).
- ÓBIRODALOM kora: piramisépítések, és más építészeti, szobrászati emlékek (Abu Simbel, írrok), irodalmi alkotások (Imhotep intelmei)
- I.e. 2200-tól az első átmeneti kor: a birodalom kettéválk.
- kb. I.e. 2040-ben II. Mentuhotep ismét egyesíti a két királyságot. → a KÖZÉPBIRODALOM kora.
- Fajjumi víztározó, Színuhe története, matematikai papirusztekercsek (Rhind, Golenisev, stb.).

## Néhány történelmi mérföldkő.

### A két birodalom.

- I.e. 1750 körül, külső (hikszosz) támadás, megbukik az egységes birodalom → a második átmeneti kor.
- 1600-tól ismét egységes birodalom: az ÚJBIRODALOM.
- I.e. 280: Manetho listája a 31 dinasztáról.

### Az egyiptomi írások.

- A **hieroglifikus** írás
  - ▶ képirás, hasonló a másutt, pl. Mezopotámiában használthoz,
  - ▶ eredete nem világos,
  - ▶ első változata vélhetően még az Óbirodalom előtti időből származik.
- 2500 körül egyszerűsödött, „kurzívabbá” vált Ez a **hieratikus** írás vált általánosan használttá.
- Az Újbirodalom vége felé, kb. a I.e. VII. században további egyszerűsítés, kurziválás: a **démotikus** írás.

## Néhány történelmi mérföldkő.

### Az egyiptomi írások megfejtése.

- 1799, a **Rozetta kő** megtalálása.
- A I.e. II. század elejéről származik, egyiptomi (hieroglifikus és démotikus) írással, valamint
- görög nyelven szerepel ugyanaz a szöveg:
- Memphis főpapja istenként, istenek fiaként köszönti V. Ptolemaioszt.
- 1820-tól Champolion és T. Young
  - ▶ előbb a görög ismeretében megfejtette a két egyiptomi írást,
  - ▶ majd interpolációval megkapták a hieratikus írás megfejtését is.

## Az egyiptomi aritmetika.

## Hieroglifikus számok

|           |                  |      |   |
|-----------|------------------|------|---|
| 1         | I                | IIII | 6 |
| 2         | II               | IIII | 7 |
| 3         | III              | IIII | 8 |
| 4         | IIII             | IIII | 9 |
| 5         | IIII             |      |   |
| 10        | ∩                |      |   |
| 100       | ∩∩               |      |   |
| 1 000     | Lotus            |      |   |
| 10 000    | ∩                |      |   |
| 100 000   | Tadpole or bird  |      |   |
| 1 000 000 | Not in later use |      |   |

## Az egyiptomi aritmetika.

## Hieratikus és démotikus számok

| x | 10 <sup>0</sup> | 10 <sup>1</sup> | 10 <sup>2</sup> | 10 <sup>3</sup> |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | I               | ∩               | ∩               | ∩               |
| 2 | II              | ∩∩              | ∩∩              | ∩∩              |
| 3 | III             | ∩∩∩             | ∩∩∩             | ∩∩∩             |
| 4 | IIII            | ∩∩∩∩            | ∩∩∩∩            | ∩∩∩∩            |
| 5 | IIII            | ∩               | ∩               | ∩               |
| 6 | IIII            | ∩∩              | ∩∩              | ∩∩              |
| 7 | IIII            | ∩∩∩             | ∩∩∩             | ∩∩∩             |
| 8 | IIII            | ∩∩∩∩            | ∩∩∩∩            | ∩∩∩∩            |
| 9 | IIII            | ∩∩∩∩            | ∩∩∩∩            | ∩∩∩∩            |

## Az egyiptomi aritmetika.

## Számírásuk.

- 10-es alapú és nem helyiértékes,
- a 10 hatványainak különböző jele volt.
- Törteket is használtak, DE ...

## Aritmetika: összeadás.

- Additív jellegű,
- ebben a rendszerben egyszerű összeadni.
- Kezdetben minden műveletet a kettőzésre és az összeadásra vezettek vissza,
- később tízszerestek és feleztek is.

## Az egyiptomi aritmetika.

## Szorzás kettőzésekkel (hieroglifikusan): 12 · 12.

|      |      |      |    |            |
|------|------|------|----|------------|
| IIII | IIII | I    | 1  | 12         |
| IIII | IIII | II   | 2  | 24         |
| IIII | IIII | IIII | /4 | 48         |
| IIII | IIII | IIII | /8 | 96 sum 144 |

## Az egyiptomi aritmetika.

### Szorás kettőzésekkel (mai jelölésekkel).

- Ismételt összeadásként végezték: kettőzések után.
- A  $12 \cdot 13$  kiszámítása (mai számírással):

|   |     |
|---|-----|
| 1 | 13  |
| 2 | 26  |
| 4 | 52  |
| 8 | 104 |

- Az első oszlopban a 2-mal jelzett sorokban  $4 + 8 = 12$  áll, így a második oszlop alapján

$$12 \cdot 13 = 52 + 104 = \mathbf{156}.$$

## Az egyiptomi aritmetika.

### Szorás tízszerézéssel és felezéssel (hieroglifikusan): $16 \cdot 16$ .

|  |  |  |     |
|--|--|--|-----|
|  |  |  | /1  |
|  |  |  | /10 |
|  |  |  | /5  |

## Az egyiptomi aritmetika.

### Szorás tízszerézéssel és felezéssel (mai jelölésekkel)

A  $17 \cdot 13$  kiszámítása tízszerézéssel és felezéssel: a

- 

|    |     |
|----|-----|
| 1  | 13  |
| 2  | 26  |
| 10 | 130 |
| 5  | 65  |

- számolás alapján a  $17 \cdot 13$  szorzat, lévén  $17 = 2 + 10 + 5$ , nem más, mint  $26 + 130 + 65$ , azaz **221**.

## Az egyiptomi aritmetika.

### Szorás mindkét úton (hieroglifikusan): $15 \cdot 110$

|  |  |    |              |
|--|--|----|--------------|
|  |  | /1 | 110          |
|  |  | /2 | 220          |
|  |  | /4 | 440          |
|  |  | /8 | 880 sum 1650 |

Multiplication by ten:

|  |  |     |              |
|--|--|-----|--------------|
|  |  | 1   | 110          |
|  |  | /10 | 1110         |
|  |  | /5  | 550 sum 1650 |

## Az egyiptomi aritmetika.

## Osztas.

- Az előbbi szorzás alapján az osztás is elvégezhető akkor, ha a hányados egész, mivel
- additív aritmetikájukban az  $a : b$  ugyanis azt jelentette, hogy
- **számolj  $b$ -vel addig, amíg  $a$ -t kapsz.**

## Az egyiptomi aritmetika.

## Osztas.

- Bonyolultabb azonban a helyzet akkor, ha a hányados nem egész.
- Meg kell vizsgálni: hogyan számoltak törtekkel,
- egyáltalán milyen törtekkel tudtak számolni.

## Törtek.

A korabeli egyiptomiak számára általában nem léteztek az  $\frac{m}{n}$  alakú törtek, csak az  $\frac{1}{n}$  alakúak.

## Törtek: jelölések.

Saját jele csak az  $\frac{1}{n}$  alakú törteknek, valamint a  $\frac{2}{3}$ -nak volt. Ezeket  $\bar{n}$  és  $\bar{\bar{3}}$  fogja jelölni.

## Az egyiptomi aritmetika.

## Számolás törtekkel.

- Három formula a Londoni börtelercsből.

$$\begin{aligned}\bar{6} + \bar{6} &= \bar{3} \\ \bar{6} + \bar{6} + \bar{6} &= \bar{2} \\ \bar{3} + \bar{3} &= \bar{\bar{3}}\end{aligned}$$

## Számolás törtekkel.

- Ezekből könnyen kaphatók a Rhind-papiruszon gyakran alkalmazott

$$\begin{aligned}\bar{3} + \bar{6} &= \bar{2} \\ \bar{2} + \bar{3} + \bar{6} &= 1 \\ \bar{\bar{3}} &= \bar{2} + \bar{6}\end{aligned}$$

## Az egyiptomi aritmetika.

## Számolás törtekkel.

$$\begin{aligned}\bar{2} + \bar{3} &= \bar{\bar{3}} + \bar{6} \\ \bar{\bar{3}} + \bar{2} &= 1 + \bar{6}\end{aligned}$$

- egyenlőségek.

## Az egyiptomi aritmetika.

### Az elemi törtek kétszerezése.

- Az egészek kétszerezése (tízszerzése, felezése) egyszerű, de a törteké?
- Világos, hogy a többszöri kétszerezés igen hosszú számalakokhoz vezet.
- Fontos fölfedezésük: az  $\bar{n}$  kétszerezése ugyanazon számhoz vezet, mintha a 2-t  $n$ -felé osztanánk.
- A 2:  $n$  számolások eredményét az  $5 \leq n \leq 101$  értékekre tartalmazza a Rhind papirusz elején található összeállítás.
- Természetesen csak a páros  $n$ -ekre.
- Ezen összeállításra Recto-ként is hivatkoznak olykor.

|                                                        |                                                           |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $2 : 5 = \bar{3} + \bar{15}$                           | $2 : 53 = \bar{30} + \bar{318} + \bar{795}$               |
| $2 : 7 = \bar{4} + \bar{28}$                           | $2 : 55 = \bar{30} + \bar{330}$                           |
| $2 : 11 = \bar{6} + \bar{66}$                          | $2 : 59 = \bar{36} + \bar{236} + \bar{531}$               |
| $2 : 13 = \bar{8} + \bar{52} + \bar{104}$              | $2 : 61 = \bar{40} + \bar{244} + \bar{488} + \bar{610}$   |
| $2 : 17 = \bar{12} + \bar{51} + \bar{68}$              | $2 : 65 = \bar{39} + \bar{195}$                           |
| $2 : 19 = \bar{12} + \bar{76} + \bar{114}$             | $2 : 67 = \bar{40} + \bar{335} + \bar{536}$               |
| $2 : 23 = \bar{12} + \bar{276}$                        | $2 : 71 = \bar{40} + \bar{586} + \bar{710}$               |
| $2 : 25 = \bar{15} + \bar{75}$                         | $2 : 73 = \bar{60} + \bar{219} + \bar{292} + \bar{365}$   |
| $2 : 29 = \bar{24} + \bar{58} + \bar{174} + \bar{232}$ | $2 : 77 = \bar{44} + \bar{308}$                           |
| $2 : 31 = \bar{20} + \bar{124} + \bar{155}$            | $2 : 79 = \bar{60} + \bar{237} + \bar{316} + \bar{790}$   |
| $2 : 35 = \bar{30} + \bar{42}$                         | $2 : 83 = \bar{60} + \bar{332} + \bar{415} + \bar{498}$   |
| $2 : 37 = \bar{24} + \bar{111} + \bar{296}$            | $2 : 85 = \bar{51} + \bar{255}$                           |
| $2 : 41 = \bar{24} + \bar{246} + \bar{328}$            | $2 : 89 = \bar{60} + \bar{356} + \bar{534} + \bar{890}$   |
| $2 : 43 = \bar{42} + \bar{86} + \bar{129} + \bar{301}$ | $2 : 92 = \bar{70} + \bar{130}$                           |
| $2 : 47 = \bar{30} + \bar{141} + \bar{470}$            | $2 : 95 = \bar{60} + \bar{380} + \bar{570}$               |
| $2 : 49 = \bar{28} + \bar{196}$                        | $2 : 97 = \bar{56} + \bar{679} + \bar{776}$               |
| $2 : 51 = \bar{34} + \bar{102}$                        | $2 : 101 = \bar{101} + \bar{202} + \bar{303} + \bar{606}$ |

## A Rhind 2: $n$ táblázata.

### Hogyan számolhatták ki a szereplő hányadosokat?

- Nem egységes elveket alkalmaztak, de
- minden esetben úgy jártak el, hogy a
  - 2-t előállították, egy egynél nagyobb szám és
  - egy, kettő vagy három (elemi) tört összegeként.
  - Az első tag — mai terminológiával — olyan tört volt, amelynek számlálója az aktuális  $n$  osztó.
  - Az első tag megtalálásában nem voltak következtetések.

- Például, ha  $n = 3k$ , akkor mindig a  $2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  fölbontást használták, ami megfelelt a

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$$

azonosság alkalmazásának, DE

- ez XX. századi és nem korabeli gondolat!

## A Rhind 2: $n$ táblázata.

### 1.példa: $2 : 17 = \bar{12} + \bar{51} + \bar{68}$ .

- A papiruszon ez olvasható (mai jelölésekkel):

$$1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \text{ az } \frac{1}{12} \quad \frac{1}{3} \text{ az } \frac{1}{51} \quad \frac{1}{4} \text{ az } \frac{1}{68}.$$

- Vegyük észre:  $1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$ .

- A számolás

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ 11\frac{1}{3} \\ 5\frac{2}{3} \\ 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{array}$$

## A Rhind 2: $n$ táblázata.

1.példa:  $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$ .

- A maradék (a hiány)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ,
- hiszen  $(1\frac{1}{4} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 2$ ,
- azaz ennyi kell még a 2-höz.
- Ezt még elő kell állítani 17-edekben.

## A Rhind 2: $n$ táblázata.

1.példa:  $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$ .

- Ennek kiszámítása

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \{3 \\ \{4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{17} \\ \frac{1}{34} \\ \frac{1}{51} \\ \frac{1}{68} \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{array}$$

- **Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy közben fölhasználta az

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

egyenlőséget.

## A Rhind 2: $n$ táblázata.

2.példa:  $2: 31 = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$

- A kezdő sor:

$$1 + \overline{2} + \overline{20} \text{ az } \overline{20}, \quad \overline{4} \text{ az } \overline{124} \quad \overline{5} \text{ az } \overline{155}.$$

- A számolás az előbbihez hasonló

$$\begin{array}{r} 1 \\ \{4 \\ \{5 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{124} \\ \frac{1}{155} \end{array} \quad \begin{array}{r} 31 \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{array}$$

- A papiruszon az írrok az első sort is megjelölte, ami másolási hiba.
- A 2 fölbontása most

$$2 = \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

## A Rhind 2: $n$ táblázata.

### Elemzés

- Az előző két esetben a 2 fölbontása első tagja

$$\begin{array}{l} 1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \\ 1\frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{31}{20}, \end{array}$$

- azaz olyan tört, amelynek számlálója épp a kettőzendő tört nevezője.
- Utána előbb ezt kiegészítette 2-re,
- majd a kiegészítést előállította megfelelő törtökként.
- Hogyan jött rá az írrok???

## A Rhind 2: $n$ táblázata.

3.példa:  $2:35 = \overline{30} + \overline{42}$

- A számolás eltér az eddigiektől.
- Az első sor

$$\begin{array}{ccc} 1 + \overline{6} & \text{az} & \overline{30} \\ 6 & & 7 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \overline{3} + \overline{6} & \text{az} & \overline{42} \\ & & 5 \end{array}$$

- A számolás

$$\begin{array}{r} 1 \quad 35 \\ \overline{30} \quad 1 + \overline{6} \\ \overline{42} \quad \overline{3} + \overline{6} \end{array}$$

- Mi a vörös számok — kisegítő számoknak fogjuk nevezni — szerepe?
- A 7 és az 5 jelezheti az  $1\frac{1}{6}$ -ban és  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ -ban a hatodik számát, amit a kezdő hatos is alátámaszt.
- A fölbontás:  $2 = (1 + \frac{1}{6}) + (\frac{2}{3} + \frac{1}{6})$ .

## Az egyiptomi aritmetika.

A Rhind 23. feladata.

Mi egészíti ki a  $\overline{3} + \overline{15}$ -öt 1-re?

Az eredmény.

10 1 összesen : 11 a maradék 4.

A megoldás.

- Számolj 15-tel, míg 4-et kapsz.

- 

$$\begin{array}{r} 1 \quad 15 \\ \overline{10} \quad 1 + \overline{2} \\ \overline{5} \quad 3 \\ \overline{15} \quad 1 \end{array}$$

- A jelzett sorok jobb oldalán  $3 + 1 = 4$  található, így  $\overline{5} + \overline{15}$  az, amit hozzá kell adni.

## Az egyiptomi aritmetika.

Elemzés.

- A feladat lényegében egy

$$1 - (\overline{3} + \overline{15})$$

kivonás.

- A vörös kisegítő számok mutatják, hogy 15-ökben kellszámolni: az  $\overline{3}$  és  $\overline{10}$  számlálói 15-ödökben.
- Maga a szám  $\frac{11}{15}$ , így még  $\frac{4}{15}$  hiányzik, ezt állítja elő a számolása

Egy nehezebb feladat.

A Rhind 23. problémája: *Egészítsük ki az*

$$\overline{4} + \overline{8} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{45}$$

*számat  $\overline{3}$ -ra.*

## Az egyiptomi aritmetika.

A Rhind 23. problémája.

Egészítsük ki

$$\overline{4} + \overline{8} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{45}$$

$\overline{3}$ -ra.

A papirusz szövege.

$$\begin{array}{cccccc} \overline{4} & + & \overline{8} & + & \overline{10} & + & \overline{30} & + & \overline{45} \\ 11 + \overline{4} & & 5 + \overline{2} + \overline{8} & & 4 + \overline{2} & & 1 + \overline{2} & & 1 \end{array}$$

Az eredmény.

Tehát  $\overline{9} + \overline{40}$ -et kell hozzáadni, hogy  $\overline{3}$ -at kapjunk.

## A Rhind 23. problémája.

## Folytatás.

$$\begin{array}{cccccccc} \bar{4}+ & \bar{8}+ & \bar{9}+ & \bar{10}+ & \bar{30}+ & \bar{40}+ & \bar{45}+ & \bar{3} \\ 11 + \bar{4} & 5 + \bar{2} + \bar{8} & 5 & 4 + \bar{2} & 1 + \bar{8} & 1 + \bar{2} & 1 & 15 \end{array}$$

Az összeg 1.

## Elemzés.

- A további részletek hiányoznak a papiruszról, de megadható egy lehetséges rekonstrukció.
- Hangsúlyozzuk**, hogy ez csak egy **lehetséges** eljárás, semmi biztosat nem tudunk az eredeti gondolatmenetről.

## A Rhind 23. problémája.

## Rekonstrukció.

- A vörös kisegítő számok alapján az írrok **45-ökben számolt**, ez a közös nevező.
- A vörösen szereplő számlálók összege  $23\frac{7}{8}$  negyvenötöd, ezt kell kiegészíteni  $\bar{3}$ -ra, azaz  $\frac{30}{45}$ -re.
- A „hiányzó” mennyiség  $6\frac{1}{8}$  negyvenötöd, azaz  $5 + 1\frac{1}{8}$  negyvenötöd.
- Ezt kell meghatározni,

## Egy (rövidített) számolás.

$$\begin{array}{cc} 1 & 45 \\ \bar{9} & 5 \\ \bar{4} & 11 + \bar{4} \\ \bar{40} & 1 + \bar{8} \end{array}$$

## Az egyiptomi aritmetika.

## A Rhind 33. feladata.

Egy mennyiséghez hozzáadva kétharmadát, felét és hetedét 37-et kapunk.

## A számolás 1.

$$\begin{array}{lcl} \bullet & & \\ 1 & 1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7} & \\ 2 & 4 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28} & (2 \cdot \bar{7} = \bar{4} + \bar{28}) \\ 4 & 9 + \bar{6} + \bar{14} & (\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}) \\ 8 & 18 + \bar{3} + \bar{7} & \\ \text{16} & 36 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28} & \\ & 28 & 10 + \bar{2} & 1 + \bar{2} \end{array}$$

- A  $36 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$  már „nagyon közel” van a 37-hez.
- Ami hiányzik, az  $\bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$  kiegészítője 1-re.

## Az egyiptomi aritmetika.

## A számolás 2.

- A kiegészítés a vörös kisegítő számokon alapul.
- A közös nevező azonban nem 28, hanem 42. Miért?
- Láttuk: a számlálóknak nem kell egészeknek lenniük, DE összegük már mindig egész.
- Ez 28-cal még nem, de 42-vel már teljesül.

## Az egyiptomi aritmetika.

## A vörös számok eredete.

A szöveg alapján:

•

$$\begin{array}{rcl}
 1 & & 42 \\
 \overline{3} & & 28 \\
 \overline{2} & & 21 \\
 \overline{4} & 10 + & \overline{2} \\
 \overline{28} & 1 + & \overline{2}
 \end{array}$$

- A folytatás: az összeg 40, a maradék 2.
- 40, a kisegítő számok összege, de az egység 42 „kisegítő egységet” tartalmaz, tehát 2 még hiányzik.
- E 2-t úgy kapjuk, hogy az osztót,  $1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7}$ -et, kisegítő egységekben fejezzük ki.

## Az egyiptomi aritmetika.

## A számolás 3.

•

$$\begin{array}{rcl}
 \overline{1} & & 42 \\
 \overline{3} & & 28 \\
 \overline{2} & & 7 \\
 \overline{7} & & 6 \\
 \text{az összeg} & & 97
 \end{array}$$

- Azaz az osztó 97 kisegítő egységet tartalmaz, 97-ed része egyenlő  $\overline{42}$ -del.
- Már csak egy kétszerezés kell, ami a papiruszon a következő:

•

$$\begin{array}{rcl}
 \overline{97} & & \overline{42} & 1 \\
 \overline{56} + \overline{679} + \overline{776} & & \overline{21} & 2
 \end{array}$$

- A kétszerezés a Rhind bevezető táblázatából való.

## Az egyiptomi aritmetika.

## A végeredmény.

$$37 : (1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7}) = 16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}.$$