

A SZÁMFOGALOM ALAKULÁSA A KEZDETEKTŐL HILBERTIG

4000 ÉVES IDŐUTAZÁS

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2021. május 10-17.

Folyammenti kultúrák.

Egyiptom.

- 10-es alapú nem helyiértékes számírásuk volt.
- A szám náluk — mai terminológiával — pozitív racionális szám volt,
- bár nem használtak számlálóval és nevezővel rendelkező törteket,
- szinte minden törtet speciális, 1 számlálójú törtek, „elemi törtek” összegeként állítottak elő.

Folyammenti kultúrák.

Mezopotámia.

- Számon ők is pozitív racionális számot értettek, DE
- számírásuk 60-as alapú helyiértékes volt.
- használtak hatvanados törteket is, de egy jelsorozat tört voltára nem volt speciális jelük.
- Ha gazdasági számításnál „negatív szám” adódott volna, akkor azt **nem tekintették rendes számnak**, hanem az egyszerűen **hiányt, adósságot** jelölt.
- A (négyzet)gyökvonáskor mindig csak pár lépést tettek algoritmusukban, hitték, hogy az néhány (további) lépés után (biztosan) véget ér.
- Következésképp, az **irracionális fogalma föl sem merülhetett**.

A görögök.

A szám Euklidesz első 9 könyve szerint.

- Euklidesz definíciója szerint: egységekből összetevődő sokaság, tehát **1-nél nagyobb egész szám**.
- Definiálták és használták a **számok arányát**, ami a **pozitív racionális számnak felelt meg**.
- Az arányokkal való számolásról szól Euklidesz V. könyve, az Eudoxos által bevezetett **mennyiség** fogalmát használva.
- De itt csak ún. **összemérhető mennyiségekkel** foglalkoztak,
- bár ezt itt nem posztulálták, a mennyiségeket is számnak tekinthetjük.
- Azaz, a szám **1-től különböző pozitív racionális szám**.

A görögök.

A X. könyv.

Ezen nagyrészt Eudoxostól és Theaitetosztól származó könyv bizonyos összemérhetetlen mennyiségekkel és azok arányával foglalkozik, azaz a szám fogalma kiegészült **speciális, pozitív irracionálisokkal** is.

Hindu aritmetika (200–1200)

- Folytatták a görög tradíciókat.
- Az V. század végétől a hindu matematikusok munkáját elsősorban asztronómiai és asztrológiai problémák motiválták. Szinte az összes matematikai mű csillagászati (nem különült náluk el a csillagjósástól még) könyvek részeként jelent meg.
- E korból már több matematikus (csillagász/csillagjós) nevét is ismerjük:
 - ARYABHATA** (476–550(?)), **BRAHMAGUPTA** (598–660),
 - MAHAVIRA** (800(?)-870(?)) és **BHASKARA** (1114–1185(?)).
- A periódus első felében a számokat hol szavakkal, hol más, szám jellegű szimbólumokkal jelölték. A 600-as évek körül kialakult a tízes alapú helyiértékes számírásuk.

Hindu aritmetika (200–1200)

- A korszak második felétől az eddig csak a számjegy hiányát jelző szimbólumot, a „köröcskét”, számként is kezdték használni. A számjegy hiányának jele arab eredetű.
- Mahavira (IX. sz.) a következőket írta: *Egy számot 0-val szorozva 0-t kapunk, s ha egy számból 0-t vonunk ki, akkor a szám nem változik.*
- Azt is írta, hogy: *Ha egy számot 0-val osztunk, akkor a szám változatlan marad.*
- Itt nyilván **arra gondolhatott**, hogy ha egy számot „sehány” részre osztunk, akkor nem történik semmi.

Hindu aritmetika (200–1200)

- Megjelennek a törtek is, főleg csillagászati számításokban. Írásukra a babyloni hatvanas rendszert alkalmazták. A műveletek elvégzési szabályait szinte ugyanúgy adták meg, mint manapság.
- Mahavira a törttel való osztás szabályaként azt mondta, hogy
 - fordítsd meg és szorozz vele.**
- Bevezették a negatív szám fogalmát is hiány jelölésére.
- Először Brahmagupta fogalmazta meg 628-ban a négy alapművelet szabályát negatív számokra.
- Konkrét problémák megoldásánál azonban, ha az egyenlet valamely gyöke (a számolás végeredménye) negatív számnak adódott, akkor azt, mint lehetetlen megoldást, elvetették.

Hindu aritmetika: Bhaskara (XII. sz.) véleménye.

- ...ha egy probléma (pl. egyenlet) megoldásaként 50-et és –5-öt kapott: **Ez esetben a második értéket nem lehet figyelembe venni, mert az nem lehet megoldása a problémának, hiszen az emberek nem fogadják el a negatív megoldásokat.**
- Egy pozitív számnak két négyzetgyöke van, az egyik pozitív, míg a másik negatív. Fölvetette a negatív szám négyzetgyökének kérdését is, de azt mondta, hogy az nem létezik, lévén bármely szám négyzete pozitív.
- De mindezt indoklások, pontos definíciók és tételek megfogalmazása nélkül tették, általában verses formában.
- Mindezek ellenére, ha igen lassan is, de a negatív számokat egyre általánosabban fogadták el.

Hindu aritmetika (200–1200)

- A hinduk másik nagy lépése az aritmetikában az irracionálisok problémájának egyre korrektebb kezelése. Tőlük vették át az arabok.
- Korrekt módon kezdtek velük is számolni. Nem bizonyították ugyan általánosan eljárásaikat, de bőségesen illusztrálták módszereiket. Például:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{(3+12) + 2\sqrt{3 \cdot 12}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

- Az általános elv, amit használtak, mai jelölésekkel a

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} \quad \text{ahol } a, b > 0.$$

Európa, a XVI. sz. eleje.

- 1500 körül az európai matematikusok, elsősorban az iszlám tradíciók alapján, már egyre kiterjedtebben számoltak gyökmennyiségekkel, speciális típusokat definiáltak és kalkulusokat adtak meg, a fő motiváció a gyakorlati számítások és a tudományos igények.
- Említésre érdemes új eredményeket tartalmaz például az olasz Luca Pacioli (1445(?)–1517) *Summa ...*, továbbá Tartaglia (Nicolo Fontana, 1500(?)–1557) *General trattato de' numeri e misure* című könyve.
- A század második harmadában az irracionálisokkal való számolási technikákat jelentősen továbbfejlesztette a német Michael Stiefel (1487–1567) és a flamand hadmérnök Simon Stevin (a hollandok „Bolyaija”, 1548–1620). Gyökmennyiségek újabb típusaira adtak meg kalkulusokat.

Stiefel *Arithmetica Integra* (1544)

Mivel az olyan geometriai bizonyításokban, ahol a racionális számok nem megfelelőek, alkalmazhatók az irracionális számok, és velük elvégezhetjük a bizonyításokat; az irányba kényszerülünk haladni, hogy kijelentsük: az irracionálisok igenis számok, mivel a velük kapott eredmények reálisok (valóságosak). Másrészt azonban más meggondolások arra késztetnek bennünket, hogy tagadjuk azt, hogy az irracionálisok egyáltalán számok. Ugyanis, amikor számolunk velük (tizedestört alakban) azt tapasztaljuk, hogy nem lehet őket pontosan meghatározni. Így nem nevezhetjük őket igazi számoknak, mivel természetüknél fogva hiányzik belőlük a precizitás. Ezért, ugyanúgy mint ahogy a végtelen nem szám, egy irracionális szám sem igazi szám, hanem éppúgy valami kódós végtelen.

Stiefel véleménye szerint a valóságos számok egészek vagy törtek, így az irracionálisok nyilván nem számok.

3. Irracionálisok a XVI-XVII. században.

Egy évszázaddal később még Blaise Pascal is úgy vélte, hogy *az olyan mennyiségek, mint például a $\sqrt{3}$ csak geometriai mennyiségként fogható föl. Az irracionálisok pusztán szimbólumok, amelyek nem léteznek az általuk reprezentált folytonos geometriai mennyiségtől függetlenül. A velük való számolásokra tehát nem aritmetikai szabályok vonatkoznak, hanem az Eudoxos-féle arányelméletet (Euklidesz V. könyve) kell alkalmazni.*

Lényegében ugyanezen véleményt olvashatjuk Isaac Newton (1643–1727) *Arithmetica Universalis* című könyvében, amely 1707-ben jelent meg (de kb. 30 évvel korábbi eredményeinek összefoglalása).

Más vélekedések.

Simon Stevin: az irracionálisok olyan számok, amelyek tetszőleges pontossággal megközelíthetők racionális számokkal.

René Descartes (1596–1650) 1628-ban kiadott *A gondolkodás szabályai* című könyvében az irracionálisokat olyan absztrakt számoknak tekintette, amelyek folytonos mennyiségeket reprezentálnak.

Az angol John Wallis 1685-ben megjelent *Algebra* című könyvében már teljes jogú számoknak ismerte el az irracionálisokat, s azon véleményének adott hangot, hogy az Elemek V. könyve lényegében aritmetikai jellegű.

Negatív számok a XVI-XVII. században.

Iszlám tradíciók alapján számoltak ugyan velük, de általában nem tekintették azokat számoknak. Egyenletek megoldásaként többnyire még azok sem fogadták el őket, akik különben hajlamosak voltak számnak tekinteni.

Például Stiefel „abszurd számoknak” nevezte őket.

Cardano megadta ugyan az egyenletek negatív gyökeit is, de csak fiktív megoldásoknak, pusztán szimbólumoknak tekintette azokat, hiszen a semminél kisebb mennyiségeket reprezentáltak, míg a pozitívokat valószínűnek nevezte.

Hasonlóan vélekedett Descartes is, aki az egyenletek negatív gyökeit hamis gyököknek nevezte, mert azok a **semminél kisebb** mennyiséget jelölnek, de az egyenlet transzformációjával pozitívvá, azaz — szóhasználat szerint — valóssá tehetők.

Cardano egy feladata.

Az apa 56, fia 29 éves. Hány év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia?

Ha x jelöli az évek számát, akkor az

$$56 + x = 2(29 + x)$$

egyenletet kell megoldanunk, amiből $x = -2$. A kapott negatív megoldás **lehetetlen**, ami abból adódott, hogy **rosszul** tűztük ki a feladatot. Azt kellett volna kérdeznünk, hogy „hány évvel ezelőtt” volt az apa kétszer annyi idős, mint a fia

Újabb eredmények az irracionálisokkal kapcsolatban: lánc törtek.

- A XVI. század utolsó harmadának egyik nagy eredménye a lánc törtek részbeni újralfedezése és újabb alkalmazásai volt.
- A lánc törtek implicite megjelentek Brahmaguptánál határozatlan egyenletek megoldásában.
- Az újdonság az a fölismerés volt, hogy a végtelen lánc törtek jól alkalmazhatók az irracionálisok elméletében is.
- Raffaello Bombelli 1572-es *Algebra* című könyvében találkozunk ezzel először. Ő a $\sqrt{2}$ -t a következőképpen közelítette.

Lánc törtek és irracionálisok 1.

Legyen $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$, azaz $y = 1 + \sqrt{2}$.

Adjunk az utóbbi egyenlőség mindkét oldalához 1-et, így azt kapjuk, hogy $y = 2 + \frac{1}{y}$.

Ekkor előbb a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}},$$

majd a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}}$$

egyenlőséghez jutunk.

Lánc törtek és irracionálisok 2.

Az eljárást folytatva Bombelli azt kapta, hogy

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}},$$

Azzal természetesen már nem foglalkozott, hogy a végtelen lánc tört konvergál-e valamilyen értelemben, hiszen az illetlen kérdések abban a korban föl sem merültek.

Lánc törtek és irracionálisok 3.

A lánc törtek konvergenciaproblémájával Wallis foglalkozott először az 1695-ös *Opera Mathematica* című könyvében, de csak formális számolásokat végzett megadva a lánc tört véges kezdő szeleteit, ő konvergenseknek nevezte ezek sorozatát.

Megjegyzés.

Egyszerűen igazolható, hogy minden véges lánc tört racionális szám, továbbá minden végtelen, nem periódikus tizedestört (azaz irracionális szám) is előállítható végtelen lánc törtként.

Végtelen egyszerű lánc törtek.

Legyen $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$. Az

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

kifejezést **végtelen egyszerű lánc törtek** nevezzük.

Egyszerű észrevételek.

- 1. α véges kezdő szeletei sorozata mindig konvergens.
- 2. E határérték mindig irracionális szám.
- 3. Ha az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozat valahonnan kezdve periódikus, akkor α gyöke valamely egész együtthatós másodfokú polinomnak.

Cardano feladata.

Bontsuk föl a 10-et két részre úgy, hogy a részek szorzata 40 legyen.

A megoldás.

A feladat az $x(10 - x) = 40$ másodfokú egyenletre vezet, amelyet formálisan megoldva az $5 \pm \sqrt{-15}$ gyököket kapjuk.

Cardano kommentárja.

... ha túltesszük magunkat azon a lelki tortúrán, amit az ilyen szám okoz, formálisan ellenőrizhetjük az eredményt, ami korrekt, de hasztalan.

Bombelli kalkulusa.

A „casus irreducibilis” tárgyalásakor leírta a négy alapl művelet elvégzésének szabályait az $a \pm b\sqrt{-1}$ alakú kifejezésekre, de ezeket nem tekintette számoknak, csak haszontalan pusztá „szofizmusoknak”.

Albert Girard véleménye.

Mire is használhatjuk ezen lehetetlen megoldásokat? Három okunk is van: az általános szabályok bizonyítása, használhatóságuk és mert nincs más megoldás.

„Képzetes számok”.

Konkluzió.

Lényegében tehát, mint az egyenletek formális megoldását, a komplex megoldások elfogadását ajánlotta, de azt nem fogadták el kortársai.

Descartes.

1. Elutasította, **imaginárius** (képzetbeli) megoldásoknak nevezte azokat.
2. Érvelése.
 - 2.1 Az egyenletek negatív gyökei az egyenlet transzformációja révén valósokká (azaz pozitívokká) tehetők,
 - 2.2 a komplex gyökökkel ezt nem lehet megtenni.

„Képzetes számok”.

Isac Newton.

Nem tulajdonított jelentőséget az egyenletek komplex gyökeinek nyilván azért is, mert nem volt (akkor még) fizikai jelentésük.

G. Leibniz 1702.

Az Isteni Szellem egy nagyszerű megnyilvánulási alkalmat talált az analízis ezen csodájában, az ideális világ e szokatlan tüneményében, amely egyidejűleg létező és nemlétező, amelyet mi a negatív egység imaginárius gyökének nevezünk.

Vita a komplex számok mibenlétéről: Johann és Jacob Bernoulli, Leibniz és Euler.

A matematikai tartalom.

- Jacob Bernoulli az $\int \frac{a^2 dx}{a^2 - x^2}$ integrál kiszámítására az $x = a \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$ helyettesítést alkalmazta,
- ez $A \int \frac{dt}{t} = A \log t$ alakú, tehát logaritmusfüggvényre vezető integrált eredményezett.
- Leibniz Johann Bernoullival közösen az $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ alakú integrálokat is hasonlóan számolta.
- DE nem foglalkozak azzal, hogy a $b^2 - 4ac < 0$ esetben a gyökök nem valósak,
- így eljárásuk alapján olyan $\int \frac{dx}{cx + d}$ alakú integrálokat is eredményezett, amelyekben legalább a d nem valós szám.

Johann és Jacob Bernoulli, Leibniz és Euler vitái.

- Súlyos problémák:
 - Létezik-e logaritmusa egy negatív számnak?
 - Sőt: egy komplex számnak?
 - Ha igen, akkor azok milyen számok???
- Érveltek végtelen sorokkal is:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i,$$

- amelyből $x = -3$ és $x = 1$ helyettesítésekkel,

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots$$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- Azaz e sorokkal nem lehet érvelni.

A vita néhány hasznos mellékterméke.

1. Euler levele Johann Bernoullinak:

- $y = 2 \cos x$ és $y = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}$ megoldása ugyanannak a differenciálegyenletnek, így szükségképp egyenlők.
- Azaz: kapcsolatot talált a trigonometrikus és a logaritmus függvények között.

2. 1748-as publikációja:

$$\cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

3. Ebből (is) következik R. Cotes korábbi, de később elfeledett eredménye:

$$\sqrt{-1}\Phi = \log(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi).$$

Euler megoldása 1.

- Egy ismert sor

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Az e végtelen összegként való ismert előállítás alapján

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i,$$

ahol i egy végtelen nagy számot jelöl.

- Mindkét oldalból i -edik gyököt vonva

$$x^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{y}{i}, \quad \text{azaz} \quad y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1).$$

adódik.

Euler megoldása 2.

- Mivel $x^{\frac{1}{i}}$ egy végtelen nagy kitevőjű gyök (lévén $1/i$ végtelen kicsi kitevő), az y -ra végtelen sok komplex értéket kapunk,
- továbbá $y = \log x$, ezért $\log x$ -nek is végtelen sok komplex értéke van.
- Pontosabban fogalmazva, ha

$$x = a + b\sqrt{-1} = c(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

akkor a c helyett e^C -t írva

$$x = e^C(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) = e^C e^{\sqrt{-1}(\varphi \pm 2\lambda\pi)},$$

Így

$$y = \log x = C + (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1},$$

ahol λ tetszőleges nemnegatív egész szám.

Euler kommentárja.

...valamely adott pozitív valós számnak egyetlen valós és végtelen sok képzetes logaritmusa van, míg a negatív és a képzetes számok logaritmusának minden értéke képzetes, tehát imaginárius, azaz „képzeletbeli”.

Euler megoldása 3.

Záró megjegyzések.

1. Megjegyzés.

E zseniális megoldásával nem aratott osztatlan sikert. Például D'Alambert, aki a Nagy Francia Enciklopédia matematika fejezetét összeállította, analitikus, geometriai és metafizikus érvek sorát adta a $\log(-1) = 0$ egyenlőség elfogadása érdekében.

2. Megjegyzés.

- Euler gondolatmenet mai szemmel is briliáns, de
- bár korrekt eredményre vezet
- mai értelemben teljesen inkorrekt.
- Mentségül: **Euler zseni volt.**

Út a valós számok felé: XVIII. század.

- Integrálási problémákban ismét előjönnek az $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezések, és **képzetes, imaginárius számoknak** nevezik őket (Leibniz és Euler), mert nem a valóságban, hanem „csak a képzeletünkben léteznek”.
- Ugyancsak integrálási problémákból indulva Euler inkorrekt úton korrekt eredményre jut a negatív és az imaginárius számok logaritmusával kapcsolatban.
- Ugyancsak Euler sejtje meg, hogy **vannak olyan számok, amelyek meghaladják az algebrai módszerek erejét, azaz nem algebraiak**, ezek a **transzcendens számok**.
- Sejtése szerint az e , π , valamint a trigonometrikus és a logaritmus függvények értékei általában ilyenek.
- Bizonyítani csak azt tudták (ő és Lambert), hogy a két konstans irracionális.

Az analízis válsága: Konvergenca problémák.

XVIII. század.

- Newton és Leibniz **infinitizimális kalkulusa**: szabadon számoltak **végtelen kicsi/nagy** „számokkal”.
- Euler:

$$e^x = \left(a + \frac{x}{i}\right)^i \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right).$$

ahol i „végtelen nagy szám”.

- Alapvető kérdés: **mi is a végtelen kis/nagy szám, mi egy végtelen sok tagú összeg?**
- Akkor csak intuitív megközelítés volt (pl. mint a görbe aszimptotája).

XIX.-XX. század: Végtelen sorok konvergenciája.

- Definíció.** Legyenek $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ valós számok. A

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

végtelen sor konvergens, ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

határérték létezik és véges. Ellenkező esetben a végtelen sor **divergens**.

- Megjegyzés.** Világos, hogy a konvergencia szükséges feltétele, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ legyen.

XIX.-XX. század: Hatványsorok konvergenciája.

- **Definíció.** Az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

alakú kifejezéseket, ahol $a_i \in \mathbb{R}$ és x valós változó, **hatványsoroknak** (pontosabban valós-) nevezzük.

- **Definíció.** Az előbbi **hatványsor konvergens** az (a, b) intervallumon, ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

(véges) határérték létezik minden $x \in (a, b)$ -re.

Konvergenca problémák: XVIII. század.

- J. Fourier: a rezgő húr problémája: analitikus sorfejtések.
- Az $f(x)$ függvény **Fourier sora**
-

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

- ahol

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nxdx.$$

Konvergenca problémák: XVIII. század.

- Súlyos probléma: több olyan függvény került elő, amelyek Fourier sora nem állította elő a kiindulási függvényt.
- Nagy kérdés: hol a hiba?
 - Nem korrekt a sorbafejtés, vagy
 - a konvergenca fogalma sántít.

A kiút keresése a válságból, a határérték pontos fogalma.

- A definíció:
- Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat határértéke az a szám, azaz e sorozat a -hoz konvergál, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\nu \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > \nu$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.
- De hogyan lehet megállapítani egy sorozatról, hogy ez teljesül? Meg kell „álmodni” előbb az a -t?
- Cauchy ún. belső konvergenca kritériuma a XIX. század elején.
- Az (a_n) számsorozat konvergens, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ létezik, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan ν , hogy valahányszor $m, n > \nu$ mindannyiszor $|a_m - a_n| < \varepsilon$.
- Probléma: e föltétel szükségessége nyilvánvaló, de elegendő is?

A kiút keresése a válságból, a folytonosság kérdése.

- A folytonos függvények Bolzano-Darboux tulajdonsága:
- Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $f(a)$ és $f(b)$ közötti $c \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $y \in [a, b]$, hogy $f(y) = c$.
- A probléma: Nem sikerült e szemléletesen nyilvánvaló állítást bizonyítani.
- Egyre erősödik az a nézet, hogy az igazi probléma a **valós szám fogalmának tisztázatlansága, pontatlansága**.
- A „nagy kérdés”: **Valójában mik is a valós számok?**
- A válasz még várat magára.

Egy kerülőút lépései.

- Az 1830-as években a komplex szám „intuitív” fogalma széles körben használatos, de ez többeket nem elégített ki.
- William Rowland HAMILTON (1805-65): *Conjugate Functions and on Algebra as the Science of Pure Time* c. 1837-es dolgozata.
- Hamilton legfontosabb észrevételei:
 - Pontosítja az ún. komplex egység fogalmát: i -vel egy olyan **szimbólumot** jelöl, amelynek négyzete -1 .
 - Egy $a + bi$ alakban írt komplex szám NEM olyan összeg, mint például a $2 + 3$. A „plusz jel” használata történeti tévedés, hiszen a bi nem adható hozzá a -hoz az ismert, a $+$ -szal jelölt összeadással.
 - Az $a + bi$ komplex szám nem több (és nem is kevesebb), mint az (a, b) (valós számokból álló) **rendezett pár**.

Egy kerülőút lépései.

- A műveletek a következők.

$$\begin{aligned}(a, b) \pm (c, d) &= (a \pm c, b \pm d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ \frac{(a, b)}{(c, d)} &= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)\end{aligned}$$

- A „szokásos” műveleti tulajdonságok: asszociativitás, kommutativitás, stb. egyszerű számolással belátható. **Ezzel a komplex szám fogalma — a valós szám fogalmára építve — logikailag is korrekt megalapozást nyert.**
- Azt sajnos még mindig NEM TUDJUK, hogy mik is a valós számok, de nekik az $(a, 0)$ alakú párok felelnek meg.

Egy kerülőút lépései.

- Nem mellékes „melléktermék”: a bizonyos értelemben misztikus $\sqrt{-1}$ problémája is rendeződött, mivel az nem más, mint a $(0, 1)$ pár, hiszen $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, de $(0, -1)^2 = (-1, 0)$ is áll.
- Gauss egy 1837-ben Bolyai Farkashoz írott levelében megemlítette, hogy ő már 1831-ben eljutott a komplex szám ezen fogalmához, de (természetesen) ezt sem publikálta. Így a matematikai világ a prioritást Hamiltonnak adta és adja a mai napig is. A „komplex szám” elnevezés minden bizonnyal Gauss-tól ered.
- Cauchy 1847-ben egy másik definícióját adta meg a komplex számok testének, s így a komplex számoknak is:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1).$$

Egy lehetséges továbblépés.

- A **valós számokat** tekinthetjük **egydimenziós számoknak**, a **komplexe**ket **kétdimenziósoknak**. Jogos kérdés: **léteznek-e háromdimenziós számok** annál is inkább, hogy a minket körülvevő tér is három dimenziós.
- Ugyanis, a komplex számok síkvektoroknak (is) tekinthetők és hasznosak a síkgeometriában. Miért ne lehetne ugyanígy háromdimenziós számokat használni a térgeometriában?
- A komplex (kétdimenziós) számok geometriai alkalmazásával — a legtöbbször a síkbeli reprezentációt tekintve definíciójuknak — többen is foglalkoztak: Caspar WESSEL 1797-ben, Jean Robert ARGAND 1806-ban, John WARREN 1828-ban, és mint már említettük Carl Fridrich GAUSS 1831-ben.

Hamilton: Léteznek-e 3 dimenziós számok?

- A méltán híres matematikus és fizikus a komplex számok precíz fogalmának megadása után, 30 évig dolgozott a 3 dimenziós számok megalkotásán.
- Természetesen a valós szám fogalmának tisztázása nélkül, DE arra alapozva.
- A sikertelen kísérletek után áttért a 4 dimenzióra, és itt sikeres volt: megalkotta a **kvaternió** fogalmát.
- Az i -hez hasonló további két képzetes egységet, j , k vezetett be:
- A definiáló egyenlőségek: $ii = jj = kk = -1$,

$$ik = ij = -j, \quad kj = ij = -i$$

$$ki = j, \quad jk = i$$

$$k^2 = ij = -ij = -1$$

A kvaterniók és azokon túl.

- A $\mathbb{Q} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ halmaz, ahol i, j, k az iménti képzetes egységek, komplex számoknál megismert összeadással és szorzással, figyelembe véve az előbbi azonosságokat, egy ún. **ferdetest**, a **kvaternio-ferdetest**, ahol $(\mathbb{Q}, +)$ Abel-csoport, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ csoport, és a szorzás disztributív az összeadásra, és a mint gyűrű zérusosztó-mentes.
- 1882-ben Frobenius igazolta, hogy további bővítésnek nincs értelme, hiszen 8 dimenziósnak még lehetne definiálni, de az már nem asszociatív és nem zérusosztó-mentes szorzású.
- A kvaternióknak kiterjedt alkalmazásai lettek, többek közt az elméleti fizikában és a geometriában.

Út a valós szám mai fogalmához: de mi is az?

- Naív megközelítés: valós szám = ami a valóságban létezik.
- Gyakorlatilag: kezdetben pozitív, később tetszőleges racionális szám (= előáll, mint két egész szám hányadosa), végül bizonyos algebrai irracionálisokat, pontosabban a $\sqrt[n]{a \pm \sqrt[m]{b}}$ alakú számokat, — lényegében azokat, amelyek szerepelnek Euklidesz X. könyvében — is ide sorolták.
- De már a pisai Leonardo rámutatott, hogy nem minden egyenlet gyökei
- Megjelenik a XVI. században — nem pontosan — a képzetes (=komplex) szám fogalma, de az a valós szám fogalmán alapul.
- **Euler egy sejtése:** vannak olyan számok is, amelyek **meghaladják az algebrai módszerek erejét**.

Út a valós szám mai fogalmához, Euler pontosít.

- Pontosabban: vannak olyan „valós” (=valóságos) számok is, amelyek nem racionálisok, de nem is gyökmennyiségek.
- Definíció.** Az α „valós szám” **algebrai szám**, ha van olyan $f(x)$ racionális (egész) együtthatós nemzérő polinom, hogy $f(\alpha) = 0$.
- A korábbi sejtés pontosabban: Az irracionális számoknak két osztálya van: az előbb definiált algebraiak, valamint azok, amelyek „meghaladják” az algebrai módszerek erejét, azaz nem gyökei egyetlen racionális együtthatós (nemzérő) polinomnak sem.
- Ez utóbbiakat Euler **transzcendens számoknak** nevezte.
- Az elnevezés eredete: transcend=meghalad.

Hogyan ismerhetők föl a transzcendens számok: egy kézenfekvő ötlet.

- Egyszerűen igazolható, hogy a racionális számok tizedestört alakja véges, vagy periódikus.
- Bizonyítható, hogy egy α valós szám pontosan akkor racionális, ha lánc tört alakja véges, így a végtelen lánc törtek állítják elő az irracionálisokat.
- Hasonlóan, mint a tizedestörteknél, definiálható a lánc törtek periodicitása.
- Jámbor óhaj:** De szép lenne, ha éppen a periódikus végtelen lánc törtek lennének az algebrai irracionálisok.

Hogyan ismerhetők föl a transzcendens számok?

- Sajnos** nem így van, a periódikus lánc törtek az ún. (valós) kvadratikus irracionálisokat, azok amelyek egész együtthatós másodfokú egyenletek nem racionális gyökei.
- Euler egy eredménye: Az e irracionális, mert lánc tört alakja végtelen, DE vélhetően NEM kvadratikus irracionális, mert lánc tört alakja nem tűnik periódikusnak.

Az e és a π lánc tört alakja

•

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

$$=< 2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots >$$

- Ez tényleg nem tűnik periódikusnak, sőt a π lánc tört alakja sem:
- Lambert (Euler tanítványa) megmutatta, hogy

$$\pi = < 3; 7, 15, 1, 282, \dots >$$

Egy alapvető tétel.

Racionális approximáció.

Definíció. $\alpha \in \mathbb{Z}$ n -edfokú **algebrai szám**, ha gyöke valamely n -edfokú racionális együtthatós polinomnak, de nem gyöke egyetlen n -nél alacsonyabb fokú racionális együtthatós nemzérő polinomnak sem.

Definíció. Legyen $t \in \mathbb{N}$, $t > 1$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az α valós szám **t -edrendben approximálható** racionális számokkal, ha végtelen sok olyan $\frac{a}{b}$, $b \geq 1$ racionális szám létezik, hogy

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{c(\alpha)}{b^t},$$

ahol $c(\alpha)$ csak α -tól függő konstans.

Tétel. Egy n -edfokú valós algebrai szám nem approximálható n -edrendnél jobban racionális számokkal.

Áttörés:

LIIOUVILLE.

Az 1840-es évek elején folytatott vizsgálatai elvezettek annak igazolásához, hogy

LÉTEZIK TRANSZCENDENS SZÁM.

Liouville tétele (1844).

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001 \overbrace{0 \dots 0}^{17 \text{ zérus}} 10 \dots$$

sor konvergens, és összege tetszőleges rendben approximálható racionális számokkal, így az transzcendens szám.

A számfogalom fölépítésének vázlata.

Természetes számok.

- A természetes számok a Peano axiómák egy modelljeként definiálhatók:
- $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, ha
 - $1 \in \mathbb{N}$,
 - $\forall k \in \mathbb{N}$ -hez létezik egy $k' \in \mathbb{N}$,
 - nem létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $1 = k'$,
 - ha valamely $m, n \in \mathbb{N}$ -re $m' = n'$, akkor $m = n$,
 - ha $S \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $1 \in S$, és valahányszor $m \in S$, mindannyiszor $m' \in S$, akkor $S = \mathbb{N}$.
- Az $\mathbb{N}$ halmazon definiálható két asszociatív és kommutatív művelet, amelyeket általában $+$ és $\cdot$ jelöli, és összeadásnak, valamint szorzásnak nevezzünk.

Egész számok.

- A természetes számok egységelems félgyűrűt alkotnak, így körükben általában nem oldhatók meg az $a + x = b$ alakú egyenletek, ahol $a, b \in \mathbb{N}$, ezért azt bővíteni kell.
- Végezzük el a következő konstrukciót.
 - Legyen $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és definiáljuk a következő relációt.
 - Tetszőleges $(a, b), (c, d) \in A$ -ra $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.
 - Definiáljunk összeadást és szorzást az $A / \sim$ halmazon:

$$\overline{(a, b) + (c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} \quad \overline{(a, b) \cdot (c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

- Megmutatható, hogy az $(A / \sim; +, \cdot)$ algebra egységelemes kommutatív zérusosztómentes gyűrű (=integritástartomány).

Egész számok.

- Ezen a gyűrű elemeit egész számoknak nevezzük, és halmazukat $\mathbb{Z}$ jelöli. $\mathbb{N}$ beágyazható $\mathbb{Z}$ -be, azaz létezik $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ injektív homomorfizmus.
- Azaz a $\mathbb{Z}$ gyűrű tekinthető az $\mathbb{N}$ félgyűrű bővítésének.
- A bővítési folyamatot tovább kell vinni, meg kell konstruálni az egész számokat tartalmazó legszűkebb testet, amelyben már megoldhatók az $ax = b$, $a \neq 0$ alakú egyenletek is.

Racionális számok.

- A bővítés a következő konstrukciók nyugszik.
 - Legyen $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, amelyen két műveletet és egy (ekvivalencia) relációt definiálunk:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$

- $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$
- Ismét kiterjesztjük a műveleteket az $A/\sim$ faktorhalmazra:

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, b)}$$

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, d)} = \overline{(a, b)}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(d, d)}$$

Racionális számok.

- Tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$ -ra
-

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, b)}$$

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, d)} = \overline{(a, b)}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(d, d)}$$

- Az utóbbiból következik, hogy ha $a \neq 0$, akkor megoldható az

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(c, d)}$$

egyenlet.

- Ez azt (is) jelenti, hogy a $A/\sim$ algebra test, amelyet a racionális számok testének nevezzünk, és általában $\mathbb{Q}$ -val jelöljük.

A számfogalom föépítésének vázlata.

Racionális számok.

- A racionális számok testében — többek közt — nem oldhatók meg a következő problémák.
 - Bár a konvergens sorozat fogalma definiálható: *a racionális számokból álló (a_n) sorozat konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ racionális számhoz van olyan $\nu \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy bármely $m, n > \nu$ -re $|a_n - a_m| < \varepsilon$ az ilyen sorozatoknak gyakran nem létezik határértéke.*
 - A $\mathbb{Q}$ test algebrailag nem zárt, azaz egy nemzéró $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak nem föltétlenül van racionális szám zéróhelye.
- A következő bővítést úgy végezzük, hogy az első probléma megoldódjék.

Valós számok: G. Cantor eljárása 1.

- Jelölje $\mathbb{Q}_\infty$ az összes racionális tagú végtelen sorozat halmazát, és legyen $\alpha = (a_k) \in \mathbb{Q}_\infty$. Ezen sorozat *nullasorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ esetén van olyan $\nu \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > \nu$ -re $|a_n| < \varepsilon$.
- A nullasorozatok halmazát jelölje $\mathbb{Q}_0$.
- Azt mondjuk, hogy az α sorozat *konvergens*, ha tetszőleges α' részsorozatára $\alpha - \alpha' \in \mathbb{Q}_0$.
- Egyszerűen látható, hogy ez egy átfogalmazása a konvergencia korábban adott definíciójának.
- A konvergens sorozatok halmazát jelölje $\mathbb{Q}_\infty^k$.
- Világos, hogy e halmaz a sorozatok szokásos összeadásával és szorzásával egységelemes kommutatív gyűrű.

G. Cantor eljárása 2.

- Vezessük be a következő $\sim$ relációt $\mathbb{Q}_\infty^k$ -n:
- Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_\infty^k$.

$$\alpha \sim \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta \in \mathbb{Q}_0$$

- Egyszerűen belátható, hogy $\sim$ kongruenciája a $\mathbb{Q}_\infty^k$ gyűrűnek.
- Ugyancsak egy egyszerű eljárással kaphat, hogy

$$\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$$

test.

- Világos, hogy e testnek van olyan részteste, amely izomorf a racionális számok $\mathbb{Q}$ testével: valamely $a \in \mathbb{Q}$ -nak azt az osztályt feleltessük meg, amely tartalmazza az (a) ún. konstans sorozatot.

G. Cantor eljárása 3.

A $\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$ testet a valós számok testének nevezzük.

A valós számok tehát modellezhetők, mint racionális számokból álló konvergens sorozatok határértékei.

Megjegyzés.

Megmutatható, hogy a $\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$ test, amelyet a következőkben $\mathbb{R}$ jelöl, kielégíti az 1. feltételt, azaz bármely, az elemeiből képezett konvergens sorozatnak van határértéke $\mathbb{R}$ -ben. A második feltételt azonban csak a komplex számok teste elégíti ki.

Egy nem éppen kedvező eredmény.

G. CANTOR (1874)

- A valós számok (a végtelen tizedestörtökkel reprezentálható számok) „többen vannak”, mint a racionális számok, azaz egy ún. **nem megszámlálható** halmazt alkotnak, de
- az összes (valós és komplex) algebrai számok halmaza megszámlálható.
- Következésképp, **a transzcendens számok (külön a valósok is!) nem megszámlálható halmazt alkotnak**, „ugyanannyian” vannak, mint az összes valós (vagy komplex) számok.
- Másképpen mondva a transzcendens számok halmaza *kontinuum számosságú*, azaz **majdnem minden valós szám transzcendens**.

Néhány fontos konstans.

HERMITE (1873)

Az e szám transzcendens.

LINDEMANN (1882)

- Ha $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ különböző algebrai számok, akkor

$$e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_k}$$

lineárisan függetlenek az algebrai számok teste fölött.

- Másképpen mondva (az előbbi jelölésekkel) tetszőleges $p_1, \dots, p_k$ algebrai számokra

$$p_1 e^{\alpha_1} + \dots + p_k e^{\alpha_k} = 0 \Leftrightarrow p_0 = \dots = p_k = 0.$$

Néhány fontos konstans.

Három nyitott kérdés.

- Természetes kérdés ezek után, hogy az $e + \pi$ szám transzcendens-e.
 - A válasz nem ismert, míg
 - $e + i\pi$ transzcendens volta trivialis.
- Ugyancsak ismeretlen az ún. Euler-konstans, a

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right),$$

szám milyensége, a sejtés: transzcendens.

- Szintén ismeretlen az α^β alakú számok természete, ha α algebrai, β pedig irracionális algebrai szám, például algebrai-e vagy transzcendens a $2^{\sqrt{2}}$ szám.

Néhány fontos konstans.

Következmények.

- Ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, akkor e^α , továbbá, ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0, 1$, akkor $\log \alpha$ transzcendens.
- Az $e^{i\pi} + 1 = 0$ egyenlőség alapján $i\pi$ transzcendens, így — mivel az algebrai számok testet alkotnak, és i algebrai — π is transzcendens.
- Így a kör négyszögesítésének ókori problémája nem megoldhatónak bizonyult.
- Lindemann tételéből következik Hermite eredménye: ha $n = 2$, $p_1 = 1$, $x_2 = 0$, akkor e^{x_1} nem algebrai, s így e sem lehet az.

Részlet D. Hilbert 1900-as párizsi előadásából.

Hermite és Lindemann eredményeit — amelyek az exponenciális függvényekre vonatkoznak — minden matematikus nagyra értékeli. Ezen az úton tovább kell haladni, s az elkövetkező időben az alábbi problémát kellene megoldani. Bizonyos — az analízisben fontos — transzcendens függvények egyes algebrai szám helyeken algebrai szám értékeket vesznek föl. Úgy tűnik, hogy ezt érdemes alaposan megvizsgálni. Ugyanis általában azt képzeljük, hogy a transzcendens függvények mindenütt transzcendens értékeket vesznek föl. Tesszük ezt annak ellenére, hogy ismerünk olyan transzcendens függvényeket, amelyek algebrai számokhoz algebrai számot, sőt racionálisat rendelnek.

Részlet D. Hilbert 1900-as párizsi előadásából.

Például az $e^{i\pi z}$ exponenciális függvény értéke minden $z \in \mathbb{Q}$ -ra algebrai, míg minden $z \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ -ra transzcendens. Ezen állítás geometriailag is megfogalmazható. Ha egy egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szög és a szárak által alkotott szög aránya transzcendens, akkor az alap és a szár aránya is transzcendens. Bár ez egy igen egyszerűen hangzó állítás, ekvivalens Hermite és Lindemann eredményével, s a bizonyítása is igen nehéz, sőt meglehetősen bonyolult. Hasonlóan nehéz lehet a bizonyítása a következő állításnak is.

HILBERT VII. PROBLÉMÁJA.

Hilbert kérdése.

Legyen $\alpha \in \mathbb{A}$ és $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$, ekkor az α^β alakú számok, például $2^{\sqrt{2}}$, $e^\pi = i^{-2i}$ mindig transzcendens szám, vagy legalább irracionális.

Tovább az előadás.

Biztos vagyok benne, hogy ezen, és a hasonló problémák megoldása egészen új módszereket igényel, s egy új szemléletet is ad. Új megvilágításba helyezi az irracionális és a transzcendens számokat.

A probléma megoldása.

Részlet Hilbert egy előadásából, Göttingen 1919.

1. A VII. Probléma nagyon nehéz, így érdemes összehasonlítani néhány ismert problémával.
2. A Riemann-hipotézis bizonyítása irányába az utóbbi években komoly előrehaladás történt, így nagyon reméli, hogy még megéri a bizonyítását.
3. Számos biztató eredmény van a Fermat-sejtéssel kapcsolatban is, ezért talán a hallgatóság legfiatalabb tagjai megérik a sejtés bizonyítását.
4. Annak a bizonyítását azonban, hogy a $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám, a jelenlevők közül senki sem fogja látni.

Hilbert vélekedéséről.

Az első két kérdésről.

- A Riemann-hipotézis, azaz a ζ függvény minden komplex zéróhelyének a valós része $\frac{1}{2}$, a mai napig nyitott kérdés.
- A Fermat sejtés bizonyítását 1993-ban publikálta A. Wiles.
- Azaz egy kérdésben Hilbert tévedett, egyben talán nem, ha ...

A harmadikról.

Az első részleges megoldás, az első nem teljes válasz 1929-ben jelent meg, majd pár év alatt teljessé vált a megoldás.

A VII. Probléma részleges megoldása.

Gelfond tétele. (1929)

Ha β komplex kvadratikus irracionális szám, akkor α^β transzcendens.

Ez tartalmazza az e^π esetet, hiszen e^π az i^i egyik értéke. i pedig komplex és kvadratikus irracionális.

Kuzmin és Siegel tétele. (1930)

α^β akkor is transzcendens, ha β valós kvadratikus irracionális szám.

Megjegyzések.

1. A két matematikus eredményét egymástól függetlenül érte el.
2. Hilbert megérte annak bizonyítását, hogy $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám?

A VII. Probléma teljes megoldása.

Gelfond – Schneider tétel. (1934)

Ha $\alpha, \beta \neq 0$ és 1-től különböző algebrai számok, továbbá β irracionális, akkor α^β transzcendens szám.

Két további ekvivalens állítás.

1. Ha $\alpha, \beta \neq 0, 1$ -től különböző algebrai számok, akkor $\log \alpha / \log \beta$ racionális, vagy transzcendens.
2. Legyenek α, β nemzéró algebrai számok. Ha $\log \alpha, \log \beta$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött, akkor lineárisan függetlenek az algebrai számok teste fölött.

A VII. Probléma teljes megoldása.

Megjegyzések.

1. Gelfond és Schneider egymástól függetlenül jutott el ezen eredményhez.
2. Hilbert sejtése a legerősebb formában bizonyult igaznak.
3. Hilbert 1943-ban halt meg, azaz megérte sejtése teljes bizonyítását.
4. Még egy 1919-es tévedése.

DE

Az előbbi tévedések nem árnyékolják be azon általános vélekedést, miszerint **David Hilbert a XIX. század utolsó harmadának és a XX. század első felének egyik legnagyobb hatású matematikusa volt.**

Egy záró gondolat.

- Gelfond bizonyításában alapvető szerepe volt a következő komplex függvénynek:

•

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} C_{kl} e^{(k \log \alpha + l \log \beta)z}$$

- ahol $C_{kl} \in \mathbb{Z}$ és $|F^{(k)}(p)|$ „nagyon kicsi” sok p, k értékre.

Az előbbi függvény csak egy szerény adalék a probléma nehézsége illusztrációjához.