

Előzmények.

EGY MŰVÉSZETBŐL SZÜLETETT TUDOMÁNY, A PROJEKTÍV GEOMETRIA avagy „Hogyan lett a barackmagból atommag?”

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2021. május 3.

A képzőművészeti ábrázolás alapproblémája.

Három dimenziós valóság, két dimenziós tábla, vászon, ...

A folyammenti kultúrák képzőművészete.

- Koncepcionális perspektíva az egyiptomi falfestményeken.
- Alakok szemből és profilból való egyidejű ábrázolása (Mezopotámia, Egyiptom).

Egyiptomi halastó.



Sumer mozaik.



Kora középkor.

A festészet fő célja:

- a keresztény (katolikus) doktrínák bemutatása,
- az egyház tanításainak illusztrálása, szolgálata.
- Ezért nem volt cél igazi „hús-vér” emberek ábrázolása, csak földöntúli, „éteri” lényeké.
- Mozaikok, ortodox ikonok, a „bizánci stílus”.

Andrej Rubljov egy ikonja.



A reneszánsz hozta változások:

- az európai gondolkodók a természet, az őket körülvevő való világ felé fordultak,
- nem akartak azzal konfrontálódni,
- a képzőművészetben egyre inkább realisztikus ábrázolásra törekedtek,
- erőteljesen növekedett az igény az antik, elsődlegesen a görög kultúra megismerésére,
- a festők egyre inkább a való világot, a benne élő emberekben rejlő szépséget kívánták ábrázolni.
- De hogyan tegyék ezt?

A reneszánsz hozta változások:

A reneszánsz festők a matematika felé fordultak, DE MIÉRT?

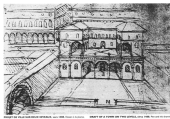
- A képeken megjeleníteni kívánt alakzatok: testek, felületek, stb. ideális változatával az **euklideszi geometria** foglalkozik.
- Az egyre ismertebb és népszerűbb görög filozófia szerint **a világ megismerésének kulcsa a matematika**, hiszen az matematikai elvek szerint elrendezett.
- Az előbbiekből az (is) következik, hogy a képeknek szükségképp matematikai tartalma is van.

A reneszánsz hozta változások:

További érvek a matematika felé fordulás mellett.

- A kor nagy festői, szobrászai **építészek**, **építők** is voltak, palotákat, templomokat terveztek, építésüket irányították.
- Ezek mellett **hadmérnöki** feladatokat is elláttak: erődítményeket terveztek, építettek, ostromeszközöket konstruáltak.

Illusztráció 1.



Leonardo egy palotaterve

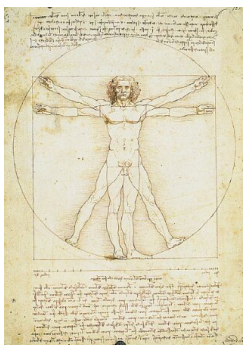
Leonardo da Vinci a hadmérnök

Illusztráció 2.



Leonardo da Vinci

Ideális ember — ideális matematikai alakzatok.



Leonardo da Vinci

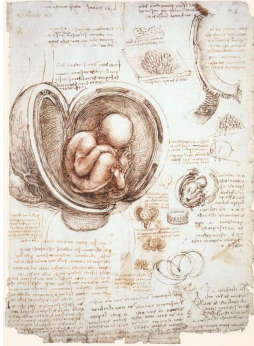
Néhány kép a művész széles érdeklődési körének bemutatására.

Illusztráció 3.



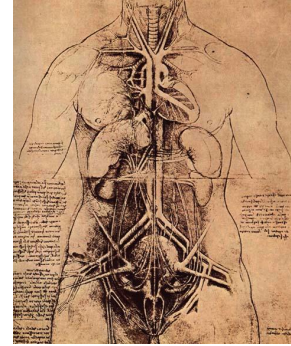
Magzat nézetek.

Leonardo da Vinci



Magzat, „tépőzár”.

Leonardo da Vinci



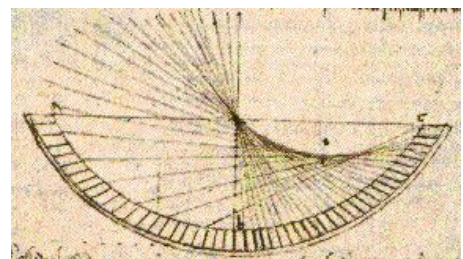
A női test anatómiája.

Leonardo da Vinci



„no comment”

Leonardo da Vinci



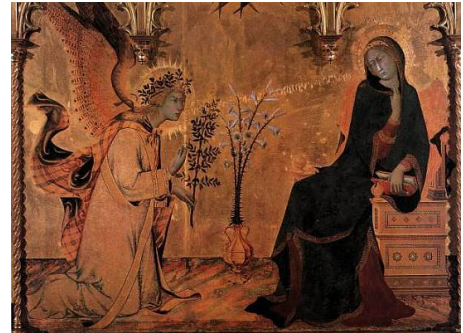
Sugarak, visszaverődés?

A festők előtt álló probléma.

- A kiindulási pont: a való világ 3 dimenziós, de a vászon (a tábla) csak két dimenziós. Így az az első kérdés, hogy ...
 - hogyan érhető el az, hogy a képre nézve ugyanaz a benyomásunk (látványunk) legyen, mint a valóságban? Ennek érdekében ...
 - meg kell alkotni a perspektívus ábrázolás optikai alapjait, majd részletesen kidolgozni az alkalmazandó elveket.
- Előzmények, megoldási kísérletek az ókori kultúrákban.
- Út a „perspektívus ábrázolás” felé.
 - A „koncepcionális” perspektívák a folyammenti kultúrákban.
 - Az első optikai rendszer, az **axiális perspektíva**.

Az első kísérletek a reneszánsz kezdetén.

Simone Martini: Angyali üdvözet (részlet), a XIV.sz. eleje.



Az első kísérletek a reneszánsz kezdetén.

Duccio: a Madonna gyermekével, a XIII.sz. vége.



Az első kísérletek a reneszánsz kezdetén.

Megjegyzések a két képhez.

1. Martini képe.
 - 1.1 A két alak már nem „lebeg az éterben”, van talaj alattuk.
 - 1.2 A ruhákon „redőzöttség” vehető észre.
 - 1.3 DE Mária arca ugyanolyan, mint egy bizánci/pravoszláv ikon: teljesen **érzelem mentes**, pedig ...
2. Duccio képe.
 - 2.1 Együtt látható a kezdetleges optikai rendszer az ókori „teraszos perspektívával”.
 - 2.2 Az optikai rendszer nem teljes, az összetartó egyenesek metszéspontjai még nem illeszkednek egyetlen egyenesre, azaz **még nem teljes a rendszer**.

Az első kísérletek a reneszánsz kezdetén: Axiális perspektíva.



Duccio: Utolsó vacsora (részlet).
A „kazettás mennyezet” pontosan illeszkedik a rendszerbe, de az asztal már nem.

Újabb elv: a centrális perspektíva.

Az első (nem teljesen sikeres) kísérletek.



Giotto: Szent Ferenc halála.

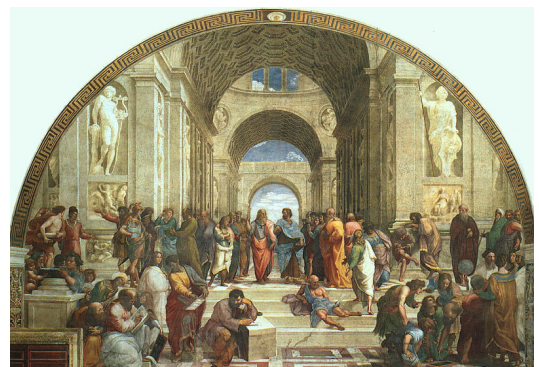
Újabb elv: a centrális perspektíva.

Egy újabb — már jobb — kísérlet, Uccello.



Sárkányölő Szent György

Tökéletesen kivitelezett centrális perspektívák.



Raffaello: Atheni iskola.

Tökéletesen kivitelezett centrális perspektívák.



Botticelli: Rágalmazás a bíróságon.

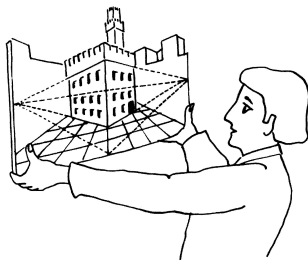


Dürer: Szent Jeromos a dolgozószobájában.

A festészet-elmélet kialakulása.

A megalapító.

- **FILIPPO BRUNELLESCHI**, aki építészként is híres volt (XV.sz.). Ő tervezte pl. a Firenzei Dóm kupoláját.
- Egy illusztrációja (nem korabeli rajzon):



F. Brunelleschi tanítványai 1.

- Leghíresebbek: Donatello, Masaccio és Fra Filippo.
- Masaccio két képe.



F. Brunelleschi tanítványai 2.



Az elmélet kiteljesedése.

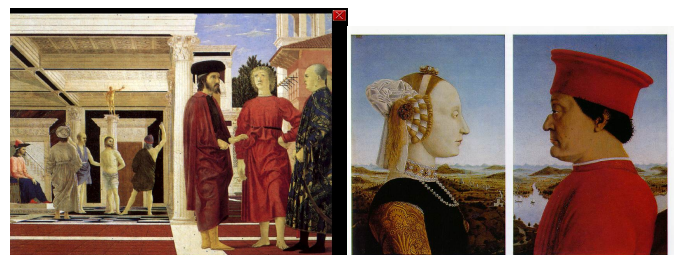
Leone Battista Alberti

- 1435-ös **della Pittura**-ja az első fennmaradt festészet-elméleti munka. Létezik modern magyar fordítása is.
- Ebben a következőket hangsúlyozta:
- a festőnek értenie kell a geometriához,
- meg kell tanulni a festészet elméletét, a perspektívákat, azok közül is a fókuszosat,
- majd el kell sajátítani annak gyakorlatát.

Piero della Francesca

Piero della Francesca két képe.

- Brunelleschi talán legsokoldalúbb tanítványa.
- A század harmadik nagy elméleti mestere, aki, a
- **De Prospettiva Pigendi** c. könyvében jelentősen továbbfejlesztette Alberti elméletét.
- Nemcsak a festészet-elméleti munkássága jelentős, hanem jó festő is volt.
- SŐT, **említésre méltó matematikai eredményei is voltak.**



A Trattato d'Abaco c. traktátusának két problémája.

1. *Egy ember kölcsönöz egy másiknak 100 lírát, és 3 év múlva 150 lírát kap vissza úgy, hogy a kamatot évente a tőkéhez írjuk. Mennyi a havi kamat?*

Megoldás.

- A feladat megoldásában a havi kamatot „denarii”-ban fejezték ki, 1 Lira az 20×12 denarii.
- Ha a havi kamat 1 Lirára x denarii, akkor az éves kamat $12x$ denarii 1 Lirára,
- így az éves kamatláb $\frac{x}{20}$. Mindezek alapján az x havi kamatra a következő egyenlet írható föl.

$$100 \left(1 + \frac{x}{20}\right)^3 = 150,$$

Piero della Francesca a matematikus.

A megoldás (folytatás).

- Ezt kifejtve és 80-nal szorozva

$$x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000.$$

- Ezen (teljes) harmadfokú egyenlet **algebrai** megoldása megtalálható a híres pisai **Dardi mester** traktátusában is.
- Megjegyzés.** A kifejtést mellőzve egyszerűbb a megoldás, de ő mindkét úton megadta azt.
- $x = 2,8942848510666373561608442387935$.
- Ellenőrizhető, hogy a megoldás korrekt, pl. 3 tizedessel számolva a hiba kisebb 10^{-3} -nál.

Piero della Francesca a matematikus.

Francesca második problémája.

- Teljesen hasonló az előbbihez. Ebben ugyancsak 100 Lirát 4 hónapra adunk kölcsön, s a határidő lejártával 160 Lirát kapunk vissza. Ismét az egy Lirára számított havi kamat a kérdés.
- A megoldáshoz — az előbbinek megfelelő gondolatmenet alapján — most az

$$(x + 20)^4 = 256000$$

egyenletet kell megoldani.

- Ezt is kétféleképp oldotta meg: egyszerűen gyököt vonva, majd kifejtés után Dardi egy másik „mintáját” használva, amely egy

Piero della Francesca a matematikus.

Francesca második problémája (folytatás).

-

$$x^4 + 80x^3 + 2400x^2 + 32000x = 96000$$

alakú negyedfokú egyenlet megoldását jelenti.

- Megjegyzés.** Dardi traktátusában közel 200 egyenlet-típusra adott meg algebrai megoldási eljárást, konkrét problémákat tekintve.
- A harmad- és a negyedfokú egyenletekre vezetők csak speciális esetekben korrektek, de példái ilyenek.

További festészet-elméleti munkák.

Leonardo da Vinci

- Több traktátust is írt, mindegyikben hangsúlyozta a matematikai ismeretek, a matematikai megalapozottság fontosságát.
- Egyik könyvének mottoja: „**Senki olyan ne olvassa műveimet, aki nem matematikus.**”
- Másutt: „A festészet célja a természet megjelenítése, és a festészet értéke pedig az ábrázolás pontosságán nyugszik. Még a tisztán képzeleten alapuló alkotásoknak is úgy kell megjelennie, mintha léteznének a természetben. A **festészet** tehát **tudomány**, s mint minden tudománynak **a festészetnek is a matematikán kell alapulnia.**”

További festészet-elméleti munkák.

Leonardo da Vinci

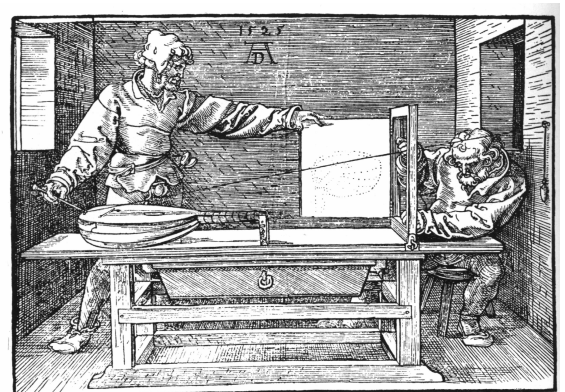
- Még két szentenciája: „**A gyakorlatnak szilárd elméleti alapokon kell nyugodnia.**”
- „**A perspektíva a festészet kormányrúdjá és vezénylő pálcjá.**”

További festészet-elméleti munkák.

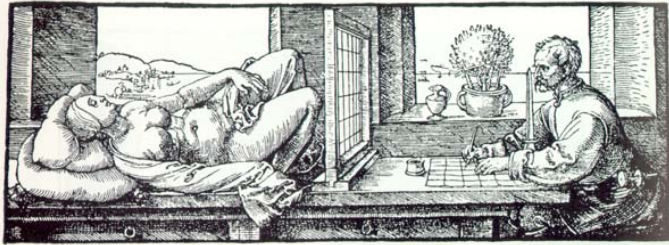
Dürer egy illusztráló metszete.

Albrecht Dürer

- *Underweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheyd* (1528):
- Némileg tovább ment a matematikai precizitás, az ezirányú ismeretek hangsúlyozásában: a vetületek (a képek) fő vonalainak körzővel-vonalzóval való megszerkesztését javasolta.
- Néhány érdekes technikai megoldást is javasolt.



Dürer egy illusztráló metszete.



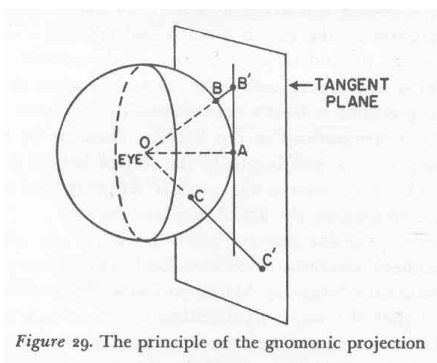
Első nem művészeti alkalmazás: térképszerkesztés.

A probléma és lehetséges megoldásai.

- A XVI. század második felétől megélénkült a tengerhajózás, minél pontosabb térképek kellettek.
- A probléma hasonló a festőkéhez: a gömb (félgömb) felületét kell síkban ábrázolni.
- Az első komoly megoldási kísérletek/eredmények a németalföldi kartográfusok érdeme.
- Mindenképpen van torzítás, de nem mindegy, hogy mi és mennyire torzul.
- A legfőbb kérdések: iránytartás és távolságtartás,
- valamint a korrekciós számítások bonyolultsága.

Gnomikus vetület.

Érintősíkra vetítünk.



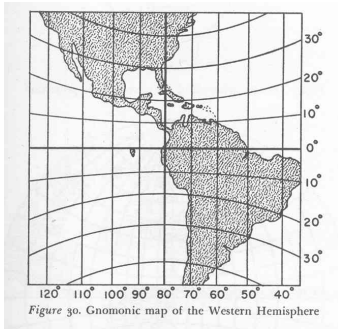
Gnomikus vetület.

A jellemzők.

- A hosszúsági körök egyenesek.
- A főkörök képe egyenes: a gömbi geodetikusok képe síkbeli geodetikus vonal lesz.
- Azaz a legrövidebb útvonal képe egyenes vonal.
- Nagy hátránya: a sarkok felé közeledve monoton nő a távolság- és szögtorzítás.

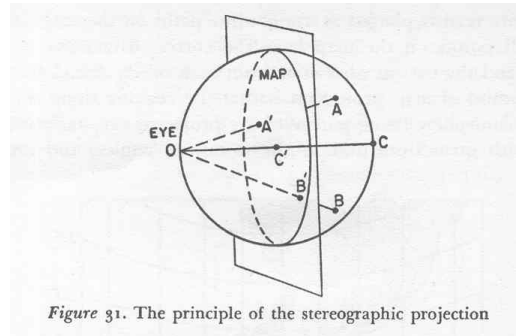
Gnomikus vetület.

Érintősíkra vetítünk.



Sztereografikus vetület.

Főkört tartalmazó síkra vetítünk („visszafelé”)

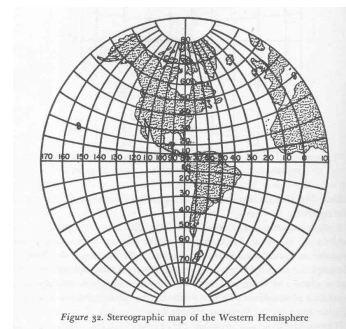


Sztereografikus vetület.

Sztereografikus vetület.

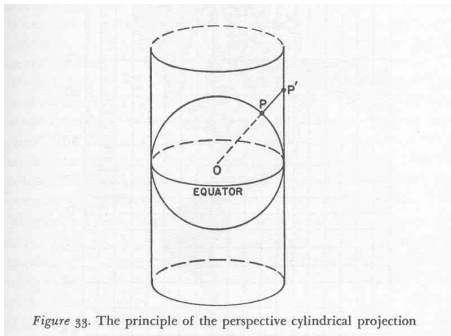
A jellemzők.

- A vetítés szögtartó: azaz két gömbi vonal és képe a térképen ugyanakkora szöget zár be.
- A legrövidebb, a főkör menti útvonal nem egyenes a térképen.
- A torzítások itt is erősen nőnek a sarkok felé haladva.



Cilindrikus, vagy Mercator vetület.

Érintőhengerre vetítünk.

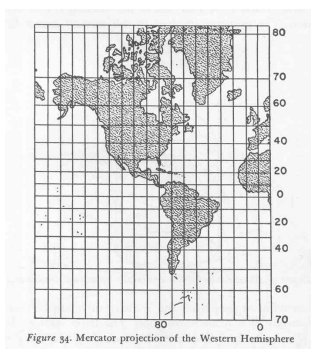


A cilindrikus vetület jellemzői.

- Nincs a térképen olyan pont, amely a sarkoknak felelne meg.
- Mind a hosszúsági, mind a szélességi körök egyenesként jelennek meg.
- Nem távolságtartó, de szögtartó.
- Az állandó iránytű-álláshoz tartozó útvonalak képe egyenes vonal a térképen.
- A legrövidebb, a főkört követő útvonal képe nem egyenes.
- Ezen úgy segíthettek a hajósok, hogy — kissé eltérve ugyan az állandó iránytű-állástól — rövid, főkört követő útvonalakon hajóztak, így útvonaluk közel egyenes lehetett, és optimális is maradt.
- Sajnos a sarkok felé közeledve ezen a térképfajta torzítása a legerősebb.

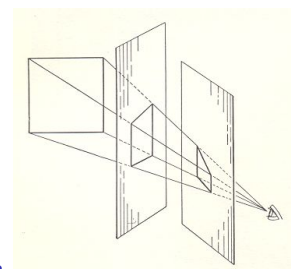
Cilindrikus (henger) vetület.

A nyugati félteke.



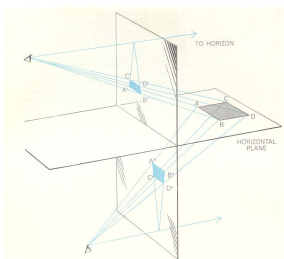
Hogyan lett mindebből egy matematikai elmélet.

- A probléma matematikai megfogalmazása.
 - Egy pontból (a szem) sugarak (egyenes vonalak) indulnak a tárgy pontjaihoz. **VETÍTÉS.**
 - A sugárnyaláb útjába tett síkon kialakul a **VETÜLET**, azaz a kép.



Milyen kérdéseket tesz föl egy matematikus itt?

1. Melyek a tárgy (az eredeti alakzat) és a vetület(ek) — a nyert alakzat(ok) — közös tulajdonságai?
2. Ha két különböző pontból készítünk vetületet ugyanazon tárgyról, akkor melyek a két vetület közös tulajdonságai?



A probléma első matematikai megközelítése.

Girard Desargues 1591-1661.

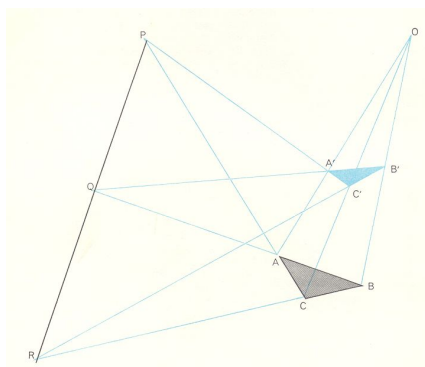
- Francia építész és autodidakta matematikus, aki képzőművész barátainak akart segíteni.
- Ő vetette föl először, hogy Euklidész geometriája nem a **látható**, hanem a **tapintható** világot írja le: párhuzamosok, síkok, stb.
- Ezért lokális jellegű, nem törődik azzal, hogy mi van nagy távolságokra. Erre egy új elmélet kell, amely a vetítésekkel és a vetületekkel kapcsolatos kérdéseket vizsgálja.

Első matematikai tétele.

Ha két háromszög centrálisan perspektív, akkor axiálisan is.

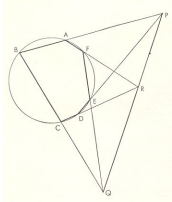
És ha a két sík párhuzamos???

Desargues tétele.



Desargues

- Elméletét 1639-ben könyvben is megírta, de
- annak egyetlen példánya sem ismert ma, munkássága feledésbe merült.
- Szerencsére Pascal és la Hire meglátogattán Desargues-t lemásolták könyvét (éppen minden pénzüket eljátszották).
- A XIX. sz. elején **Monge** megalkotta az **ábrázoló geometriát**, majd
- **Poncelet** újra fölfedezte a **PROJEKTÍV GEOMETRIA** alapjait, majd
- **Charles** megtalálja Desargues könyvének kéziratos másolatát.



Szavakban

Ha egy húrhatszög szemközti oldalait meghosszabbítjuk míg metszik egymást, akkor a kapott három metszéspont egy egyenesre illeszkedik.

Írjunk egy $ABCDEF$ hatszöget valamely körbe, és vetítsük a kapott alakzatot egy O pontból. Így az $A'B'C'D'E'F'$ hatszöget kapjuk, amely egy kúpszeletbe van írva. Hosszabbítsuk meg az eredeti hatszög szemközti oldalait addig, míg metszik egymást. Tudjuk, hogy ezek egy p egyenesre illeszkednek. Legyenek a metszéspontok rendre P, Q, R . Ha most a vetület hatszöggel tesszük meg ugyanezt, akkor a P', Q', R' metszéspontokat kapjuk, amelyek szintén egy egyenesre, q , illeszkednek. Ezen q egyenes és a P', Q', R' pontok a p egyenes és a P, Q, R pontok vetülete az O pontból.

Megjegyzés. Kör helyett tetszőleges kúpszeletre is igaz a tétel.

