

IGAZ-E AMI BIZONYÍTHATÓ, BIZONYÍTHATÓ-E AMI IGAZ.

AZ IGAZSÁG ELVESZTÉSE, MAJD KERESÉSE A XIX-XX.
SZÁZADBAN.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2021. május 17.

A XIX. Század matematikája: Algebra 1.

1. Megjelennek a nem-kommutatív műveletek,
 - 1.1 mátrixok,
 - 1.2 kvaterniók.

Definíció. $Q = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, ahol

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij &= k, \quad jk = i, \quad ki = j \\ xy &= -yx, \quad x \neq y, \quad x, y \in \{i, j, k\}. \end{aligned}$$

ferdetest (nem kommutatív test).

A XIX. Század matematikája: Algebra 2.

1. n dimenziós lineáris terek.
2. Galois: az egyenletek megoldhatóságának vizsgálata,
 - 2.1 testbővítések: cél, az együtthatók generálta testnek a gyököket tartalmazó legszűkebb bővítésének leírása;
 - 2.2 permutációcsoportok, a „helyettesítések” csoportja,
 - 2.3 a kívánt bővítés létezésének feltétele csoportelméleti kérdés,
 - 2.4 véges testek.
3. A geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete.
 - 3.1 Gauss: a szabályos n -szög pontosan akkor szerkeszthető meg, ha $n = 2^k p_1 \dots p_m$, ahol $k \geq 0$, $p_1, \dots, p_m$ különböző Fermat-prímek ($2^{2^n} + 1$). Ha $m = 0$, akkor $k \geq 2$.
 - 3.2 Minden szerkeszthető komplex szám algebrai.
4. A csoport absztrakt fogalma. Az első struktúrátétel 1882 (a véges Abel-csoportok alaptétele).
5. Test fölötti algebrák: Frobenius lezárja a számfogalom bővítését.

A XIX. Század matematikája: Számelmélet 1.

1. Analitikus vizsgálatok.
2. Vizsgálták a prímszámok eloszlását, empirikus becslések.
3. Legyen $\pi(x) = k$, ha az $x \in \mathbb{R}$ -nél nem nagyobb prímszámok száma k .
 - 3.1 Gauss sejtése: $\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$,
 - 3.2 Csebisev tétele (1854): léteznek olyan a, b pozitív konstansok, hogy

$$a \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq b \frac{x}{\log x}.$$
 minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ -re
 - 3.3 Hadamard és de la Vallée-Poussin (1896): a „Nagy Prímszámtétel”.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

A XIX. Század matematikája: Számelmélet 2.

1. Létezik transzcendens szám, azaz olyan komplex szám, amely nem lehet gyöke egyetlen nemzéró $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak sem.
2. Euler sejtése: e, π , valamint a logaritmus- és a trigonometrikus függvények értékei a legtöbb helyen transzcendensek.
3. Liouville (1844): a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

szám transzcendens.

4. Hermite (1873): Az e szám transzcendens.
5. Lindemann (1882): A π szám transzcendens.
6. Következmény: A „körnégyszögesítés” problémája nem oldható meg.
7. Nyitott kérdés, hogy $e + \pi$ algebrai, vagy transzcendens, míg az $e + i\pi$ esete triviális.

A XIX. Század matematikája: Geometria.

1. Fölfedezik a nem-euklideszi geometriákat:
 - 1.1 hiperbolikus geometria: Bolyai és Lobacsevszkij,
 - 1.2 elliptikus geometriák és egységes elmélet: B. Riemann.
2. Megjelenik az ábrázoló geometria,
3. újra fölfedezik a projektív geometriát.
4. n -dimenziós analitikus geometria.

A XIX. Század matematikája: Függvénytan.

1. Vizsgálatok végtelen sorokkal kapcsolatban: konvergencia-problémák.
 - 1.1 Hatványsorok,
 - 1.2 trigonometrikus sorok (Fourier- sorok).
2. Jelentősen bővült a differenciálegyenletek elmélete,
 - 2.1 közönséges differenciálegyenletek $\rightarrow$ mechanikai alkalmazások,
 - 2.2 parciális differenciálegyenletek $\rightarrow$ elektrodinamika (Maxwell-egyenletek).
3. Teljesen új diszciplínaként megjelenik a komplex függvénytan, amely az alkalmazások szempontjából szinte azonnal jelentős lesz.

Súlyos elvi kérdések.

A bizonyítás, az igazság.

1. I.e. 100 körülől fokozatosan megszűnik az axiómatikus tárgyalás, eltűnnek a szigorú bizonyítások.
2. A matematika szinte teljesen empirikus tudománnyá alakul.
3. **A XIX. SZÁZAD ELSŐ HARMADÁTÓL SÚLYOS MEGOLDATLAN PROBLÉMÁK.**
 - 3.1 Mit jelent az „igazsága” egy nem-kommutatív művelettel kapcsolatos állításnak?
 - 3.2 Egy állításnak pl. az 5 dimenziós térre vonatkozóan?
 - 3.3 Melyik geometria írja le a fizikai teret?
 - 3.4 A derivált és az integrál valami komoly matematikai fogalom, vagy egyszerűen rövidített írásmód?
4. Valójában mi a „konvergencia”?
5. A Fourier-sorok problémája.

Súlyos elvi kérdések.

Gauss egy véleménye

Az a legmélyebb meggyőződése, hogy a tér fogalma egy teljesen egyedi helyet foglal el a priori ismereteink között, lényegesen különbözik például az aritmetika által elfoglalttól.

... a szám fogalma gondolkodásunkból ered, míg a téré azon kívül van. Így annak törvényeit nem tudjuk a priori teljesen előhívni.

Néhány „zűrös” fogalom.

- Transzcendens szám, valós szám,
- folytonosság, a Bolzano–Darboux tulajdonság,
- konvergencia, sorfejtések.

Egy alapvető kérdés.

Mit jelent az, hogy „egy állítást bebizonyítottunk?”

IGAZ-E AMIT BIZONYÍTOTTUNK, BIZONYÍTHATÓ-E AMI IGAZ?

A bizonyítás kérdése.

1. A két fő kérdés:
 - 1.1 **MI AZ, HOGY BIZONYÍTÁS?**, és egyáltalán
 - 1.2 **MI A MATEMATIKA?**
2. Térjünk-e vissza a klasszikus görög matematika hagyományaihoz, vagy keressünk új utakat?
3. Világos, hogy újra kell éleszteni az arisztotelészi logikát, de **mi az elsődleges: a matematika vagy a logika.**

További jelentős változások a XIX. században.

- Egyre több folyóirat közölt matematikai cikkeket, a század végére kb. 500. A legtöbb megszűnt, de az 1826-ban L. Crelle által alapított *Journal für Rheine und Angewandte Mathematik* a mai napig létezik.
- Egy nem csak öröndetes: a matematikai diszciplinák annyira szétváltak, hogy a közlemények egyre inkább egy szűk csoportnak szóltak.
- Sok új tudományos központ alakult A hagyományos angol, francia és német egyetemek mellett.
- Az európai akadémiák „tudós társaságok” voltak, üléseknek, tudományos vitáknak adtak helyet.
- Az 1863-ban alapított National Academy of Sciences (USA) már „tudományos műhely” volt, amely folyóiratot adott ki, kutatásokat támogatott, intézeteket alapított.

Az igazság keresése 1.

- Vizsgáljuk meg a régi görögök axiómatikus matematikáját.
- Ha van egy „félíg-meddig” kidolgozott elméletünk, akkor hogyan lehet azt axiomatizálni?
 - Rendezzük a fogalmakat: eljutunk elméletünk alapfogalmaihoz.
 - Rendezzük a már „bizonyított” tételeinket: eljutunk az axiómákhoz.
 - DE a bizonyítás mibenléte, a „következmény fogalma” még tisztázatlan, valahonnan importálni kell: Arisztotelész.
 - Kérdés: hogyan alkalmazhatjuk mindezt a „modern” a „mai” matematikára?
- KÍNOS kérdések:
 - Ellentmondás-mentes-e rendszerünk?
 - Azaz, **tartalmaz-e olyan tételt/állítást, hogy az meg a tagadása is bizonyítható** a rendszeren belül.
Ha igen, mit sem ér a rendszer.

Az igazság keresése 2.

1. kísérlet: G. Cantor halmazelmélete.

1. Részleges visszatérés a görögök axiómatikus módszeréhez.
 - 1.1 Az alap a „halmaz” fogalma, amely egy **definiálatlan fogalom**, alapfogalom..
 - 1.2 Axiómatikus alapozás kell, de kérdés, hogy ellentmondásmentes-e az adott axiómarendszer.
 - 1.3 Első lépés: a halmazelmélet axiomatizálása.
2. A fogadtatás: teljes elutasítás, „antinómiák” tömege.
 - 2.1 J. Richard: „A 100, vagy kevesebb betűvel meg nem adható számok halmaza.”
 - 2.2 B. Russel: „A tartalmazkodó, és a nem-tartalmazkodó halmazok.” „A falu borbélya.”
3. Cantor válasza: „csak” apróbb módosítások kellenek.
4. A matematika és a logika még nem merül föl.

Az igazság keresése 3.

2. kísérlet: G. Frege **logiczismusa**.

1. A logika elsődlegességét hirdeti a matematikával szemben: a matematika a logika egy fejezete.
2. Frege: Logika, matematika, szemantika.
3. Whitehead-Russel: Principia Mathematica.
4. Eltűnik az alkalmazott matematika, az alkalmazások korrekt lehetősége.
5. Zsákutca.

Az igazság keresése 4.

3. kísérlet: **konstruktivizmus (intuicionizmus)**.

1. A matematika az elsődleges a logikával szemben.
2. A megalapító: Kronecker német matematikus az 1870-es években.
3. Főbb érvei a halmazelméleti megalapozás ellen (Weierstrass, az egzisztencia bizonyítások, irracionálisok).
4. Modern intuicionizmus: Brouwer
5. A. Weyl véleménye: „Ha a logika a matematika higiéniája, akkor nem lehet táplálékforrása.” (1950)
6. A N. Bourbaki csoport tevékenysége a 20-as évektől.
7. Magát számolta föl a XX. század második felében: saját nekrológ 1976-ban.

4. kísérlet: Hilbert bizonyításelmélete, ill. a metamatematika.

1. Az axiómatikus módszer a követendő.
2. meg kell különböztetni a matematikai elméleteken belüli állításokat azoktól, amelyek valamely matematikai elméletről szólnak.
3. Például.
 - 3.1 Az, hogy „az egyszerű Abel-csoportok prímrendűek” matematikai állítás,
 - 3.2 míg az, hogy „az elemi aritmetika ellentmondás-mentes” egy állítás valamely matematikai elméletéről.
 - 3.3 Az utóbbiak ún. **metamatematikai állítások**.
4. A metamatematikai állítások bizonyításában csak olyan elvek, eljárások engedhetők meg, amelyekben „mindenki egyetért”, tehát pl. a véges jellegű módszerek.

Az igazság keresése 6. Axiómatikus elméletek.

Nem formális axiómatikus elméletek.

- Hasonlóak ahhoz, amit Euklidesz könyvében olvashatunk.
- Az ilyen elmélet definiálatlan (alap-) és definiált fogalmakat használ.
- Kiindulási állításokat fogalmaz meg, amelyeket nem bizonyít, zömmel az alapfogalmakra vonatkozóak. Ezek az elmélet **axiómái**.
- Az elmélet **tételei** olyan állítások, amelyekben az alap- és a definiált fogalmakról mondanak valamit. A tételek formalizálhatók.
- Ezeket akkor fogadja el igaznak, ha az axiómák következményei valamely — az elméleten kívül megfogalmazott — következmény-fogalom értelmében.

Az igazság keresése 7. Axiómatikus elméletek.

Formális axiómatikus elméletek 1.

- A formalizálás magasabb szintű.
- A következményfogalom is része az elméletnek: levezethetőség.
- Eldönthetőség: megjelenik az **ALGORITMUS** fogalma, ami egy NEM MATEMATIKAI fogalom (nem definiálható szigorúan).

Metamatematika 1.

Formális axiómatikus elméletek 2.

- Axiómarendszer (axiómatikus elmélet) ellentmondás-mentessége, konzisztenciája.
- Axiómatikus elmélet teljessége: egy axiómatikus elmélet **teljes**, ha minden állítása (formulája) vagy annak tagadása (negáltja) bizonyítható (tétel).
- A konzisztencia „általánosan elfogadott” kritériuma: a véges modell létezése.
- Relatív konzisztenciák.

Metamatika 2.

Néhány pozitív eredmény.

1. Konzisztens elméletek.
 - 1.1 Ítéletkalkulus.
 - 1.2 Az elsőrendű függvénykalkulus.
 - 1.3 Boole-algebrák.
2. Bizonytalan: az elemi aritmetika.

Egy relatív konzisztencia sorozat.

Hiperbolikus geometria $\rightarrow$ euklideszi geometria $\rightarrow$ a valós számok aritmetikája $\rightarrow$ némi halmazelmélet (ez „biztonságos”) és az elemi aritmetika.

Eldöntésprobléma, eldönthető elméletek.

Az igazság keresése 9. Metamatika 3.

Két negatív eredmény.

1. **K. Gödel 1. tétele:** *Ha valamely elsőrendű elmélet elegendően gazdag, axiómáinak halmaza eldönthető (azaz axiomatikus elmélet) akkor bővítésével nem konstruálható olyan elegendően gazdag konzisztens elsőrendű elmélet amelyben az eredeti elmélet minden igaz állítása bizonyítható.*
2. **K. Gödel 2. tétele:** *Egy elegendően gazdag konzisztens elsőrendű elmélet konzisztenciája és teljessége nem bizonyítható olyan módszerekkel, amelyek tükröztethetők az adott elméletben.*