

A HEURISZTIKUS SEJTÉS ÉS A SZIGORÚ BIZONYÍTÁS EGYÜTTES MEGJELENÉSE AZ ÓKORI GÖRÖGÖKNÉL¹

KLUKOVITS LAJOS

Azon fogalmak, módszerek és eredmények nélkül, amelyeket a korábbi generációk — visszamenve egészen az ókori görögökig — alkottak, nem érthetjük meg az utóbbi ötven év matematikájának céljait, eredményeit. (HERMANN WEYL)

1. Bevezetés.

A matematika kezdetben tisztán empirikus tevékenység volt, és — bár a nagy folyammenti kultúrák matematikája már rendszerezett ismeretanyagnak tekinthető — egészen a görög klasszikus korig² tisztán empirikus tudománynak tekinthető. Kizárólag konkrét numerikus problémákat oldottak meg, de egyúttal törekedtek a megoldások „receptszerű” leírására, hogy annak alapján további hasonló feladatokat is meg lehessen oldani. Nem állítunk túl merészet akkor, ha kijelentjük, hogy — a mai szóhasználattal — algoritmusok megadására is törekedtek. Jól példázza ezt a nevezetes Rhind Papiirusz³, amely lényegében az írnokok számára készült tan- és kézikönyv lehetett. Hasonló célokat szolgálhatott a Kr.e. II. évezredi mezopotámiai agyagtáblák nagy része is.

A görög klasszikus korban azonban radikális változás állt be, a matematika tisztán deduktív tudománnyá vált. Ezen radikális változás egy lehetséges okát Szabó Árpád az eleai filozófiában látja [6], s ez a vélekedés a szerző számára teljesen elfogadható.

A klasszikus kor görög matematikusai írásaiból szinte teljesen eltűntek a gyakorlati kérdések, csak elméleti jellegű problémák foglalkoztatták e tudomány művelőit, akik szinte kivétel nélkül neves filozófusok is voltak. A kor vége felé már csak tisztán elméleti tételeket találunk műveikben, s azokat definíciókra alapozva, posztulátumokra, axiómákra, valamint már igazolt tételekre hivatkozva szigorúan bebizonyították. Írásaikból teljesen eltűntek a heurisztikus gondolatmenetek, csak azt olvashatjuk, hogy mit állítanak és azt hogyan igazolják. Semmi sem derül ki abból az útból, amelyen eljutottak az állításokhoz.

A klasszikus kort követően, a hellenizmus korában ismét megjelennek a heurisztikus gondolatmenetek is, olykor előzetesen megfogalmazzák a sejtéseket, s utána azokat — a klasszikus korban megszokott szigorúsággal — bebizonyítják. Az alábbiakban ezt a változást mutatjuk meg, amely legszebben talán Archimédész műveiből tárul elénk.

¹ Ezen dolgozat [4] bővített változata, amely az azt közlő folyóirat szerkesztőinek javaslatára és engedélyével készült.

² A Kr.e. VI. század utolsó harmadától a IV. század végéig, a makedon hódítások kiteljesedéséig tartó kor.

³ A minden bizonnyal az Egyiptomi Középbirodalom korában összeállított, 84 problémát tartalmazó, tekercs Hükszosz korbéli (Kr.e. 1750 körüli) másolatban maradt fenn.

2. Egy gyöngyszem az ókori folyammenti kultúrák empirikus matematikájából.

Az Óbabiloni Birodalom matematikusai briliáns módon oldottak meg másodfokú egyenletekre vezető feladatokat. Mindig konkrét problémákkal foglalkoztak, de eljárásaik, mint már utaltunk rá, alkalmasak voltak arra is, hogy azt követve más, hasonló feladatokat oldjanak meg. Igen fejlett aritmetikájuk kialakulásában döntő szerepe lehetett a sumer eredetű, de általuk jelentősen továbbfejlesztett helyiértékes számírásnak, amelynek alapja a 60 volt. Eredeti — mindössze két jelet használó — számírásukra e helyütt nem térünk ki, hanem a Neugebauer által bevezetett tízes számrendszerbeli jegyeket/számokat alkalmazó átírást fogjuk használni⁴. Nevezetesen a

12, 0, 56; 13, 5 jelsorozat a $12 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 56 + 13 \cdot 60^{-1} + 5 \cdot 60^{-2}$ számot jelöli.

Illusztráló példaként tekintsük a következő problémát, amely egy Szenkereh mellett talált agyagtáblán (AO 8862) olvasható [7]. A kissé töredékes tábla kiegészítéseit szögletes zárójelbe tettük.

Hosszúság és szélesség. *A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, és így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadtam a területhez, és 3,3[-at kaptam]. Hosszúság és szélesség összeadva pedig 27. Mi a hosszúság, szélesség, terület?*

27	3, 3	az összegek
15		a hosszúság
12		a szélesség
3, 0		a terület

Eljárásod ez legyen: 27-et, a hosszúság és a szélesség összegét 3,3-hoz add hozzá; 3,30 [az eredmény]. 2-t a 27-hez add hozzá; 29 [az eredmény]. 29-ből letöröd a felét; 14; 30-szor 14; 30 [az] 3,30; 15. Levonsz 3,30-at 3,30; 15-ből; 0; 15 a különbség. 0; 15 négyzetgyöke 0; 30. Az első 14; 30-hoz add hozzá a 0; 30-at: a hosszúság 15. 0; 30-at a második 14; 30-ból kivonsz: a szélesség 14. Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál, 14-ből, a szélességből levonod: 12 a végleges szélesség. A 15 hosszúságot és a 12 szélességet összeszoroztam. 15-szor 12 [az] 3,0 [ennyi a] terület.

A 15 hosszúság a 12 szélességen mennyivel nyúlik túl? 3[-mal] haladja meg. 3-at a 3,0-hoz, a területhez adj hozzá: 3,3[-at kapsz].

A megoldás elemzése. Világos, hogy ha a hosszúságot és a szélességet x, y jelöli, akkor az

$$\begin{aligned} xy + x - y &= 3,3 \\ x + y &= 27 \end{aligned}$$

egyenletrendszer kellene megoldani. A számolás második lépéséből látszik, hogy az y szélesség helyett egy új $y' = y + 2$ szélességet vezet be („összeadta” a két egyenletet), és így az

$$\begin{aligned} xy' &= 3,30 \\ x + y' &= 29 \end{aligned}$$

⁴ Az olvasó ezt megtalálhatja például van der Waerden könyveiben [7], [8]

egyenletrendszert oldja meg a következő eljárással. (A jobb áttekinthetőség kedvéért egymás mellett szerepeltetjük az eredeti szöveges megoldás numerikus lépéseit és a mai szimbolikus számolást, az egyenletrendszer megoldását.)

$$27 + 3, 3 = 3, 30$$

$$2 + 27 = 29$$

$$29 : 2 = 14; 30$$

$$14; 30 \times 14; 30 = 3, 30; 15$$

$$3, 30; 15 - 3, 30 = 0; 15$$

$$\sqrt{0; 15} = 0; 30$$

$$14; 30 + 0; 30 = 15$$

$$14; 30 - 0; 30 = 14$$

$$14 - 2 = 12$$

$$xy + 2x = x(y + 2) = xy' = 3, 30$$

$$x + y' = 29$$

$$\frac{x + y'}{2} = 14; 30$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 = 3, 30; 15$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy' = 0; 15$$

$$\sqrt{\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy'} = \frac{x - y'}{2} = 0; 30$$

$$\frac{x + y'}{2} + \frac{x - y'}{2} = x = 15$$

$$\frac{x + y'}{2} - \frac{x - y'}{2} = y' = 14$$

$$y' - 2 = y = 12$$

Összegezve. A kéthatározatlanos

$$xy = P$$

$$x + y = a$$

alakú egyenletrendszert úgy oldották meg, hogy bevezettek egy új w határozatlant (a két eredeti határozatlan számtani közepétől való eltérést), amelynek révén egyhatározatlanossá vált a probléma:

$$x = \frac{1}{2}a + w$$

$$y = \frac{1}{2}a - w, \quad w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P}.$$

A megoldásból sejthető, hogy egyrészt ismerték az

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2}$$

azonosságokat,⁵ amelyre bizonyítékul szolgálnak további hasonló feladatok is, másrészt tudniuk kellett négyzetgyököt vonni. A feladatok megoldásánál ugyan táblázatokat

⁵ Ezen azonosságokat először Euklidész bizonyította be geometriai formában, az *Elemek* II.4. és II.13. Tételeként. [2]

használtak (erre utalnak a megoldások leírásai), de ezeket is egyszer meg kellett szerkeszteni, el kellett végezni a számolásokat. Erre is volt hatékony eljárásuk.

Vegyük észre, hogy a megoldás leírása ugyan olyan, hogy azt más hasonló problémáknál is lehet használni (azaz „receptszerű”), de szó sincs arról, hogy valamiféle általános eljárást, pláne formulát adnának meg, és nem is indokolták meg, hogy miért így számoltak. Azonban szinte minden esetben ellenőrizték a megoldást. Nyoma sincs tehát valamiféle általános elmélet kidolgozására való törekvésnek. Ugyancsak rejtve marad, hogy hogyan találtak rá eljárásukra.

3. A görög klasszikus kor tisztán deduktív matematikája.

A Kr.e. V. - IV. század matematikájának nagy részét zseniálisan foglalta egységes keretbe Euklidész az *Elemek* c. művében [2]. Ebben a könyvben semmi számolás nincs. Definíciókat, posztulátumokat és axiómákat ad meg, majd rengeteg tételt bizonyít nagy szigorúsággal. Nem találunk azonban egyetlen sort sem arról, hogy hogyan jöttek rá a bizonyítandó összefüggésekre, tételekre, miért éppen úgy bizonyítják be állításaikat. Nem foglalkoznak gyakorlati problémákkal, csak absztrakt fogalmakkal. Példaként álljon itt néhány definíció és tétel e könyvből, kettő bizonyításával együtt, amelyeket a jobb áttekinthetőség kedvéért nem az eredeti geometriai, hanem a tartalmat kifejező aritmetikai nyelvezeten adunk meg. Az alábbiakban a római számok a könyvekre utalnak, míg az azokat követő arab számok a definíciók, ill. a tételek könyvön belüli sorszámai az idézett kiadásban.

VII. 1. Definíció. Az *egység* az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk.

VII. 2. Definíció. A *szám* az egységekből összetevődő sokaság.⁶

VII. 3. Definíció. Egy kisebb szám egy nagyobbban hányada (része), ha osztja a nagyobbat.⁷

VII. 12. Definíció. *Prímszám*, amelyik csak az egységgel osztható.

VII. 14. Definíció. *Összetett* az a szám, amelyiket valamely szám oszt.

VII. 23. Definíció. Egy szám *tökéletes*, ha egyenlő osztói (részei) összegével.⁸

IX. 20. Tétel. *Prímszámok bármely adott sokaságánál van több.*

Bizonyítás. Legyenek az adott prímszámok a, b és c . Azt állítom, hogy több prímszám van, mint a, b és c . Vegyük ugyanis a, b és c legkisebb közös többszörösét, ami — a VII. 34. és 35. Tételek szerint — abc és tekintsük az $d = abc + 1 = e + 1$ számot. Ez vagy prímszám, vagy összetett szám. Legyen először prím. Találtunk tehát az a, b, c számoknál több prímet, ezeket és még d -t.

Ne legyen most d prím. Ekkor osztja valamely prímszám (VII. 31. Tétel). Ossa a, b, c mindegyike nem osztja d -t, mert akkor d lenne az a, b, c közös többszöröse, ami lehetetlen. Tehát d osztója valamely p prímszámnak, amely nem a, b, c egyikével sem azonos. Tehát p új prímszám, amely nagyobb, mint a, b, c mindegyike.

⁶ Azaz a szám egynél nagyobb természetes szám a mai szóhasználattal. Az egység tehát nem szám.

⁷ Világos, hogy itt mai szóhasználattal az osztó fogalmáról van szó. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy Euklidésznél a „hányad” mindig szám, azaz soha nem 1. Így az 1 minden számnak osztója, de maga a szám már nem osztó, hiszen nem számszor, hanem egyszer (az egység!) van meg benne.

⁸ Lásd az előző lábjegyzetet.

hogy az a, b és c osztják e -t, továbbá g is osztja e -t (ugyanis a, b és c az összes prím). Viszont g d -t is osztja, tehát a maradék egységet is osztja g (itt az oszthatóság egy elemi tulajdonságát használja, amit — két másikkal egyetemben — sohasem fogalmaz meg, de ismertnek tételezi föl), noha szám, ami ellentmondás, g tehát nem azonos az a, b, c számok egyikével sem. A feltétel szerint prím, tehát találtunk az adott a, b, c prímeknél több prímet, a -t, b -t, c -t és g -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

Vegyük észre egyrészt, hogy az iménti bizonyítás lényegében megegyezik azzal, amelyet az olvasó elemi számelméleti tanulmányaiban megismert, csak ott a föltételben szereplő „összes” prímszám a $p_1, p_2, \dots, p_k$. Euklidész bizonyítása lényegében csak azt használja ki, hogy abból a föltételből, hogy csak véges sok prímszám létezik, szükségképp ellentmondásra jutunk. Tehát tulajdonképpen azt igazolja, hogy végtelen sok prímszám van, de ezt így nem fogalmazza meg, hiszen az ő világa véges.

IX. 36. Tétel. Ha az egységtől indulva kétszeres arányban mértani sorozatot alkotunk addig, amíg az összeg prímszám nem lesz, és ezt megszorozzuk az utolsó taggal, akkor tökéletes számot kapunk.

X. 1. Tétel. Ha adva van két nem egyenlő mennyiség és a nagyobbikból levonunk a felénél többet, és a maradékból ismét a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, amely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

Bizonyítás. Legyen a két nem egyenlő mennyiség a, c és $a > c$. Az V.4. Definíció — mennyiségek egymáshoz viszonyított arányáról akkor beszélünk, ha az egyik többszöröse meghaladja a másikat — értelmében c -nek van olyan többszöröse, amely meghaladja a -t. Legyen

$$dc > a.$$

(Megjegyeztük, hogy Euklidész eredeti bizonyításában $d = 3$, amit úgy használ, hogy az nem szorítja meg az általánosságot.) Adjuk meg a következő $e_1, \dots, e_{d-1}$ mennyiségeket:

$$e_1 > \frac{a}{2}, e_2 > \frac{a - e_1}{2}, e_3 > \frac{a - (e_1 + e_2)}{2}, \dots, e_{d-1} > \frac{a - (e_1 + \dots + e_{d-2})}{2}.$$

Az a mennyiségből ezután levonjuk e_1 -et, majd az $a - e_1$ mennyiségből az e_2 -t, az $a - (e_1 + e_2)$ -ből az e_3 -at és így tovább, összesen $d - 1$ számú lépést teszünk. Az $e_1, \dots, e_{d-1}$ mennyiségeket úgy határozzuk meg, hogy a levonások mindig elvégezhetők legyenek, azaz pozitív mennyiség maradjon minden egyes lépés után.

Tekintsük most a dc mennyiségeket, és abból is vonjunk le $d - 1$ számú lépésben mindig c -t. Ez esetben mindig az adott (kapott) mennyiség felénél kevesebbet vonunk le. Hasonlítsuk most össze a két eljárásunkat. Mivel $dc > a$,

$$\begin{aligned} dc - c &= (d - 1)c > a - e_1 \\ (d - 1)c - c &= (d - 2)c > a - (e_1 + e_2) \\ &\vdots \\ (d - (d - 2))c - c &= c > a - (e_1 + \dots + e_{d-1}). \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség éppen a bizonyítandó, hiszen

$$(d - (d - 2))c - c = c > a - (e_1 + \dots + e_{d-1}) = (\dots((a - e_1) - e_2) - \dots - e_{d-2}) - e_{d-1}.$$

Megjegyzés. Euklidésznél a fönti bizonyításban $d = 3$, de gondolatmenete megegyezik az általunk leírt általános esetnél alkalmazottal.

XII. 2. Tétel. A körök (területei) úgy aránylanak egymáshoz, mint átmérőik négyzetei.

A felsorolt tételek közül az elsőnek említett bizonyítása indirekt („reductio ad absurdum”), míg a másodiké és a harmadiké direkt (szintetikus). Az egyes lépések világosak, látható, hogy miért azokat alkalmazza. Nincs ugyanakkor semmiféle utalás arra, hogy hogyan jött rá a bizonyítandó állításokra. Azon „technikai” föltételezése, hogy a bizonyításokban a „véges sok” 3, nem befolyásolja állításának általános érvényét, azok tetszőleges véges sok tagú sorozatra, illetve d számra ugyanúgy végezhető el.

A negyedik említett tétel, a körök területére vonatkozó állítás, igazolása a kizárt harmadik elvén nyugszik (ugyanúgy, mint az indirekt bizonyítás), megmutatja, hogy az arány sem kisebb, sem nagyobb nem lehet az állítotttnál.

4. A hellén kor matematikájának néhány jellegzetes vonása.

A Nagy Sándor hódításaival kezdődő, a Kr.e. III. századtól az i.sz. VI. századig terjedő időszakot a „hellénizmus” korának is szokás nevezni tudománytörténeti (filozófiai) szempontból.⁹ Ez az ókori görög kultúra széleskörű elterjedésének időszaka, amikor Alexandria válik a művelt világ központjává, a tudományok fővárosává. Tovább élnek a klasszikus kor hagyományai, de jelentős bővülésük, bizonyos mértékű átalakulásuk is megfigyelhető. Hosszú ideig megmarad a matematikában a szigorú bizonyítás követelménye, de már nemcsak absztrakt kérdésekkel foglalkoznak. A kor legnagyobb hatású matematikusa Archimédész volt, akit az antikvitás három legnagyobb matematikusa egyikének tartanak. A másik kettő a klasszikus korban élt Eudoxos és Theaitetosz, de Archimédész volt „az első az egyenlők között”.

Ő nem írt nagy, enciklopédikus művet, csak rövid traktátusokat. Ezek az alkotások kivétel nélkül a matematikai írásművészet gyöngyszemei: a problémákat fokozatosan bontja ki, a tételeket mesterien rendezi egymás után, szigorú logikai sorrendben követik egymást. Az olvasó csak tiszteletteljes bámulattal veheti azokat kézbe. Nagyságát már az ókorban is elismerték, hiszen Plutarchosz¹⁰ a Párhuzamos életrajzok [5] Marcellus fejezetében így ír:

A geometria legnehezebb és legbonyolultabb kérdéseit is a lehető legegyszerűbb és legvilágosabb tételekbe foglalva oldja meg. Azt az utat azonban, amelyeken eredményeihez eljutott, számos esetben fátyol takarja.

Világos ugyanis, hogy a tételekre nem a leírt sorrendben, nem a leírt lépések során, lehetett rájönni.

J. Wallis (XVII. századi angol matematikus) véleménye szerint Archimédész

...mintegy szándékosan rejtette el kutatásai nyomát, mintha sajnálná az utókortól a felfedezési módszerei titkát, de mégis arra akarná kényszeríteni, hogy

⁹ Használatos ezen kormegjelölés egy szűkebb értelmezése is, amely szerint csak Kr.e. 30-ig, Egyiptom bukásáig (római uralom alá kerüléséig) tartott.

¹⁰ Római író, aki i. sz. 46-120 között élt. Athénban tanult, majd Rómában filozófiát tanított és Hadriánusz nevelője volt, aki császárrá válása után Görögország prokurátovává nevezte ki. Említett művén kívül 60 esszéje és egy aforizmagyűjteménye maradt fenn.

eredményeit elismerje.

Másutt így írt:

...nemcsak Archimédész, hanem a régiek majdnem mind úgy elrejtették az utókor elől analitikus módszereiket (noha világos, hogy voltak ilyen módszerek), hogy az újabb kutatók kényelmesebbnek találták új analízist feltalálni, mint a régit kitalálni.

Ezeket a véleményeket azonban érdemes némi kétkedéssel fogadni. Erre jó alapot ad az alábbi részlet Archimédész Erathosztenészhez írott egyik leveléből [1].

Mint már említettem, tudom, hogy szorgalmas és kiváló tanára vagy a filozófiának, és nagyon érdeklődsz a matematikai vizsgálatok mikéntje iránt, úgy gondolom hasznos összeállítanom és leírnom e könyvben néhány speciális módszert, amelynek révén te is képes leszel bizonyos matematikai problémák fölismerésére a mechanika segítségével. Úgy vélem, hogy ez nem kevésbé hasznos, mint ugyanezen tételek bizonyításának megtalálása. Számos dolog ugyanis először mechanikai módszerek révén lett világos számomra.

Ezeket később geometriailag igazoltam, mert az előbb említett módszerek nem nyújtanak valódi bizonyítást. Egyszerűbb azonban a bizonyítást megtalálni akkor, ha korábban e módszerrel bizonyos tudásra teszünk szert, mintha ezen előzetes tudás nélkül próbálkoznánk.

Most leírom neked a módszert, egyrészt azért, mert már korábban beszéltem róla, de sokan úgy tekintették azt, mint haszontalan beszéd (itt valószínűleg arra céloz, hogy már vázolta e módszert a Parabola Kvadraturája előszavában, utalva arra, hogy az eredményt előbb mechanikai úton sejtette meg), másrészt pedig azért, mert igen hasznosnak bizonyult a matematika számára. Tulajdonképpen hangsúlyozni akarom, lesznek olyanok a jelenlegi és a jövő generációkban, akik e módszer segítségével képesek lesznek más tételeket megtalálni, olyanokat, amelyek eddig nem kerültek látókörükbe.

Most előbb leírjuk azt, ami először lett világos nekünk a mechanikai módszerrel, nevezetesen azt, hogy bármely parabolaszélet egyharmadával nagyobb az ugyanolyan alapú és magasságú háromszögnél, majd mindazt, ami ennek révén világosodott meg számunkra. A könyv végén megadjuk a tételek geometriai bizonyítását, azon állításokét, amelyeket már korábban elküldtünk neked.

Ezen megjegyzések olyan ismeretekre utalnak, amelyek egyrészt olvashatók Plutarchosz Párhuzamos életrajzok már említett fejezetében, másrészt a klasszikus és a hellén kor matematikája némileg más jellegére mutatnak rá, amiről szintén olvashatunk a Plutarchosznál [5]:

A napjainkban már annyira kedvelt és közismert mechanikát Eudoxos és Archüasz alapították meg első kísérleteikkel, amelyeknek az volt a célja, hogy finom megfigyelésekkel gazdagítsák a geometriát és az érzékek által felfogható gépezetekkel hajtsák végre azokat a feladatokat, amelyeket szóval és ábrával nem lehet bizonyítani és igazolni. Így például mindkét filozófus a két középarányos vonalról szóló problémát, amely elengedhetetlenül szükséges sok geometriai tétel megoldásához, mechanikai szerkezetek elkészítéséhez alkalmazta oly módon, hogy görbe vonalak és metszetek felhasználásával bizonyos

műszereket szerkesztett. De Platon felháborodott ezen, és szemrehányást tett nekik, hogy megsemmisítik és elrontják, ami jó van a geometriában azáltal, hogy az emberek figyelmét a testetlen és elvont tárgyakról az érzékelhető világra fordítják, és ismét a testi dolgokkal foglalkoznak, ami sok és fárasztó fizikai munkát igényel; így a mechanika, amellyel a filozófia hosszú ideig nem törődött, elkülönült a geometriától, és a hadművészet szolgálatába állott.

Az előbbi idézetek arra is utalnak, hogy megváltozott a kor tudósainak közeledése a matematikához. Ennek legfontosabb jele az, hogy nemcsak tételeket fogalmaztak meg, majd bizonyítottak be a klasszikus korban megszokott szigorúsággal, hanem gyakran leírták azokat a heurisztikus gondolatmeneteket is, amelyeken eljutottak a bizonyítandó állításokhoz. Ezt jól példázza az előbb említett levélrészlet, amelyben Archimédész Erathosztenésznek vázolta egyik fölfedezéséhez vezető utat.

Emellett az is lényeges — bár talán nem ugyanilyen fontos — különbség, hogy e kor matematikusai már számoltak is, túltéve magukat Platon (ugyancsak említett) „dörgedelmein”. Példaként említjük, hogy a körök területével kapcsolatban Archimédész számára nemcsak Euklidész tétele volt fontos, hanem az is, hogy közelítést adjon az ott említett arányossági tényezőre. Nevezetesen Euklidész szerint bármely r sugarú kör területe kr^2 , ahol a k arányossági tényezővel kapcsolatban számára csak az volt fontos, hogy az általános, bármely körre azonos. Archimédész azonban számos közelítést adott rá, s „mellesleg” azt is megmutatta, hogy a kerületek esetén is ugyanez az arányossági tényező alkalmazható. Ha ezt szokás szerint π jelöli, akkor például

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

amit ő a körbe és a kör köré írt szabályos sokszögek segítségével kapott meg.

4. Archimédész egyik szép heurisztikus gondolatmenete.

Sajnos az a traktátus, amelyben az Erathosztenészhez írott levélben is említett heurisztikus gondolatmeneteit írta le, egészen a XX. század első éveig ismeretlen volt. Ez indokolta a korábban idézett véleményeket ezen megfontolások elrejtéséről.

Archimédész talán egyik legzseniálisabb műve egy kis könyvecske volt, amely a *MÓDSZER* (*Εφοδοζ*) címet viseli. Ez hosszú ideig csak áttételesen volt ismert, többek közt Heron is utalt rá *Metrika* c. könyvében. 1906-ban J. L. Heiberg dán filozófus és tudománytörténész Istambulban megvizsgált egy pergamen tekercset, amely a Jeruzsálemi Szent Sír Kolostorból származott. Ez valamikor a X-XII. században íródott és egy ún. palimpszesztus volt, azaz olyan pergamen, amelynek eredeti szövegét lekaparták és új szöveget írtak rá. Gondosan eltávolítva a latin írást előtűnt az eredeti görög nyelvű szöveg. Ez számos, már ismert Archimédész töredéket tartalmazott, de közöttük volt egy rövid traktátus is, az imént említett nevezetes *Módszer*.

E könyvecskében, amely az elején tartalmazza az Erathoszthenészhez írott — már részben idézett — levelet, megtalálhatjuk azon módszerek leírását (több változatban is), amelyekkel mechanikai elveket alkalmazva állított föl bizonyítandó matematikai sejtéseket. Az egyik fő eredmény egy parabolaszélet területének meghatározása volt. Alapvetően fizikai megfontolásokat alkalmazott ebben is, korábban a tömegközéppontra (súlypontra) nyert eredményeit használta föl arra, hogy megállapítsa, mi is az

Állítás. Legyen adott az $\alpha\beta\gamma$ szelet, amelyet az $\alpha\gamma$ egyenesszakasz és az $\alpha\beta\gamma$ parabolaív határoz meg; jelölje δ az $\alpha\gamma$ felezőpontját, s a $\delta\beta\epsilon$ egyenesszakasz legyen párhuzamos a parabola tengelyével, majd kössük össze a β pontot α és γ -val. Állítom, hogy az $\alpha\beta\gamma$ szelet egyharmadával nagyobb az $\alpha\beta\gamma$ háromszögnél.

Az a feladatunk, hogy meghatározzuk az $\alpha\beta\gamma$ parabolaív és az $\alpha\gamma$ szakasz által közrefogott területet.

$\alpha\beta\gamma$ a parabolaszélet, amelyet az $\alpha\gamma$ egyenesszakasz és az $\alpha\beta\gamma$ parabolaív határoz meg,
 $\gamma\zeta$ a parabola érintője a γ pontban,

$\delta\beta\varepsilon$ a parabola tengelyével párhuzamos egyenes δ -n keresztül,

$\xi\omicron\nu\mu$ a $\delta\epsilon$ egyenessel párhuzamos egyenes,

$$\kappa\vartheta = \kappa\gamma.$$
$$\delta\beta = \beta\varepsilon,$$
$$\alpha\kappa = \kappa\zeta \quad \text{és} \quad \xi\nu = \nu\mu.$$

9

Euklidész Kúpszeletek c. könyvében is, de e műnek mindmáig egyetlen példánya sem került elő.

Archimédész heurisztikus gondolatmenete a Módszer c. traktátusból.[1]

A parabolaszélet területét az alábbi megfontolások révén összehasonlítja az $\alpha\gamma\zeta$ háromszög területével:

egyenesszakasz súlya: a szakasz hossza,

alakzat területe: olyan párhuzamos, súlyozott egyenesszakaszok összege, amelyek kitöltik az alakzatot,

az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területe: a ξo -val párhuzamos, a széleten belüli, súlyozott egyenesszakaszok összege,

az $\alpha\gamma\zeta$ háromszög területe: a $\xi\mu$ szakasszal párhuzamos, e háromszögön belüli, súlyozott egyenesszakaszok összege.

Archimédész előbb megmutatta (az olvasó ezt geometriai megfontolásokkal könnyen ellenőrizheti), hogy

$$\vartheta\kappa \cdot \xi o = \kappa\nu \cdot \xi\mu,$$

majd ennek a következő mechanikai elveken nyugvó elemzését adta meg.

(i) Tekintsük a $\vartheta\kappa$ és a $\kappa\nu$ szakaszokat egy olyan emelő két karjának, amelynek alátámasztási pontja κ .

(ii) Helyezzük a ξo szakasz súlyát a ϑ pontba, és legyen ν azon pont, ahová a $\xi\mu$ szakasz súlyát helyezve az emelő egyensúlyban lesz.

A bizonyítandó állításhoz, amelyet csak sejtésnek tekintett előbb, ezek után a következő gondolatmenettel jutott el.

(iii) Világos, hogy ha azt az összes ξo -szerű szakasz súlyával megtesszük, akkor egyensúlyi helyzetet érünk el azáltal, hogy az összes $\xi\mu$ -szerű szakasz súlyát azok felezőpontjába helyezzük.

(iv) Az összes $\xi\mu$ -szerű szakasz súlyának a felezőpontokba (a tömegközéppontokba) helyezése egyenértékű azzal, ha az $\alpha\gamma\zeta$ háromszög súlyát e háromszög tömegközéppontjába helyezzük.

(v) Archimédész a Bolygók egyensúlyáról szóló traktátusában [1] megmutatta, hogy az utóbbi tömegközéppont azon χ pont a $\gamma\kappa$ szakaszon, amelyre

$$\kappa\chi = \frac{1}{3}\gamma\kappa.$$

(vi) A kétkarú emelőkre vonatkozó törvény értelmében

$$\kappa\chi \cdot t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta}) = \vartheta\kappa \cdot t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}}),$$

ahol $t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta})$ és $t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}})$ rendre az $\alpha\beta\zeta$ háromszög, ill. az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területét jelöli.

Ezen egyenlőségből adódik, hogy

$$\frac{t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta})}{t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}})} = \frac{\kappa\vartheta}{\kappa\chi} = \frac{3}{1},$$

(ν) amiből már következik a keresett

$$\frac{t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}})}{t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta})} = \frac{4}{3}$$

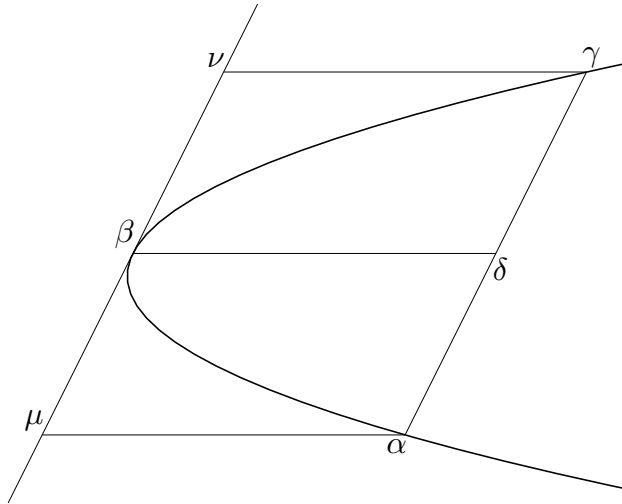
egyenlőség.

E ponton Archimédész hangsúlyozta, hogy iménti **eredményét nem matematikai úton érte el, így matematikai tétel csak akkor lesz belőle, ha azt geometriai úton bebizonyítja.**

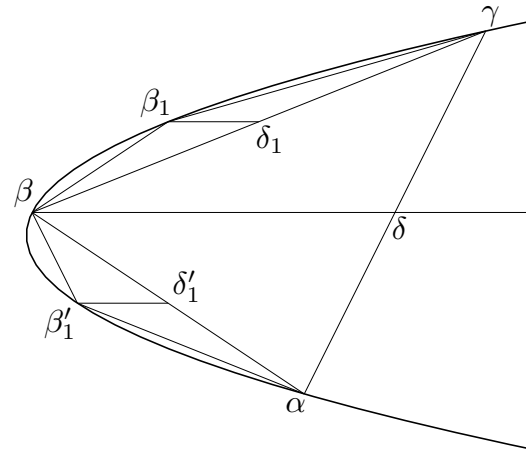
5. A szigorú bizonyítás.

Az előbb megfogalmazott heurisztikus sejtés deduktív bizonyítását a Parabola kvadraturája c. traktátusában [1] írta le Archimédész, amely egyrészt Euklidész egy tételén, másrészt saját „approximációs módszerén” alapult.

Tekintsük a következő két ábrát.



2.a. ábra



2.b. ábra

Az ábrák konstrukciója.

1. Legyen $\alpha\beta\gamma$ a parabolaszület, továbbá $\beta\delta$ olyan egyenes, amely felezi az összes olyan húrt, amely párhuzamos $\alpha\gamma$ -val. Így δ felezőpontja az $\alpha\gamma$ húrnak. (2.a. ábra)
2. A parabola kvadraturája c. traktátusának [1] 18. Állítása szerint a parabola β pontbeli érintője párhuzamos $\alpha\gamma$ -val. (Ezen állítást az olvasó maga is egyszerűen igazolhatja.)
3. Húzzuk meg a $\beta\delta$ egyenessel párhuzamos $\nu\gamma$ és $\mu\alpha$ szakaszokat.
4. Euklidész Elemek c. könyvének [2] I. 41. Tétele szerint az $\alpha\beta\gamma$ háromszög területe fele az $\alpha\mu\nu\gamma$ paralelogramma területének.
5. Az $\alpha\beta\gamma$ háromszög területe több a parabolaszület területének felénél.
6. Legyen δ_1 és δ'_1 a $\beta\gamma$, ill. az $\alpha\beta$ húr felezőpontja, továbbá a $\beta_1\delta_1$ és a $\beta'_1\delta'_1$ szakaszok párhuzamosok $\beta\delta$ -val, azaz megismételjük az $\alpha\beta\gamma$ parabolaívre alkalmazott konstrukciónkat a $\beta\beta_1\gamma$ és $\alpha\beta'_1\beta$ parabolaívekre.

$$7. t(\beta\beta_1\gamma_\Delta) + t(\alpha\beta'_1\beta_\Delta) = \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) \text{ (2.b. ábra)}$$

Ha megismételjük a 6. pontbeli eljárást az $\alpha\beta'_1$, $\beta'_1\beta$, $\beta\beta_1$, $\beta_1\gamma$ parabolaívekre, majd tovább folytatjuk eljárásunkat az így kapott parabolaívekre, akkor a

$$t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4^2}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \dots \quad (3)$$

geometriai sor véges kezdő szeleteit kapjuk.

Megjegyzés. Az olvasó számára — ha járatos a modern matematikában — világos, hogy a parabolaszület területe a (3) konvergens geometriai sor összege. Ez a megközelítés azonban az ókori matematikusok számára értelmezhetetlen volt. Arisztotelész filozófiájában szerepel ugyan kétféle végtelen, a „potenciálisan végtelen” és az „aktuálisan végtelen”, de a matematikában csak az előbbi fogalom volt használatos oly módon, ahogy az például Euklidész két idézett tételében is szerepel.

A bizonyítás előkészítése.

Archimédész egy briliáns ötlettel oldotta meg a végtelen sor összegének meghatározását. Mindvégig csak véges összegekkel foglalkozva, a következő állítás szolgált számára kiindulópontként.

23. Állítás. (Archimédész, A parabola kvadraturája [1]) *Legyen adott mennyiségek egy olyan sorozata, amelyben minden egyes tag az őt követő tag négyszerese. Ha az összes tag összegéhez hozzáadjuk az utolsó tag egyharmadát, akkor a kapott összeg egyharmadával haladja meg az első tagot.*

Megjegyzés. Modern terminológiával tehát a következőt állította. Ha $c_1, \dots, c_n$ egy $\frac{1}{4}$ kvóciensű mértani sorozat, akkor

$$c_1 + \dots + c_n + \frac{1}{3}c_n = \frac{4}{3}c_1. \quad (4)$$

Archimédész bizonyítását az $n = 5$ esetre adta meg anélkül, hogy ténylegesen kihasználta volna ezen megszorítást. Ugyanúgy tett, mint az összes többi korabeli görög matematikus, akik számára a „véges sok” mindig konkrét számot jelentett. Láttuk például, hogy Euklidész számára ez például a 3 volt a IX. 20. és a XI. 1. Tételek bizonyításakor. Azt is megemlíthetjük, hogy Archimédész iménti állítása igazolható az Elemek IX. 35. Tétele alapján is.

Archimédész approximációs módszerét több traktátusában is leírta. Ennek egy megfogalmazását — az olvasó kényelmére — mai terminológiával adjuk meg.

Archimédész approximációs módszere.[1] *Valamely meghatározandó Σ mennyiséget alulról közelíti az $S_n = a_1 + \dots + a_n$ összeg, amelyben a tagok pozitívok mégpedig úgy, hogy a $\Sigma - S_n$ különbség az n növeléseivel kisebbé tehető bármely előre adott ε mennyiségnél, s ugyanez érvényes a_n -re is. (Lényegében S_n egy konvergens sorozat első n tagjának összege.) Ha meghatározunk egy olyan K mennyiséget, amely bármely n re kielégíti az*

$$a_1 + \dots + a_n + R_n = K, \quad \text{ahol } 0 < R_n < a_n \quad (5)$$

föltételt, akkor igazolhatjuk, hogy $\Sigma = K$.

Archimédész bizonyítása [1]. A követett eljárás kettős indirekt föltevésen alapul: megmutatta, hogy a $\Sigma > K$ és a $\Sigma < K$ föltevés egyaránt lehetetlen, tehát csak a $\Sigma = K$ eset lehetséges.

Valóban, először tegyük föl, hogy $\Sigma > K$. Mivel a $\Sigma - S_n$ különbség — az n -et alkalmasan választva — akármilyen adott mennyiségnél kisebb lehet, az n t úgy is megválasztható, hogy

$$\Sigma - S_n < \Sigma - K.$$

Ez azonban azt jelentené, hogy $K < S_n$, ami lehetetlen, hiszen ellentmond (5)-nek.

Ha pedig $\Sigma < K$, akkor ugyancsak föltételeink szerint alkalmas n -re $a_n < K - \Sigma$. Ekkor azonban (4) alapján $K < S_n + a_n$, amiből

$$K - S_n < a_n < K - \Sigma \quad \Rightarrow \quad \Sigma < S_n,$$

és ez ugyancsak lehetetlen.

Ahhoz, hogy e módszerrel mechanikai úton nyert sejtését igazolja, a következő (korábban már idézett) tételre volt szüksége.

X.1. Tétel. (Euklidész, Elemek [2]) *Ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobbikból levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.*

A sejtés bizonyítása.

Tekintsük ismét a 2.a. és 2.b. ábrákat, és végezzünk el n lépést az ott említett konstrukcióval. Ha (3)-at a

$$c_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta), \quad k = 1, \dots, n$$

sorozatra alkalmazzuk, akkor a

$$t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta) = \frac{4}{3}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) \quad (6)$$

egyenlőséget kapjuk.

Alkalmazzuk az approximációs módszert. Először végezzük el (5)-ben az $a_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta)$ helyettesítést. Ekkor az $R_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta)$ választással azt kapjuk, hogy

$$K = \frac{4}{3}t(\alpha\beta\gamma_\Delta).$$

Világos, hogy ez esetben teljesül az $a_n > R_n$ föltétel is.

Jelölje Σ az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területét. Konstrukciónkból Euklidész idézett tétele alapján az is következik, hogy az

$$S_n = t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n t(\alpha\beta\gamma_\Delta)$$

összeg tetszőleges pontossággal közelíti alulról a parabolaszélet Σ területét. Így az approximációs módszerrel azt kapjuk, hogy

$$\Sigma = K = \frac{4}{3}t(\alpha\beta\gamma_\Delta),$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések.

(a) Ha mai tudásunkkal nézzük ezen eljárást láthatjuk, hogy Archimédész lényegében a (3) végtelen mértani sort összegét határozta meg, amely nyilvánvalóan az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területe. Tette mindezt a végtelen sor, annak konvergenciája ismerete nélkül. Eljárása mindezen ismeretek nélkül is korrekt. Annak szigorúsága messze meghaladta a Newton és Leibniz által közel két évezreddel később a területszámításoknál alkalmazottat.

(b) A matematikával ismerkedő középiskolások, de gyakran még az egyetemi hallgatók számára is nem mindig különülnek el megfelelő mértékben a heurisztikus gondolatmenetek a szigorú (deduktív) bizonyításoktól. Különösen fontosnak tartjuk ezen különbség mély megértését a matematika tanárai számára. Archimédész munkáiból — különösen az itt említettekből — kitűnik, hogy ő éles különbséget tett a fizikai és a matematikai gondolatmenetek, érvelések között. Így a fentiekben leírt szép példa reményeink szerint jó szolgálatot tehet az oktatásban.

Köszönetnyilvánítás. A szerző ezúton is köszönetét fejezi ki egykori tanítványának, mai kollégájának, Kovács Zoltánnak az ábrák gondos megrajzolásáért.

Irodalom

- [1] E. J. Dijsterhuis, *Archimedes*, Munksgaard, Copenhagen, 1956.
- [2] Euklidész, *Elemek*, Gondolat, 1983.
- [3] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
- [4] L. Klukovits, The first clear distinction between the heuristic conjecture and the deductive proof in the ancient mathematics, Teaching Mathematics and Computer Science (Debrecen) (közlésre elfogadva)
- [5] Plutarchosz, *Párhuzamos életrajzok*, (fordította Máthé Elek), Osiris, Budapest, 2001.
- [6] Szabó Árpád, Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá, Matematikai lapok, **8** (1957), 8-23, 232-247.
- [7] B.L. van der Waerden, *Egy tudomány ébredése*, Gondolat, Budapest, 1977.
- [8] B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, 1983.

Klukovits Lajos SZTE TTK Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
klukovits@math.u-szeged.hu