

Az I.e. II. évezred.

A folyammenti kultúrák hanyatlása.

- Az évezred közepére az egyiptomi és a mezopotámiai (folyammenti) birodalmak fejlődése minden területen megrekedt.
 - A nagy- és növekvő számú új papirusz és agyagtábla nem jelentett minőségi fejlődést.
 - A bronzról vasra váltás nagyrészt nem náluk zajlott le,
 - a vas fegyverek birtoklása újabb népcsoportok és hatalmi centrumok fölemelkedését eredményezte.
- Az új hatalmi centrumok a Földközi tenger medencéjében jöttek létre, **Tengeri kor** kezdete.
 - A főbb új kolóniákat a RÓMAIAK a KARTHAGOIAK és mindenk fölött a GÖRÖGÖK hozták létre.
 - A MINOSZI kultúra Krétán.
 - I.e. 800-tól a folyammenti kultúrák véglegesen lehanyatlottak.

Az ÓKORI GÖRÖG MATEMATIKA 1.

Kezdetek, az első iskolák

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2021. március 8-22.

Az Égei tengert környező terület 1.

- I.e. 2600-2000: Kőrézkor az Égei tenger partvidékén: korai minoszi kor Krétán, korai helladikus kultúra a mai Görögország területén, Troja első virágkora.
- I.e. 2200 körül ismeretlen (indoeurópai) népek vándorlása elpusztította a kora bronzkori kultúrát a mai Görögország területén és a Kisázsiai partvidéken.
- I.e. 2000-1600: A krétai bronzkori civilizáció fénykora, az ún. közép-minoszi kor Krétán.
 - Kereskedelmi kapcsolatok Elő-Ázsiával, Egyiptommal.
 - Nagy paloták építése: Knósszosz, Phaistosz, Mallia.
 - Megjelenik az első krétai írás.
- A szárazföldön: az ún. középső helladikus kor, a görög törzsek őseinek bevándorlása Hellaszba.

Az Égei tengert környező terület 2.

- I.e. 1600-1400: A krétai kultúra utolsó szakasza, a késői minoszi kor.
 - Kréta tengeri nagyhatalommá válik, a vezető szerep Knósszoszé.
 - A művészetek virágkora.
- A szárazföldön: a mükénéi kor (1600-1100) kezdete.
- Az akhájoké (az első görög bevándorló törzs) a vezető szerep.
- Megjelenik az ún. lineáris B írás, az első szótagírás (a 20. sz. közepén fejtették meg).
- A bevándorló görög törzsek északról jöttek, először a II. évezred elején az ACHÁJOK
- követték őket a IONOK, majd a DOROK.
- Előbb „szelíd” hódítók voltak, átvették a krétai eredetű kultúrát, majd az achájok már szervezett birodalmat alakítottak ki átvéve a krétai kultúra főbb elemeit.
- a korábbi helyett szinte egyeduralkodóvá tették ősi indoeurópai hitvilágukat ötvözve a krétaival.

Az Égei tengert környező terület 3.

- 1400-1200: A középső mükénéi kor.
- Az akháj kultúra föllendülése.
- Mükéné a fő centrum (a Peloponnesz sz. É-K-i részén).
- Megsemmisítik a minoszi civilizációt: beolvasztják saját kultúrájukba.
- Gyarmatosítják Ciprust.
- I.e. 1250 körül megsemmisítik Troját.
- Monumentális építkezések Mükénében.
- DE: sok bizonytalanság, pl. milyen nyelven beszéltek a mükénéiek, görögül vagy nem, ők voltak az őslakók vagy bevándorlók; egy valószínűsíthető hipotézis: nem őslakók, hanem északról jöttek, görögül beszéltek, de szókék voltak.

A görög városállamok.

- Az első jelentős a kisázsiai MILETOSZ, 540-ig, a perzsa uralom alá kerülésig, alapvető szerepet játszott.
- Szerepét tovább győngítette az i.e. 494-es (sikertelen) fölkelés. 479-ben lett újra görög (ion) város, de régi szerepe nem tért vissza.
- Fontos keleti kapcsolatok: vita a matematika történések és a filológusok között,
- Platon: „Bármit is vettek át a barbároktól, azt mindig magasabb tökélyre fejlesztették.”
- Thalesz, Pithagorasz, Demokritosz és Eudoxos utazásai.
- van der Waerden: „... a hellének nem lehettek olyan korlátoltak, hogy ne vették volna észre és ne becsülték volna meg, ami az idegen kultúrákban érték.”

A görög időszámításk.

- Olümpia, a dór Zeusz-kultusz központja I.e. 776-tól a görög törzsek kultikus játékaiknak színhelye lesz.
- A VIII-VI. sz. az ún. archaikus kor, a városállamok rendszerének megerősödése.
- Gyarmatosítások, elsődlegesen Dél-Itália felé.
- A VIII.sz.: A Homéroszi eposzok, Hesziodosz: Munkák és napok.
- Átveszik a föníciaiak betűírását.

A görög kultúra első virágkora.

A Görög Klasszikus Kor: I.e. 600 - 300.

- A „görög demokrácia virágkora” az V. században.
- Híres matematikai és filozófiai iskolák.
 - Ion Iskola, Pithagoreusok, Eleaták, Archytasz iskolája, Szofisták, Akadémia (Platon), Lyceum (Arisztotelesz), Eudoxos iskolája.
 - Az iskolák jellege.
 - Platon filozófiai művei, Arisztotelesz logikája.
- A matematika deduktív tudománnyá válik.
 - Vita: mi a kiváltó ok?
- Két enciklopédikus összegző matematikai munka: EUKLIDESZ, ELEMEK, APOLLONIUSZ, KÚPSZELETEK, Eudemosz geometria története, sok töredék.
- Ezek egy része a klasszikus kor után íródott, DE...

Hellenizmus.

A Hellenizmus Kora: I.e.. 300 - I.sz. 600.

Kezdet: A makedon hódítások.

- II. Fülöp hódításai I.e. 352-től, Athen eleste 338-ban, keleti hadjárata
- 336-tól fia (Nagy) Sándor az uralkodó, a hódítások folytatása: keleten az Indus völgyéig, nyugaton — a Földközi tenger partvidékén haladva Egyiptomon át — az Atlanti óceánig.
- 332: Alexandria megalapítása a Nilus torkolatánál → új főváros,
- új hódítási és berendezkedési technikák: házasságok, katonák és népcsoportok cseréje, a I.e. 325: a „Szuzai mennyegző”: felesége Statira Dareiosz perzsa király lánya, 20.000 frigy.
- 323: Nagy Sándor halála.

A hellenizmus virágkora.

A Ptolemaioszok Egyiptoma

- A birodalom 3 részre szakadása: Mezopotámia (Szeleukosz), Egyiptom (a Ptolemaioszok), Európai területek (Antigonosz).
- A klasszikus görög kultúra továbbélése és jelentős fejlődése: a HELLENIZMUS.
- 323-222: Ptolemaiosz Szoter, ~ Phyladelphusz, ~ Euergetesz uralkodása Alexandriában.
- MYSZEION megalapítása 290-ben, 4 osztály: matematika, csillagászat, orvoslás és irodalom. Továbbá: fizika → matematika, csillagjólás → csillagászat, filozófia → irodalom, geográfia → matematika.

A hellenizmus virágkora.

Írott emlékek.

Az ókori világ csúcsteljesítményei.

- A KÖNYVTÁR, csúcs: 750.000 egység, I.sz. 670-680-ig működött a Myszeion mellett.
- Technikai vívmányok: vízszivattyúk, fogaskerekes szerkezetek, távolságmérő eszközök, gőzzel hajtott járművek, vízzel működő orgona, a sűrített levegő alkalmazásai, stb.
- Fizika: geometriai optika (lencsék és tükrök), hidrosztatika.
- Kémia: metallurgia.

A rendelkezésre álló források.

- Homerosz és Hesziadosz művei.
 - Ilias és Odyszeia, Munkák és napok.
- Görög nyelvű töredékek, zömmel összefoglalások, történeti művek, kommentárok: Eudemosz és Proklosz művei.
- Bizánci keresztény kódexek.
- Arab fordítások és kommentárok, szerkesztett változatok.
- Latin nyelvű kéziratok (fordítások): zömmel szerkesztett, erősen egyszerűsített változatok.

A Klasszikus Kor Matematikája.

A legfontosabb iskolák.

- Ion iskola (Thalesz),
- Pithagoreusok (Pithagorasz),
- Eleaták (Parmenidesz),
- Szofisták (khioszi Hippokratesz),
- Akadémia (Platon),
- Lyceum (Arisztotelesz).

Ion Iskola Miletoszban.

- A milétoszi **THALESZ** (kb. 640 - 546) alapította.
- Vélhetően a filozófiai — és egyúttal — a tudományos gondolkodás alapjainak megteremtője.
- VII-VI.sz.: a világszemlélet szekularizálódott; a **hét (legfőbb) bölcs**, akik 22-en voltak.
- Minden listán szerepel: Thalesz, Biasz, Pittakosz, Szolon.
- További gyakori nevek: rhodoszi Kleobulosz, spártai Khilon, korintoszi Periandrosz, a mitikus Orpheosz, a vígjátékíró Epikharmosz.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Ion Iskola

- Miért tekintették őket bölcseknek? Nem a tudomány, a filozófia megalapozói, művelői voltak, „csodálták erkölcsi kiválóságukat, pozitív társadalmi tevékenységüket,...” (Pais István)
- Plutarchosz: „*Úgy látszik, Thales volt annak a kornak egyetlen bölcselője, aki a hétköznapi szinten felülemelkedve szemlélte a világot, a többiek politikai érdemeikért nyerték el a bölcselő nevet.*”

A Klasszikus Kor Matematikája.

Ion Iskola

- Thalesz tanítványának tekintik Anaximeneszt (610 - 547), és iskolájához szokás kapcsolni még Anaximandroszt (550 - 480) és Anaxagorasz (500 - 428). Anaxagorasz már nagyrészt Athenben élt.
- Mindannyiukra leginkább a **természetfilozófus** meghatározás illik.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Thalesz mint csillagász.

- Herodosz írta, hogy *a halüsi csata alatt a nappal egyszer csak éjszakává változott, és hogy Thalesz ezt éppen erre az évre jóslta a délosziaknak.*
- Ezt egy korábbi drámaíró Xenophanesz is megemlítette.
- Ma általánosan elfogadott, hogy az i.e. 585-ös napfogyatkozásról lehet szó.
- Thalesz nyilvánvalóan az asszír udvari csillagjósok i.e. 700 körüli levelezéseire támaszkodhatott.
- Ezekben több-kevesebb pontossággal/sikerrel nap- és holdfogyatkozásokat jósltak meg.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Thalesznek tulajdonított eredmények (Eudemosz).

- A kört bármely átmérője felezi (Proklosz szerint bizonyította is).
- Fölsírmerte, hogy az egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők.
- Fölfedezte, hogy ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők.
- Két háromszög egybevágó, ha megegyezik egy oldaluk és (a rajta fekvő) két szög.
 - Ezt arra alapozta (Eudemosz), hogy vélhetően így határozta meg meg hajók távolságát a nyílt tengeren.
 - Hieronimosz szerint Thalesz így határozta meg Egyiptomban a piramisok magasságát.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Thalesznek tulajdonított eredmények: a TÉTEL

Pamphilé (Néró idejében élt): Ő fedezte föl azt a tételt, hogy **a félkörbe írt háromszög derékszögű.**

Kérdések, kételyek.

1. Bizonyította-e deduktívan ezen állításokat?
2. Így ő volt-e a deduktív matematika megteremtője,
3. vagy a korábbi egyiptomi babyloniai eredményekre támaszkodva empirikusan jutott ezekre az eredményekre.
4. Minden esetre a deduktívítás alapjait szolgáló logikai rendszereket jóval később dolgozták ki, és nem volt semmi kényszer ebben az irányban.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Proklosz kérdése Eudemoszra alapozva.

1. Thalesz volt-e az antik matematika kezdete, mivel ő volt az első, aki az empirikusan fölfedezett tételeit be is bizonyította.
2. De az empirikus matematika már jóval korábban létezett Mezopotámiában és Egyiptomban.

A mai álláspont.

- Thalesz szép eredményei ellenére nem tekinthető a modern (deduktív) matematika megteremtőjének, legfőljebb egy korai előfutárának.
- Állítjuk ezt annak ellenére, hogy néhány ókori kommentátor (pl. Eudemosz és Proklosz) másként vélekedett.

A Klasszikus Kor Matematikája.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e. 585-400

1. A szamoszi Pithagorasz életéről.
 - 1.1 Legenda szerint Thalesz tanítványa (is) volt.
 - 1.2 Utazásai: Egyiptom, Mezopotámia, India (?), Kína (???)
 - 1.3 Iskolát alapított Crotonban (Dél-Itália),
 - 1.4 Logisztika, aritmetika, geometria.
2. Az iskoláról:
 - 2.1 A legendák szerint Pithagorasznak sok tanítványa volt, DE
 - 2.2 a név szerint ismert tagok: Philolaosz (V. sz.) és ARCHYTASZ (428-347)
 - 2.3 Proklosz (I.sz. V. sz.) szerint: *... Pithagorasz a matematikát szabad előadásokban ismertette, ... ő volt (Pithagorasz), aki megteremtette a „tisztá matematikát”, s ezzel e tudományt a „szabad művészetek” részévé tette.*
 - 2.4 Ez azt (is) jelentette, hogy csak aritmetikával és geometriával foglalkoztak (a domináns az előbbi).

A Klasszikus Kor Matematikája.

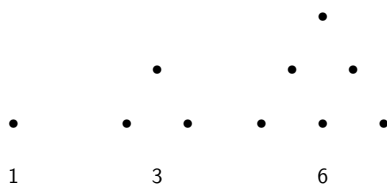
A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

- **Nagy kérdés:** **valóban ők voltak-e a deduktív matematika megteremtői**, vagy csak — tiszteletre méltó — előfutárai.
- **Konkrétabban:** **a szám absztrakt fogalma tőlük ered-e?**
- Kezdetben a szám fogalma még náluk sem különült el a fizikai valóságtól (pl. kövek), erre utalnak a figurális számokkal kapcsolatos eredmények, DE ebben is benne van az absztrakció csírája.
- Proklosz és Eudémosz $\longleftrightarrow$ Arisztotelész.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

Aritmetika - logisztika: figurális számok.

A háromszögszámok.



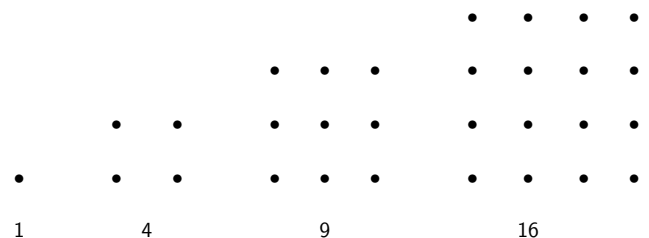
Háromszögszámok.

Általában:

$$h_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400.

Négyzetszámok.



A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

Négyzetszámok.

- Összefüggés a négyzetszámok és a háromszögszámok között:

$$n_k = h_k + h_{k+1} = \frac{k}{2}(k+1) + \frac{k+1}{2}(k+2) = (k+1)^2$$

- További észrevételeik a négyzetszámokkal kapcsolatban:

•

$$k^2 + (2k+1) = (k+1)^2,$$

•

$$1 + 3 + \dots + (2k+1) = k^2.$$

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400.

Ötszögszámok.

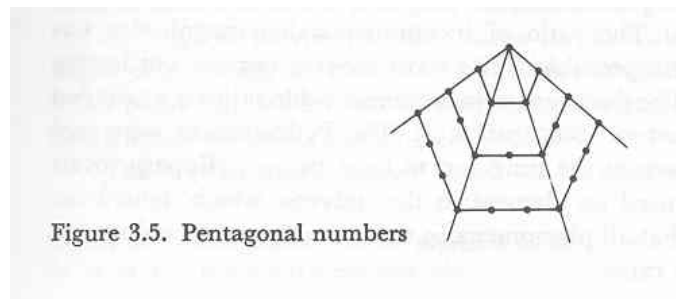


Figure 3.5. Pentagonal numbers

1, 5, 8, 11, ...

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Logisztika.

Hatszögszámok.

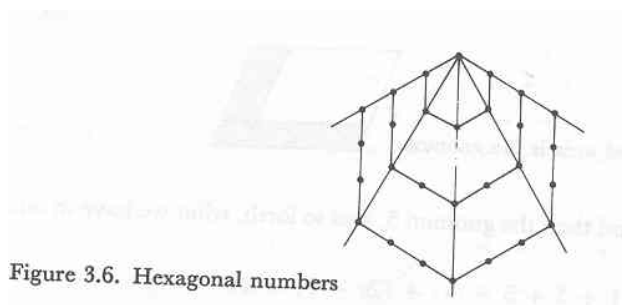


Figure 3.6. Hexagonal numbers

1, 6, 10, 14, ...

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Aritmetika (számelmélet).

Általuk bevezetett fogalmak.

- A szám fogalma, páros- és páratlan szám, arány;
- prímszám, összetett szám,
- osztó (rész),
- tökéletes szám, pl. 6, 28, 496, 8128. Nichomachos sejtése.
- A számtani-, a mértani- és a harmónikus közép fogalma.
- Zenei arány:

$$p: \frac{p+q}{2} = \frac{2pq}{p+q} : q$$

- Összemérhetőség: a és b (számok, szakaszok) összemérhetők, ha van olyan c , hogy $a = mc$, $b = nc$ valamely m, n számra.
- Nem összemérhető = irracionális.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Aritmetika (számelmélet).

Nekik tulajdonított (Eudemosz és mások) összefüggés (tétel).

- Ha m páratlan szám, akkor

$$\left(m, \frac{m^2 - 1}{2}, \frac{m^2 + 1}{2}\right)$$

ún. pithagoraszai számhármass, azaz az ilyen oldalhosszúságú háromszögek derékszögűek.

- A „párosról és a páratlanról szóló tanítás,” Euklidész, Elemek IX./21-33. Tétel.
- Arisztotelész szerint: az, hogy a négyzet oldala és átlója nem összemérhető az ő fölfedezésük.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Aritmetika.

Nekik tulajdonított (Eudemosz és mások) eredmény (folytatás).

- Az, hogy $\sqrt{2}$ összemérhetetlen az 1 egységgel, először ők igazolták, módszerük a „reductio ad absurdum” volt. → Szabó Árpád elmélete.
- Az összemérhetetlen arányok → irracionális mennyiségek (számok) elméletének kezdete → Elemek X. könyve.
- Végtelen sok prímszám van.
- Elegendő föltétel valamely páros szám tökéletes szám voltára.
- Két szám legnagyobb közös osztójának (közös részének) létezése, kiszámítása.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Geometria.

- Minden bizonnyal a „tétel” első bizonyítása (talán az, ami az Elemekben szerepel)
- Lényegében mindazt tudták, amit mi a háromszögekkel, a párhuzamosokkal, sokszögekkel és a körökkel kapcsolatos „elemi ismereteknek” tartunk, beleértve hogy a háromszög (belső) szögeinek összege 2 derékszög.
- A sík kitölthető szabályos háromszögekkel, négyzetekkel, hatszögekkel.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Összegzés 1.

1. Náluk jelennek meg először
 - 1.1 pontosnak tekinthető fogalmak → **definíciók**,
 - 1.2 kiinduló állítások → **posztulátumok**,
 - 1.3 pontosan megfogalmazott további állítások → **tételek**,
 - 1.4 az előbbieket logikai eszközökkel való **bizonyítása**.
2. Átalakult-e teljesen a matematika, empirikus tudományból deduktív tudománnyá vált-e, egyáltalán tudománynak nevezhetjük-e?
3. Általánosan nem adható pozitív válasz, de nagyon sok részkérdésre igen.
 - 3.1 A szám fogalma még nem tekinthető teljesen absztraktnak: nem különült el tisztán a fizikai realizációtól: figurális számok ↔ prímszámok, tökéletes számok, stb.
 - 3.2 Megjelenik az igény a deduktív gondolatmenetekre → a párosról és a páratlanról szóló tanítás.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Összegzés 2.

1. Vitatott kérdés, hogy ezt mi váltotta ki. Két rivális elmélet: az eleai filozófia, vagy az összemérhetetlenek fölfedezése.
2. Nem lehet egyértelműen kijelenteni, hogy eredményeik mindegyikét deduktíve, posztulátumokra alapozva igazolták, DE számos esetben ezt megtették.

Működésük nem eredményezte MÉG a matematika teljesen deduktív tudománnyá válását, de ŐK TETTÉK MEG A DÖNTŐ LÉPÉST AZ ODA VEZETŐ ÚTON.

Eleai Iskola.

1. Ismert tagok: Parmenidesz (az alapító), Zenon, Leukipposz, Demokritosz (tanítványok sora).
2. Zenon aporiái a mozgásról $\Rightarrow$ az empirikus és a deduktív megismerés ellentéte.
 - 2.1 Achilles és a teknősbéka, a mozgás lehetetlensége, ha az „folytonos”.
 - 2.2 A „stadion paradoxon”, a repülő nyíl „áll” minden pillanatban, azaz a mozgás akkor is lehetetlen, ha azt „diszkrét” folyamatnak tekintjük.
3. Hatásuk a matematika deduktív tudománnyá válására: a **váltás fő oka.** (Szabó Árpád)

Eleai Iskola.

Parmenidesz tankölteményéből.

- Az iskola alapítója i.e. 480 körül írta, benne összefoglalta nézeteit.
- Ez sok töredékben maradt fenn, így viszonylag jól rekonstruálható volt.
- Parmenidesz szerint a realitás vizsgálatának két útja van.
 1. Az **érzékelés**, amin a hétköznapi halandók és bizonyos bölcselek haladnak. Ez csupán hamis vélekedést (doxát) eredményezhet. Azt sugallja, hogy van sok egyedi dolog (sokaság), mozgás, és valami módon létezik a nemlétező is. Ezt az utat Parmenidesz teljesen elveti.
 2. Az egyedül üdvözítő út a **gondolkodás**. Ez az egyetlen út az igazsághoz. Ráébreszti a bölcset, a kutatót arra, hogy csupán a „létező” az, ami van, a „nemlétező” pedig nincsen.

Az Athen-i iskolák 1.

Áttekintés.

1. A „görög demokrácia virágkora”.
2. A 480-ban kezdődő perzsa háború:
 - 2.1 Xerxész kezdeti sikerei: Thermopyla, Athen;
 - 2.2 görög ellentámadás: Szalamisz (Themisztoklesz), Plataia.
3. 478-ban létrejött a **Deloszi-szövetség** a perzsák ellen:
 - 3.1 adófizetés a közös háborúkra, a „kassza őrzése”,
 - 3.2 a „klasszikus görög kultúra virágkora”, Athén dominanciája a kultúra minden területén.
4. A fontosabb iskolák:
 - 4.1 Szofisták.
 - 4.2 Akadémia.
 - 4.3 Lyceum.

Szofisták.

- Az oktatott (művelt) diszciplínák: filozófia, grammatika, retorika, dialektika (= a vitatkozás tudománya), erkölcsstan, geometria (matematika), csillagászat (+csillagjósolás).
- Egyik fő cél: a geometria (a matematika) segítségével a világ (az univerzum) megismerése.
- A 3 nevezetes szerkesztési probléma: kockakettőzés (a „Delosz-i probléma”), szögharmadolás, a kör „négyszögesítése”.
- Anaxagorasz fölvetései, problémái.
 - a Nap nem istenség, hanem egy izzó gömb; majdnem akkora, mint a Peloponesszosz félsziget;
 - a Holdnak nincs saját fénye, hideg földgolyó, emberek is élhetnek rajta.
- Ezen és más hasonló tanításáért — Periklész népszerűsége hanyatlásakor — bebörtönözték istentelenség vádjával.

Szofisták.

A legendák szerint Anaxagorasz a börtönben foglalkozott a kör négyszögesítésével, amely a kor egyik népszerű problémája volt, még az írók/költők érdeklődését is fölkelte.

Arisztophanész: Madarak

S megmérem az egyenes rúddal, hogy a
Kör négyyszögű legyen, tudod; s középen
Piac — feléje, mint központba, sok
Egyenes út vigyen s mint sugarak,
Lövelljenek szét a kerek piacról
Mindenfelé. (Arany J. fordítása)

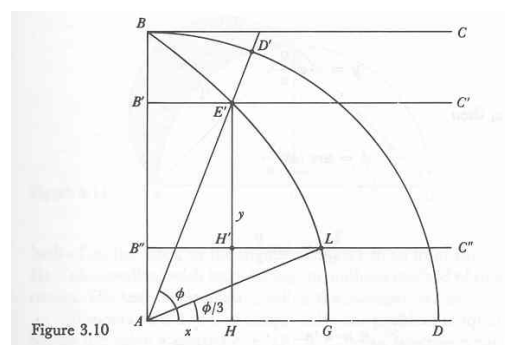
Szofisták.

Erőfeszítések szerkesztési problémák megoldására.

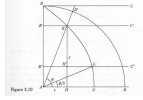
1. Szögharmadolás: az eliszi Hippiasz quadratrixe.
2. A kör négyszögesítése: Anaxagorasz próbálkozásai, a khioszi Hippokratesz holdacskái.
3. Kockakettőzés: Archytasz, Hippokratesz, Eudoxos és sokan mások.

Szögharmadolás.

Az eliszi Hippiasz quadratrixe.



Quadratrix.



Konstrukció

1. Az AB szakaszt állandó sebességgel derékszöggel elforgatjuk: AD .
2. A B pontbeli érintőt állandó sebességgel eltoljuk az AD helyzetig.
3. A sebességek aránya olyan, hogy egyszerre indítva egyszerre érik el a véghelyzetet.
4. Egy adott időpontban AB AD' -be, BC $B'C'$ helyzetbe jut, metszéspontjuk E' . Ezen pontok összessége a **QUADRATRIX**.

Szögharmadolás.

A quadratrix egyenlete.

1. A definiáló mozgások egyenletes volta miatt:

2.

$$\frac{\Phi}{\pi/2} = \frac{E'H}{BA}.$$

3. Az $y = E'H$ és $a = BA$ jelölésekkel

4.

$$\frac{\Phi}{\pi/2} = \frac{y}{a} \implies y = a\Phi \frac{2}{\pi}$$

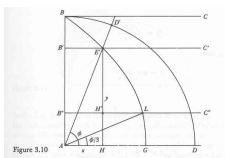
5. Ha $x = AH$, akkor az egyenlet

6.

$$y = \frac{2a}{\pi} \arctan \frac{y}{x}, \text{ vagy } y = x \tan \frac{\pi y}{2a}.$$

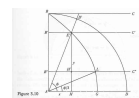
Szögharmadolás.

Az eljárás.



1. Legyen $E'H' = 2H'H$, H' az y harmadolópontja.
2. A $B''H'C''$ egyenes párhuzamos AD -vel, L -ben metszi a görbét.
3. Állítjuk, hogy $\angle LAD = \Phi/3$.

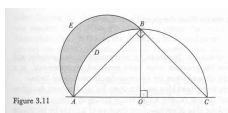
Az igazolás.



$$\begin{aligned} \frac{\angle LAD}{\pi/2} &= \frac{H'H}{a} = \frac{y}{3a}, \\ \frac{\Phi}{\pi/2} = \frac{y}{a} \implies y &= \frac{2a}{\pi} \Phi \implies \frac{\angle LAD}{\pi/2} = \frac{2a\Phi}{3a\pi} = \frac{2\Phi}{3\pi}, \\ \angle LAD &= \frac{\Phi}{3}. \end{aligned}$$

Körnéyszögösítés, a khioszi Hippokratesz 1.

1. Inkább pitagoreus, mint szofista, de Athenben élt az V. század második felében. „Elemeket” írt, amely elveszett.
2. Egyesek szerint a deduktív matematika egyik előfutára volt, de ez erősen kétséges.
3. Elsősorban a két körív által határolt alakzatok, az ún. **holdacskák** négyzögesítésével foglalkozott.
4. Legegyszerűbb eredménye:

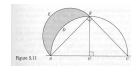


A befogók fölötti holdacskák összege egyenlő a háromszöggel.

Körnéyszögösítés.

A khioszi Hippokratesz 2.

A bizonyítás.

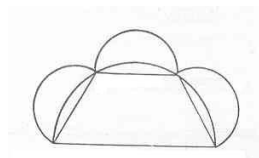


1. A háromszög köré írt körének fele kétszerese a befogó fölé írt félkörnek.
2. Így a „nagy negyedkör” egyenlő egy „kis félkörrel”.
3. Vonjuk ki mindkettőből a befogó fölötti körszeletet, az egyenlőség továbbra is fennáll.
4. Kaptuk, a „holdacska” egyenlő a háromszög felével, azaz egy egyenesekkel határolt alakzattal.

Körnéyszögösítés.

A khioszi Hippokratesz 3.

Egy további négyzögesítés:



Állítása.

A szimmetrikus trapéz, amely egy szabályos hatszög fele, egyik oldalára emelt félkör és az oldalakon levő holdacskák együtt megadják a trapéz területét.

Bizonyította-e állításait?

Eudemosz véleménye.

- A holdacskák kvadraturáját, amely a körrel való rokonságuk miatt különleges alakzatoknak tűnnek, először HIPPOKRATESZ írta le, s kifejtése helyesnek találtatott. ...
 - Először az alapokat vezette be, s az ehhez szükséges tételeket állította föl, pl. azt, hogy
 - A hasonló körszeletek úgy aránylanak egymáshoz, mint alapjuk négyzetei.
 - Ezt úgy bizonyította be, hogy megmutatta,
 - az átmérők négyzetének aránya ugyanaz, mint a köröké.
- Mert amilyen a körök aránya, olyan a hasonló szeleteké is. Hasonló szeletek azok, amelyek a körnek ugyanakkora részét képezik.

Bizonyította-e állításait?

Kétségek 1.

A pirossal szedett kijelentés (a körökre vonatkozó) éppen Euklidesz XII.2. Tétele, de azt először Eudoxos bizonyította, az általa bevezetett eszközök, módszerek nélkül — a mennyiségek általános elmélete nélkül — az lehetetlen.

Kétségek 2.

A pithagoreusok arányelméletét biztosan ismerte, de az csak összemérhető mennyiségekre vonatkozott. A nem összemérhető (az irracionális) esethez szükség van Eudoxos (legalább 50 évvel későbbi) elméletére.

Hippokratesz bizonyítási technikája.

1. Nem elégszik meg a „vizuális” bizonyítékokkal:
 - 1.1 nem elégszik meg szerkesztésekkel,
 - 1.2 bizonyítani igyekszik, hogy a „külső ív hosszabb a belsőnél”.
 - 1.3 Ezt nem tudta korrekten elvégezni, de nem is az a legfontosabb, hanem
 - 1.4 az igény az ilyen állítások bizonyítására.
2. Ő számolt először korrekten egyenlőtlenségekkel, aminek igazi jelentősége később jelentkezik.
 - 2.1 Eudoxos: a körbe és a kör köré írt sokszögek különbsége tetszőlegesen kicsivé tehető.
 - 2.2 Euler „kezdetleges” gondolatmenetei.

Akadémia

A leghosszabb ideig fennálló ókori görög iskola. I.e. 387 körül alapította **PLATON**, és I.sz. 529-ben záratta be II. Jusztinianusz.

Előfutárok.

Kürénei Theodorosz és a tarrentumi Archytasz (két pithagoreus), akik megismertették a matematikával Platont, megalapozták a pithagoreus dominanciát az iskolában matematikából.

Ismertebb tagok még ...

Menaechmosz, Dinosztratosz, (IV. sz), **THEAITETOSZ** (415-369).

Akadémia

A tagok.

- DE a klasszikus kor minden „valamirevaló” matematikusa hosszabb-rövidebb időt töltött itt, mielőtt saját iskolát alapított volna.
- Így például **EUDOXOS**, aki az antikvitás 3 legnagyobb matematikusának egyike (Theaitetosz és Archimedesz mellett).

Akadémia

A kürenei Theodorosz.

1. Platon Theaitetosz című dialógusában beszélget az agg Theodorosz az ifjú Theaitetossal.
2. Theaitetosz rövid összefoglalója a hallottakról.
 - 2.1 A mi Theodoroszunk itt fölrajzolt (írt?) valamit, ami négyzetek oldalaira vonatkozik.
 - 2.2 Megmutatta, hogy a három és az öt lábnyi esetben, hogy azok hosszukat tekintve nem mérhetők az egy lábnival.
 - 2.3 Így elővett minden egyes esetet egészen tizenhét lábíg. Ennél valami megakasztotta.
3. Az „összemérhetőség” fogalma szakaszokra vonatkozik (Euklidesz X.), ezért a „három-, öt lábnyi” azon négyzetek oldalát jelenti, amelyek területe három-, öt négyzetláb.

Theodorosz.

Kérdések.

- Hogyan szerkesztett Theodorosz?
- Miért 17-ig haladt?

Válaszok.

1. Mivel a görögöknél az, amit nekünk pl. a $\sqrt{3}$ jelent, nem szám, hanem CSAK egy hosszúság (egy mennyiség), ezért inkább $w_3, w_5, \dots, w_{17}$ -et írunk.
2. Vélhetően $3, 5, \dots, 17$ egységnyi területű téglalapokat alakított azonos területű négyzetekké (Elemek I.14.)

Theodorosz.

Az igazi kérdés:

Hogyan derítette ki, hogy $w_3, w_5, \dots, w_{17}$ -nek nincs közös mértéke w_1 -gyel.

1. Ugyanazon aritmetikai (számelméleti) módszerrel, ahogy korábban Archytasz igazolta w_2 összemérhetetlenségét az egységgel (irrationalitását).
2. Ha pl. w_q összemérhető w_1 -gyel, akkor valamely m, n számokra

$$m^2 = qn^2,$$

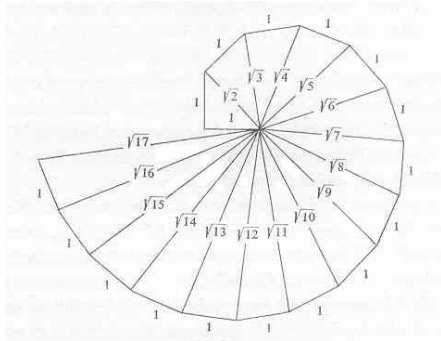
4. és az Elemek VII. könyve alapján ebből q négyzetszám volta adódna ugyan, de ez nem valószínű, mert Theodorosz geométer volt.

Theodorosz geometriai bizonyítása.

- Az alap: **Elemek X.2.** *Ha két nem egyenlő mennyiség esetén a kisebbiket a nagyobbikból való váltakozó kivonásánál a maradék sohasem lesz mérhető az előzővel, akkor e mennyiségek összemérhetetlenek.*
- Ennek alkalmazását valószínűsíti az is, hogy az eseteket egyenként vizsgálta. Az aritmetikai út — korábban láttuk is — egyszerre intézte volna el az összeset.
- A geometriai utat követve minden egyes esetet külön kell vizsgálni, mert mások a kivonások.
- **Megjegyzés.** Vélhetően a folyamat végtelen voltát nem bizonyította Theodorosz, csak utalhatott rá, hogy a maradék „soha sem tűnik el”.

Theodorosz.

Anderhub egy érdekes ábrája (1941).



A deduktív matematika kiteljesedése.

Platon

1. Szívesen hivatkozik a matematikára mint az egzakt következtetések mintapéldájára.
2. A matematikában egzakt következtetések lehetségesek annak ellenére, hogy
 - 2.1 nem látható, hallható (megfogható) dolgokról szól, hanem **ideális objektumokról**,
 - 2.2 olyanokról, amelyek **csak a gondolkodásunkban léteznek**.
3. Ezek megfogalmazásakor vélhetően a négyzet átlója és oldala kölcsönös összemérhetetlenségének bizonyítására gondolhatott.

A deduktív matematika kiteljesedése.

Platon, Állam 510 D - E

- Bizonyára azt is [tudod], hogy mindig csak látható alakokkal dolgoznak, s beszédekben is ezzel foglalkoznak, holott pedig gondolataik igazi tárgyai nem ezek az alakok,
- hanem azok, amikhez ezek hasonlítanak: magának a négyszögletű testnek [helyesen: négyzetnek!] s magának az átmérőnek [helyesen: átlónak!] a kedvéért folytatják elmélkedéseiket,
- nem pedig azért az átmérőért [átlóért], amelyet lerajzolnak...
- Közben azokat a fogalmakat keresik, amelyeket másképpen, mint ésszel, senki meg nem látott.
- Szabó Miklós fordítása Pollák György korrekciójával.

A deduktív matematika kiteljesedése.

Megjegyzés.

- Platon biztos abban, hogy a matematikusok egyetértenek vele: a látható szakaszokra értelmetlen az a kérdés, hogy **van-e közös mértékük**: egy „hajszál vastagsága” mindkét megrajzolt szakaszra egész számszor mérhető föl.
- Az összemérhetőség kérdésének kizárólag **képzelt** tehát **absztrakt szakaszok esetén van értelme**.
- Tehát Theodorosz sem hivatkozhatott a szemléletre négyzet oldalai összemérhetetlenségének bizonyításánál.