

Történelmi mérföldkövek. ○○	A felsőoktatás kezdetei. oooooooooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	--	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az Európai Matematika Kezdetek.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2021. április 26.

Történelmi mérföldkövek. ●○○	A felsőoktatás kezdetei. oooooooooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
---------------------------------	--	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az európai civilizáció kezdete (a nem-görög területeken).

A folyamamenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják, zömmel gót és germán törzsek.
- TACITUS: ... nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek.

Az ókor vége, a korai középkor.

- 253-tól a Római Birodalom erjedése (a galliai légiók saját császárt választanak), lassú fölbomlása, erősödő keresztényüldözések. Fokozatosan kialakul a két császárság, a két birodalom.
- Népvándorlás a I.sz. IV. századtól: hunok, avarok; folyamatos támadások Róma ellen.

Történelmi mérföldkövek. ○○●	A felsőoktatás kezdetei. oooooooooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
---------------------------------	--	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az ókor vége, a korai középkor.

- 381: II. Egyetemes Konstantinápolyi Zsinat, a keresztény hitvallás végleges megfogalmazása.
- 391: A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.
- 434-452: Attila hódításai, a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, a központ a Kárpát medencében.
- 451: a Catalaunum-i csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához, a „döntetlen” csata után Attila Róma alá vonul (452).
- 451-511: Klodvig király: a Frank Állam megalapítása.
- 529: A nyugati szerzetesség megalapítása, Nursiai Benedek kolostort alapít Monte Cassinon, Benedek rend (bencések).
- További rendek, kolostorok, bennük **ISKOLÁK**.

Történelmi mérföldkövek. ○○	A felsőoktatás kezdetei. ●oooooooooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Iskolák.

Kezdet.

A VIII. századtól az egyes (világi) uralkodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. Nagy Károly meghívja iskolájába a yorki **ALCUIN**-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

a yorki Alcuin kb. 735-804

- kezdőknek szánt aritmetikai és geometriai traktátusokat írt,
- kb. 200 évig iránytmutatók voltak a francia és a brit iskolákban,
- Elhíresült tanítása: a világ teremtéséről (Noé bárkája).

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. o●oooooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	--	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Egyetemek.

- Bologna 1088,
- Párizs 1150,
- Oxford 1167, Cambridge 1209,
- Salamanca 1239 (III. Ferdinánd Kasztília királya),
- Krakkó 1364 (III. Kázmér),
- továbbiak a XII-XV. században: Bazel, Bécs, Heidelberg, Lipcse, Prága és Salerno.
- Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai:
 - Egyik sem független az egyháztól.
 - Az oktatás nyelve a **latin**, mivel ez a katolikus egyház hivatalos nyelve. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. o●oooooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	--	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az első egyetemek.

Az elérhető ismeretanyag.

- Kezdetben csak latin (római) forrásokra támaszkodik.
- A római matematika igen kezdetleges (számírás!), egyszerű és praktikus aritmetika csupán.
- Elérhető néhány görög mű, de nem autentikus, alacsony színvonalú latin fordításban.

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. oooo●ooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	--	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

A továbblépés kezdete.

- **SEVERINUS BOETIUS** (480-524, ősi római család sarja), az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján **traktátusokat** állít össze elemi aritmetikából és geometriából: Euklidész I. és II. könyvét lefordította, de a bizonyításokat — mint szerinte fölöslegesekeket — elhagyta.
- Mellékelte néhány (részben hibás) geometriai számítást. Pl. nem utalt azok közelítő jellegére. Számolások abakuszon.
- Nikomachosz Aritmetikáját, Arisztotelész, K. Ptolemaiosz egyes műveit is fordította.
- Keveset érthetett meg a lefordított művekből, matematikája tisztán empirikus.
- Leghíresebb műve: Consolitiones Philosophicae, amit gyaníthatóan fogsága (hítségés) alatt írt.

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. oooo●ooooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	--	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az egyetemek.

Iszlám kapcsolatok: mecsetiskolák.

- **GERBER** (kb. 940-1003, francia)
- Itáliában és Hispániában nevelkedett, előbb németföldi szolgálat után Reims, majd Ravenna püspöke, 999-ben pápává választották: II. Szilveszter.
- Vélhetően az első európai, aki a hindu-arab számokat használta.
- Természetesen a 0 még nem szám nála.
- Boetius tradícióinak folytatója, de nem haladta meg azt. *Könyvecske a számok osztásáról*, $\sqrt{3} \approx \frac{12}{7}$.
- Gerber-szabály: $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$ (gömbi derékszögű háromszögben, a befogó, β a rajta levő hegyesszög).

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. oooo●oooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---------------------------------------	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az egyetemek: Iszlám kapcsolatok: mecsetiskolák.

- Nagy Károly udvarába hívta a **ALCUIN**-t (735-804 a „yorki”), aki szintén írt matematikai traktátusokat, de rejtvényes tanító traktátusokat is.
- Egy elhíresült mondása: *A mai emberiség a vízözönt Noé bárkájában túlélte 8 lélek leszámozottja, ezért kevésbé tökéletes, mint a teremtés eredeti emberisége.* (a 8 ugyanis nem tökéletes szám)
- Egy rejtvény: *100 kosár gabonát osztunk szét úgy, hogy minden férfi 3 kosárral, minden nő 2 kosárral és minden gyerek 1/2 kosárral kap. Hány férfi, nő és gyerek között osztottuk szét a gabonát?*
- Megjegyzés. Ez, illetve az ilyen típusú feladatok igen népszerűek voltak e korban, főleg a keleti kultúrákban, pl. a „100 madár probléma”, de a pisai Leonardonál is.

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. oooo●oooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---------------------------------------	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

A megoldás.

Megoldandó a természetes számok fölött az

$$\begin{aligned}x + y + z &= 100 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 100\end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszer.

- A rejtvénynek 6 pozitív megoldása van:
- ezek (2, 30, 68), (5, 25, 70), (8, 20, 72), (11, 15, 74), (14, 10, 76), és (17, 5, 78).

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. oooo●oooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---------------------------------------	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az egyetemek.

A matematika szerepe a korai középkorban.

- Boetius: QUADRIVIUM: aritmetika, geometria, csillagászat, zene;** hosszú ideig ezt oktatták a teológia mellett.
- Később **TRIVIUM:** quadrivium, retorika, dialektika (a vitatkozás művészete → hitviták).
- A matematika (aritmetika, geometria) fontos az egyháznak, mert
- „ez készít föl a legjobban a hitvitákban való eredményes szereplésre”,
- alapvető a változó idejű ünnepnapok (pl. a húsvét) meghatározásában.

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsőoktatás kezdetei. oooo●oooo	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---------------------------------------	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az egyetemek.

A matematika szerepe a korai középkorban.

- Az udvari asztrológusok kivételezett helyzetben voltak, mert
 - ők határozták meg a fontos döntések meghozatalának legkedvezőbb időpontját,
 - ideértve még az orvosi beavatkozásokét is.
- Az asztrológia fölébe kerekedett az asztronómiának (a csillagászatnak), sőt olykor a matematikának is:
 - az egyetemeken több helyen az asztrológia keretében oktatták a matematikát, a csillagászatot, sőt,
 - az orvoslást is:
 - még Gallilei is az orvoslást is tanító asztrológia részleg tagja volt.

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsóktatás kezdetei. oooooooo●	A pisai Leonardo. oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------------	---------------	------------------------------------

Az egyetemek.

A görög tudományosság első föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civilizáció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- Az első manufaktúrák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.
- Az „ülő kereskedők” megjelenése, „kereskedelmi kirendeltségek” létrejötte. Hitelezések.
- Kapcsolat a „hispaniai mór államokkal”: tudomány, mecsetiskolák.
- **ROGER BACON** (1214-94): az első tudós, akit „eltiltottak az írástól”, de pápai megbízásból filozófiával foglalkozhatott. Ő — ellentétben legtöbb kortársával — előnyben részesítette a kísérleteket a spekulációval (skolasztika) szemben.

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsóktatás kezdetei. oooooooooooo	A pisai Leonardo. ●oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---	------------------------------------	---------------	------------------------------------

Az első „igazi” európai matematikus.

A PISAI LEONARDO (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei: Liber abaci (1202, 1228), Practica geometrie (1220), Flos (1225) és Liber quadratorum (1225).
- A könyvek címeiről:
- Liber abaci → Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve (abacus vagy abare az abaci eredete?),
- Flos „Virágocska”, zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is.
- Liber quadratorum → Négyzetszámok könyve (Sain M.??? sic!)

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsóktatás kezdetei. oooooooooooo	A pisai Leonardo. ●oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---	------------------------------------	---------------	------------------------------------

Leonardo: Liber abaci

Aritmetika.

- A „hindu-arab” számjegyek előnyben részesítését szorgalmazta.
- a mai értelemben vett törtek és az egységtörtek (az 1 számlálójú törtek) közötti konverzió:

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

- Egy érdekes jelölésrendszere:

$$\frac{1 \ 6 \ 2}{2 \ 9 \ 10} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}.$$

Történelmi mérföldkövek. oo	A felsóktatás kezdetei. oooooooooooo	A pisai Leonardo. ●oooooooooooo	Flos ooooo	Liber quadratorum. oooooooooooo
--------------------------------	---	------------------------------------	---------------	------------------------------------

Leonardo: Liber abaci

Egy érdekes feladat a XII. fejezetből.

7 anyóka mendegél Róma felé, minden anyókéval mendegél 7 öszvér, minden öszvéren 7 zsák van, minden zsákban 7 kenyér van, minden kenyér mellett 7 kés van, minden kés 7 tokban van. Mennyi mindezek összege?

Egy régebbi változat: RHIND 79. feladat.

- Van 7 ház, 49 macska, 343 egér, 2401 kalász, 16807 búzaszem.
- Vélhetően a következő feladatról van szó:
- Ha van 7 ház, minden házban 7 macska, minden macska megeszik 7 egeret, minden egér elpusztítana 7 kalászt, és minden kalászban 7 mag van, akkor hány szem gabona menekül meg?

Leonardo: Liber abaci

Középkori orosz kézirat.

Mendegél 7 anyóka, minden anyókánál 7 bot van, minden boton 7 ágacska, minden ágacskán 7 tarisznya, minden tarisznyában 7 lepény, minden lepényben 7 veréb, minden verébben 7 zúza.
Mennyi ez összesen?

XIX. századi angol nonszensz-vers (nursery rhyme).

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits,
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

Leonardo: Liber abaci

A probléma, amelyet mindenki ismer.

Hány pár nyúl jön a világra egy év alatt, ha kezdetben egyetlen páruk van, és minden egyes hónapban minden pártól egy újabb pár születik föltéve, hogy a párok a második hónaptól kezdődően produktívak.

Fibonacci sorozatok

- Az „eredeti”: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .
- Általában: $a_0, a_1, a_2, \dots$, ahol

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad \text{ha } n > 1.$$

Leonardo: Liber abaci, határozatlan egyenletek 1.

A 30 madár probléma:

Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonként 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké $\frac{1}{2}$. Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtákból?

A megoldás.

A feladat az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 30 \end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszerre vezet, amelynek egyetlen pozitív megoldása az $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$.

Leonardo: Liber abaci: határozatlan egyenletek 2.

Megjegyzés. E feladat egy variánsa az ókori kínai, hindu, valamint a kora-középkori arab forrásokból is ismert *100 madár problémának*.

Első lépés az általánosság felé: a lóvásárlási problémák.

1. Lóvásárlási probléma. Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

Leonardo: Liber abaci, határozatlan egyenletek 3.

- Ha s a ló ára, akkor megoldandó az:

$$x + \frac{1}{3}y = s$$

$$y + \frac{1}{4}x = s$$

- egyenletrendszer, x és y a „kupecék” pénze.
- A legkisebb egész megoldás:

$$x = (3 - 1) \cdot 4 = 8$$

$$y = (4 - 1) \cdot 3 = 9$$

$$s = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11$$

Leonardo: Liber abaci, határozatlan egyenletek 4.

Általánosítás 3 szereplőre.

2. Lóvásárlási probléma. A megoldandó egyenletrendszer most

$$x + \frac{1}{3}(y + z) = s$$

$$y + \frac{1}{4}(x + z) = s$$

$$z + \frac{1}{5}(x + y) = s$$

Megoldás 1.

- Általános jegyeket tartalmaz a **szöveges** megoldás.
- Új határozatlant vezet be: $x + y + z = t$,
- Kivonja belőle mindhárom korábbi egyenletét:
-

$$\frac{2}{3}(y + z) = \frac{3}{4}(x + z) = \frac{4}{5}(x + y) = t - s = D,$$

- A megoldandó egyenletrendszere így

$$y + z = \frac{3}{2}D$$

$$x + z = \frac{4}{3}D$$

$$x + y = \frac{5}{4}D$$

Megoldás 2.

- x, y, z -re egész értéket akar kapni, ezért D -t 24-nek választja,
- így egyenletrendszere

$$y + z = 36$$

$$x + z = 32$$

$$x + y = 30$$

- amiből $x = 13, y = 17, z = 19$.
- Megjegyzés.** Határozatlan egyenletrendszer esetén megoldása szerepel Diophantos Arithmetica c. könyvében, pl az I. 24 feladat megoldása.

Leonardo: Flos.

Palermoi János első problémája.

- Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.
- Mai jelölésekkel a következő egyenletrendszert kell megoldani.
-

$$x^2 + 5 = y^2$$
$$x^2 - 5 = z^2$$

- Leonardo megoldása $x = 3 + \frac{5}{12}$, $y = 4 + \frac{1}{12}$, $z = 2 + \frac{7}{12}$.
- A Liber quadratorumban több fejezetet szentelt e probléma általánosításainak.

Leonardo: Liber quadratorum.

Palermoi János első problémája általánosítása.

- A következő egyenletrendszert vizsgálja

$$x^2 + C = y^2$$
$$x^2 - C = z^2$$

- Speciális terminológiája: Ha x^2 és C megoldása e problémának, akkor C számot *CONGRUUM*-nak, míg az x^2 négyzetet *QUADRATUS CONGRUENTUS*-nak nevezi.
- A műben részletesen, nagy gonddal foglalkozik a congruus-congruentus párok keresésével.

Leonardo: Flos.

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo elemzése.

- $x \notin \mathbb{N}$, mert $x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$, amiből egyrészt $x < 2$, másrészt $x \neq 1$, mert $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$.
- $x \notin \mathbb{Q}^+$, sőt racionális szám négyzetgyöke sem lehet, mert az egyenlet $x = \frac{20-20x^2}{10+x^2}$ alakban is írható, és a jobb oldalon ez esetben racionális, míg a bal oldalon irracionális szám állna.
- Megmutatta (nem korrekten), hogy x nem lehet kvadratikus irracionális, például $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ alakú szám sem ($a, b \in \mathbb{Q}^+$).

Leonardo: Flos.

Palermoi János második problémája.

- Egy közelítő megoldás hatvanados törttekkel:
-

$$x = 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40$$
$$= 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3}$$
$$+ \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}.$$

- Ez $3 \cdot 10^{-11}$ pontosságú, csak a hatodik hatvanados jegy nagyobb a korrektnél kb. másfélszer.
- Decimálisan: 1,36883102451989026063100137174211

Leonardo: Flos.

Palermoi János második problémája.

Megjegyzések.

1.

Pontatlansága ellenére kijelenthetjük, hogy ez volt az első komoly kísérlet a harmadfokú egyenletek gyökjelekkel való, tehát algebrai megoldására.
2.

Más írásaiból azonban az tűnt ki, hogy osztotta az iszlám tudósok, így Omar Khajjam, azon véleményét, hogy a harmad- és magasabb fokú egyenletek csak geometriailag oldhatók meg egzaktan.
3.

Előbbi eljárásában impliciten az is benne van, hogy Euklidész X. könyve nem írja le az összes algebrai irracionálist, hiszen egyenletének nincs megoldása az ott tárgyalt $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, illetve $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ alakú irracionálisok körében.

Leonardo: Liber quadratorum.

A mű első könyve — amely zömmel pitagoraszai számhármassokkal foglalkozik — a következő bejelentéssel kezdődik.
Az első n páratlan szám összege n^2 .
Itt csak illusztrálja állítását, a bizonyítás a könyv végén van.

Az illusztráció

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Leonardo: Liber quadratorum.

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

A feladat pontosabb megfogalmazása.

Keressünk két olyan négyzetszámot, amelyek összege is négyzetszám.

Tehát (mai szóhasználattal): *Pithagoraszai számhármassokat* keres, azaz az

$$x^2 + y^2 = z^2$$

egyenlet pozitív egész megoldásait.

Leonardo: Liber quadratorum.

Megjegyzés.

NEM AD MEG ELJÁRÁST, KONKRÉT SZÁMOKKAL DOLGOZIK, DE...

Leonardo: Liber quadratorum.

1. módszer.

- Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk.
- Legyen $y^2 = 9 = 3^2$.
- Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat,
 $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$,
- tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.

Elemzés 1.

- Tekintsük a kiindulási páratlan négyzetszámnál kisebb összes páratlan számot. Ezek összege a keresett másik négyzetszám. A kettő összege pedig nyilván megint négyzetszám hiszen 1-gyel kezdődő egymást követő páratlan számok összege.
- Világos, hogy e módszer — a kirótt föltétel mellett — teljesen általános, hiszen ha d páratlan négyzetszám, akkor
-

$$y^2 = d$$

$$x^2 = 1 + 3 + \dots + (d - 2) = \left(\frac{d - 1}{2}\right)^2$$

$$z^2 = x^2 + y^2 = 1 + 3 + \dots + (d - 2) + d = \left(\frac{d + 1}{2}\right)^2,$$

Elemzés 2.

- ugyanis

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \left(\frac{(2n - 1) + 1}{2}\right)^2 = n^2.$$

- Ezután bizonyítást (illusztrációt) is ad Euklidesz Elemek II. könyve stílusában geometriai eljárással: egy egyenesszakasz alkalmas fölosztásával.

Leonardo: Liber quadratorum.

2. módszer: négygyel osztható négyzetszámok.

Kiindulási észrevétele a következő fölbontás (amit szóvegesen ad meg):

$$y^2 = 4k = 2(2k) = (2k - 1) + (2k + 1).$$

Leonardo számolása:

- $y^2 = 36 = 6^2 = 17 + 19$,
- $x^2 = 1 + \dots + 15 = 64 = 8^2$,
- $z^2 = x^2 + y^2 = 1 + \dots + 15 + 17 + 19 = 100 = 10^2$.

Általánosan.

$$\begin{aligned}
 y^2 &= 4k = 2(2k) = (2k - 1) + (2k + 1) \\
 x^2 &= 1 + \dots + (2k - 3) = (k - 1)^2 \\
 z^2 &= 1 + \dots + (2k - 3) + ((2k - 1) + (2k + 1)) = (k + 1)^2
 \end{aligned}$$

3. módszer: 3-mal osztható páratlan négyzetszámok.

- Csak számokkal adjuk meg.
- Az alap: $y^2 = 9k = 3(3k) = (3k - 2) + 3k + (3k + 2)$.
- Leonardo példája:

$$\begin{aligned}
 y^2 &= 81 = 3 \cdot 27 = 25 + 27 + 29 = 9^2, \\
 x^2 &= 1 + \dots + 23 = 144 = 12^2, \\
 z^2 &= 1 + \dots + 23 + (25 + 27 + 29) = 144 + 81 = 225 = 15^2.
 \end{aligned}$$

4. módszer: 6-tal osztható négyzetszámok.

- A legkisebb ilyen a 36, de a 144-et választja.
- A számpélda

$$\begin{aligned}
 y^2 &= 144 = 6 \cdot 24 = (19 + 21) + (23 + 25) + (27 + 29) \\
 x^2 &= 1 + 3 + \dots + 17 = 81 = 9^2 \\
 z^2 &= (1 + 3 + \dots + 17) + (19 + 21 + \dots + 29) \\
 &= 81 + 144 = 225 = 15^2.
 \end{aligned}$$

4. módszer: 6-tal osztható négyzetszámok.

- Általánosan a probléma:
-

$$\begin{aligned}
 y^2 &= 36k = (6k - 5) + \dots + (6k + 5) \\
 x^2 &= 1 + \dots + (6k - 7) = (3k - 3)^2 \\
 x^2 + y^2 &= 1 + \dots + (6k - 7) + (6k - 5) + \dots + (6k + 5) \\
 &= 36k + (3k - 3)^2 = (3k + 3)^2
 \end{aligned}$$