

A KLASSZIKUS KOR MATEMATIKÁJÁNAK ELSŐ ÖSSZEGZÉSE.

Euklidesz: ELEMEN

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2021. március 22.-29.

Előzmények 1.

Euklideszről.

1. Euklidesz az Akadémián tanulhatott, de Alexandriában dolgozott i.e. 300 körül.
2. Részben a klasszikus kor után élt (munkásságának zöme már ide esett), de annak szellemében írta könyveit (csak szemelvények):

Pseudearia (hamis tételek, álbizonyítások)
csak a címe ismert.

Dodomenia (adott mennyiségek): „hogyan számíthatók ki bizonyos adott mennyiségekből más olyanok, amelyek az előbbiekkal összefüggenek, de közvetlenül nem ismertek”
Egyesek szerint ez az euklideszi algebra, DE Szabó Árpád szerint félreértették az eredeti szövegeket.

Kúpszeletekről (Apolloniosz), Optika (perspektívákról),
Katoptrika (tükörképek).

Sectio Canonis (zeneelmélet),

Phainomena (elemi asztronómia, a csillagok kelése-nyugvása).

Előzmények 2.

Az Elemek a klasszikus kor matematikája egy részének enciklopédikus összefoglalása, mai szóhasználatával **nem formális axiómatikus elméletként**.

Korábban írtak „elemeket”:

a khioszi Hippokratesz, a platonista Leon, a magnésiai Theudiosz.

Ezeket felhasználta, továbbá

Eudoxos és Theaitetosz számos eredményét építette be.

Előzmények 3.

Milyen formában maradt fenn?

1. A megírás korából nincs fennmaradt kézirat.
2. Későbbi görög kommentárok: az alexandriai Heron, Pappos (I.sz. 3. sz.), az alexandriai Theon és a neoplatonista Proklosz (I.sz. 4. és 5. sz.) a legjelentősebbek.
3. A tőlük származó görög nyelvű töredékek és a későbbi arab fordítások az autentikus források.
4. A legrégebbi teljes kézirat 10. századi és a Vatikáni Könyvtárban őrzik. Görög nyelvű változat a Theon előtti időkből.
5. Bath-i Adelard latin fordítása 1142.

Proklosz véleménye 1.

1. Minthogy azt állítuk, a matematika föltételekből kiinduló tudomány, amely bizonyos princípiumokból (elvekből) vezet le következtetéseit
...annak, aki Elemeket állít össze, külön kell tárgyalnia a tudomány princípiumait, és külön azokat a dolgokat, amelyeket az előbbiekből vezet le. A princípiumokról nem kell számot adnia (ezeket nem kell bebizonyítaia). De föltétlenül be kell bizonyítania mindazt, amit a princípiumokból következtet...
2. A princípiumok: definíciók, posztulátumok és axiómák.
3. Amik a princípiumokból következnek: theorémák (tételek) és szerkesztési (konstrukciós) feladatok.
4. Egy összegzés.
Proklosz kettéosztja a matematika egészét princípiumokra és theorémákra.
5. A matematikus a princípiumokat nem bizonyítja be, de mindazt bizonyítania kell, amit belőlük következtet.

Proklosz véleménye 2.

1. Látni fogjuk, hogy Proklosz hűen jellemezte Euklidesz művét, és a klasszikus kor végének matematikáját.
2. De nagy kérdés: **Hogyan jutottak el a görögök oda, hogy így értsék és így építsék föl a matematika rendszerét, már Euklidesz előtt?**
3. Ahhoz, hogy az Elemekhez hasonló művet írjon valaki, tényleg szét kell választani a matematikai elveket, és a belőlük levezetett (bebizonyított) tételeket.
4. Ugyancsak alapvető kérdés: **Mi volt a változást kiváltó ok, mi készítette erre az útra a görögöket?**
5. Erre később válaszolunk, előbb áttekintjük az Elemeket.

Az Elemek szerkezete.

- 13 „könyvből” áll.
- Kevés kivétellel mindegyik definíciókkal kezdődik.
- Ezeket változó számú tétel és azok szigorú bizonyítása követi.
- Az első könyv más: a definíciók után 5 **posztulátum** (mai terminológiával axióma) majd 9 **axióma** (ma axióma séma) következik a tételek előtt.
- **Megjegyzés.** Az axiómák száma kiadásról-kiadásra változhat, olykor a posztulátumokhoz csatolják.

Az I. Könyv.

Definíciók.

- I.1.D** Pont az, aminek nincs része.
- I.2.D** A vonal szélesség nélküli hosszúság.
- I.4.D** Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.
- I.7.D** Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.
- I.8.D** A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek egymást metszik, és nem fekszenek egy egyenesen.
- I.10.D** Ha egy egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.
- I.11.D** Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.

Az I. Könyv.

Definíciók.

I.15.D A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül [ezt nevezzük körvonalnak] úgy, hogy az e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvő pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.

I.19.D Egyenes vonalú alakzatok (sokszögek) azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több oldal vesz körül.

I.23.D Párhuzamosok azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

Az I. Könyv.

Posztulátumok.

P1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.

P2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.

P3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.

P4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.

P5. *És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.*

Az I. Könyv.

Axiómák.

A1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.

A2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.

A3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.

A4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.

A5. Ugyanazok kétszeresei is egyenlők.

A6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.

A7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.

A8. Az egész nagyobb a résznél.

A9. Két egyenes nem fog közre területet.

Az I. Könyv.

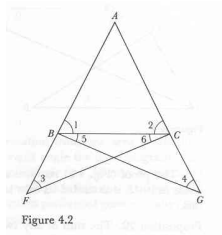
I.4. Tétel.

Ha két háromszögnek két-két oldala egyenlő, és egy-egy szöge egyenlő, az, amelyet az egyenlő oldalak fognak közre, akkor az alapok is egyenlők, és a háromszögek is egyenlők, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek.

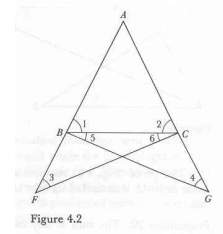
Az I. Könyv.

I.5. Tétel.

- Az egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők.
- Megjegyzés.** E tétel tankönyvi bizonyításai a száraz alkotta szög felezőjét használja, DE Euklidesz bizonyítása szebb és egyszerűbb:



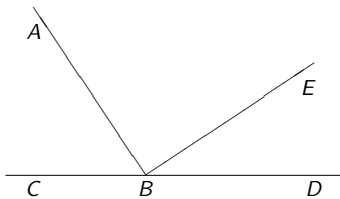
Az I.5. Tétel bizonyítása.



- $AFC_{\Delta} \cong AGB_{\Delta}$ az előbbi tételből.
- Ezért $FC = BG$, $\angle 1 + \angle 5 = \angle 6 + \angle 2$, és $\angle 3 = \angle 4$, $BF = CG$ lévén, $BFC_{\Delta} \cong CGB_{\Delta}$ ugyancsak az előbbi tételből.
- Ezért $\angle 5 = \angle 6$, így a 3. axióma alapján $\angle 1 = \angle 2$.

I.14. Tétel.

Ha valamely egyenesen levő pontnál két egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szöget alkotnak egymás mellett, akkor (ugyanazon az) egyenesen van a két egyenes.



Az I. Könyv.

Tételek.

- I.29.** Ha párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemkötti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek.
- Megjegyzés.** Itt hivatkozik először az V. posztulátumra!
- I.41.** Ha egy paralelogrammának ugyanaz az alapja, mint egy háromszögnek, és ugyanazon párhuzamosok közt fekszik, akkor a paralelogramma kétszerese a háromszögnek.

Az I. Könyv.

Tételek.

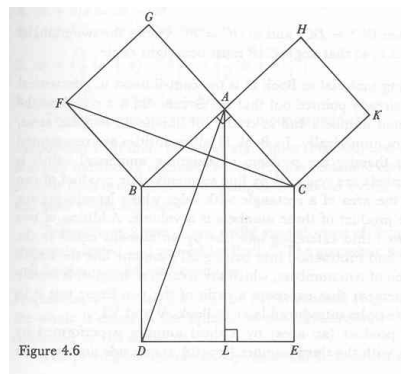
I.47. A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemkötti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével.

- **Megjegyzés.** Íme a nevezetes „Pithagorasz tétel”, amelyet már évszázadok óta ismernek.

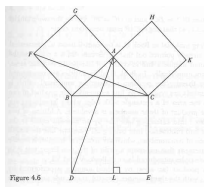
I.48. Ha egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög.

- **Megjegyzés.** Ez pedig a megfordítása.

Az I.47. Tétel bizonyítása.

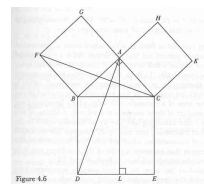


Az I.47. Tétel bizonyítása.



- A G, A, C és a B, A, H pontok egy-egy egyenesen vannak az I.14. Tétel szerint.
- Az FBC háromszög és az $FBAG$ négyzet ugyanazon párhuzamosok közt fekszik, alapjuk közös.
- Az I.41. Tétel alapján: FBC háromszög fele az $FBAG$ paralelogrammának.
- $FBC_{\Delta} \cong ABD_{\Delta}$ (I.4. Tétel.)

Az I.47. Tétel bizonyítása.



- A BDL téglalap és az ABD háromszög alapja ugyanaz és ugyanazon párhuzamosok közt fekszenek.
- I.41. $\Rightarrow$ a háromszög fele a téglalapnak.
- 5. Axióma $\Rightarrow$ az $FBAG$ négyzet egyenlő a BDL téglalappal.
- Hasonlóan: az $ACKH$ négyzet egyenlő az LEC téglalappal.
- A 2. Axióma alapján a bizonyítás kész.

A II. Könyv (a „geometriai algebra”).

Az 1. - 10. Tételek mai jelölésekkel.

$$a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots \quad (1)$$

$$(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2 \quad (2)$$

$$(a + b)a = ab + a^2 \quad (3)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (4)$$

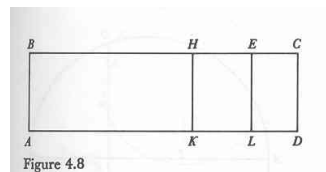
$$ab + \left(\frac{1}{2}(a + b) - b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(a + b)\right)^2 \quad (5)$$

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2 \quad (6)$$

A II. Könyv tételei eredeti szöveggel.

II.1. Ha van két szakasz, és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölöstatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével.

- Bizonyítás.**

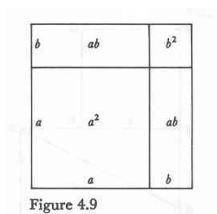


- Formalizálva: $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$

A II. Könyv tételei eredeti szöveggel.

II.4. Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra emelt négyzet egyenlő az egyes részekkel szerkesztett négyzeteknek meg a két rész által közrefogott téglalap kétszeresének összegével.

- Bizonyítás.**

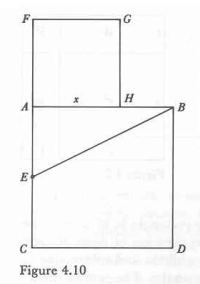


- Formalizálva: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

A II. Könyv tételei eredeti szöveggel.

II.11. Osszunk ketté egy adott szakaszt, hogy a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel.

- Bizonyítás.**



A II.11. Tétel bizonyítása (vázlat)

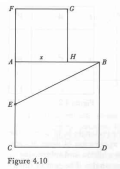


Figure 4.10

- A fölosztandó szakasz az AB , $ABCD$ az ezen oldallal szerkesztett négyzet.
- E az AC felezőpontja, az AC meghosszabbítására fölmérjük E -ből EB -t, kapjuk az F pontot.
- Megszerkesztjük az $FAHG$ négyzetet, a GH oldal meghosszabbítása CD -t K -ban metszi.
- Állítjuk, hogy H a keresett osztópont.

A III. Könyv (elemi geometria).

Tételek.

- III.2.** Ha egy körön választunk két tetszőleges pontot, akkor a pontokra illeszkedő szakasz a körön belül halad.
- III.9.** Ha egy körön belül választunk egy pontot, s e pontból a körhöz több mint két egyenlő szakasz vezet, akkor a választott pont a kör középpontja.
- III.14.** Egy körben az egyenlő húrok egyenlő távol vannak a középponttól, és a középponttól egyenlő távol levő húrok egyenlők egymással.
- III.20.** Egy körben a középponti szög kétszerese, mint a kerületi, ha e szögek ugyanazon íven nyugszanak.

A III. Könyv (elemi geometria).

Definíciók.

- III.1.D** Körök egyenlők, ha átmérőik egyenlők vagy a sugaraik egyenlők.
- III.2.D** Azt mondjuk, hogy egy egyenes érint egy kört, ha metszi a kört, de nem szelik át egymást.
- III.6.D** Az egy egyenes (húr) és (hozzá tartozó) körív által közrefogott alakzat a körszelet.
- III.8.D** Ha a körszelethez tartozó íven választunk egy pontot, és belőle a körszelet alapegyenesének végpontjaiba egyeneseket húzunk, akkor a meghúzott egyenesek által közrefogott szög körszeletbeli szög.
- III.11.D** Körszeletek hasonlóak, ha egyenlő szögeket fogadnak be, vagy (más kifejezéssel) ha a bennük levő szögek (D8) egyenlők egymással.

A IV. Könyv (elemi geometria).

Definíciók.

- IV.3.D.** Azt mondjuk, hogy egy egyenes vonalú alakzatot beírunk egy körbe, ha a beírt alakzat minden szöge a körvonalon van.
- IV.4.D** Azt mondjuk, hogy egy egyenes vonalú alakzatot kör köré írunk, ha a köréírt alakzat minden oldala érinti a kört.
- IV.5.D** Hasonlóképp azt mondjuk, hogy egy kört beírunk egy alakzatba, ha a körvonal ennek minden egyes oldalát érinti.
- IV.6.D** Azt mondjuk, hogy egy kört egy alakzat köré írunk, ha ennek minden egyes szöge a körvonalon van.

A IV. Könyv (elemi geometria).

Tételek.

- IV.2.T.** Írjunk adott körbe háromszöget, amelynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel!
- IV.3.T.** Írjunk adott kör köré háromszöget, amelynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel!
- IV.4.T.** Írjunk adott háromszögbe kört!
- IV.5.T.** Írjunk adott háromszög köré kört.
- IV.11.T.** Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget.

Az V. Könyv (Eudoxos).

Definíciók.

- V.1.D** Egy kisebb mennyiség egy nagyobb része, ha osztja a nagyobbat. [Azaz maradék nélkül megvan benne, tehát egész számú többszöröse.]
- V.3.D** Az *arány* két egynemű [egyenlő dimenziójú] mennyiség nagyságbeli viszonya.
- V.4.D** Mennyiségek egymáshoz viszonyított arányáról akkor beszélünk, ha az egyik többszöröse meghaladja a másikat.
- **Megjegyzés.** Euklidesz — ellentétben Archimédésszel — nem mondja ki követelményként, hogy egynemű mennyiségek kielégítik ezt a föltételt, de többnyire hallgatólagosan, a X.1.-ben ki is mondvá, él ezzel. Lásd a tétel utáni megjegyzést.

Az V. Könyv (Eudoxos: Mennyiségek elmélete).

Definíciók (csak mai terminológiával).

- V.5.D** Legyenek a, b, c, d mennyiségek. Ezekre fönáll, hogy

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

- Ha a, c -t tetszőleges egész számmal, mondjuk m -mel, míg b, d -t tetszőleges egész számmal, mondjuk n -nel megszorozzuk, akkor m, n bármely választásánál
-

$$\begin{aligned} ma < nb &\Rightarrow mc < nd, \\ ma = nb &\Rightarrow mc = nd, \\ ma > nb &\Rightarrow mc > nd. \end{aligned}$$

Az V. Könyv (Eudoxos: Mennyiségek elmélete).

Tételek (csak mai terminológiával).

Legyenek $a, b, \dots$ tetszőleges mennyiségek, m, n (pozitív egész) számok.

V.1. $ma + mb + mc + \dots = m(a + b + c + \dots)$

V.4. Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor

$$\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}.$$

V.12. Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, akkor

$$\frac{a}{b} = \frac{a + c + e}{b + d + f}.$$

V.17-18. Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor

$$\frac{a \mp b}{b} = \frac{c \mp d}{d}.$$

A VI. Könyv (alakzatok hasonlósága).

Definíciók.

- VI.1.D** Sokszögek hasonlóak, ha a szögeik egyenként megegyeznek és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak.
- VI.3.D** Azt mondjuk egy szakaszcsoportról, hogy folytonos arányban van fölcsztva, ha a nagyobb szelet úgy aránylik a kisebbhez, mint a teljes szakasz a nagyobb szelethez.
- VI.4.D** Egy alakzat magassága a csúcsáról az alapjára bocsátott merőleges.

Tételek.

- VI.1** Az ugyanazon magasságú háromszögek és paralelogrammák úgy aránylanak egymáshoz, mint alapjaik.

A VI. Könyv (alakzatok hasonlósága).

Tételek.

- VI.21.** Ugyanazon sokszöghöz hasonló alakzatok egymáshoz is hasonlóak.
- VI.25.** Szerkesztünk adott sokszöghöz hasonló és egyúttal egy másik adott sokszöggel egyenlő területű alakzatot.

A VI. Könyv (alakzatok hasonlósága).

Tételek.

- VI.4.** Háromszögeknek, melyek szögei egymással egyenlők, arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, mégpedig az egyenlő szögekkel szemközti oldalak felelnek meg egymásnak.
- VI.6.** Ha két háromszögnek egy-egy szöge egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak, egyenlők a háromszögek szögei, mégpedig a megfelelő oldalakkal szemközti szögek egyenlők.
- VI.8.** Ha egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy merőleget bocsátunk, a merőleges melletti háromszögek mind a teljes háromszöghöz, mind egymáshoz hasonlóak.
- VI.10.** Osszunk föl fölcsztatlan szakaszt adott fölcsztott szakaszhoz hasonlóan. (**A párhuzamos szelők tétele.**)

A VII. Könyv (az első aritmetikai).

- VII.1.D** Az **egység** az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk.
- VII.2.D** A **szám** az egységekből összetevődő sokaság.
- VII.3.D** Egy kisebb szám egy nagyobbban **hányada** (része), ha osztja a nagyobbat.
- VII.12.D** **Prímszám**, amelyik csak az egységgel osztható. (**A8**)
- VII.13.D** Számok egymáshoz **relatív príme**k, ha csak az egység közös osztójuk.
- VII.14.D** **Összetett** az a szám, amelyiket valamely szám oszt.
- VII.17.D** A két szám összeszorzásakor keletkező számot **síkszámnak** nevezzük, az összeszorzott számokat pedig az oldalaknak.
- VII.23.D** Egy szám **tökéletes**, ha egyenlő osztói (részei) összegével.

A VII. Könyv (az első aritmetikai).

Tételek.

VII.1. Ha van két nem egyenlő számunk, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sohasem osztja a megelőző számot, míg csak nem az egység a maradék, akkor az eredeti számok relatív príme.

VII.2. Keressük meg két adott nem relatív prím szám legnagyobb közös osztóját.

VII.16. A két szám összeszorzásakor keletkező számok egyenlők egymással [függetlenül a sorrendtől].

VII.30. Ha két számot megszorunk egymással, és a szorzatukat osztja valamely prímszám, akkor a tényezők egyikét is osztja.

VII.31. Bármely szám prím, vagy osztja egy prímszám.

VII.36. Keressük meg három adott szám legkisebb közös többszörösét.

A VIII. Könyv (a második aritmetikai: sorozatok).

Tételek.

VIII.1. Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat szélső tagjai relatív príme, akkor a sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, amelyeknek ugyanaz az aránya, mint nekik.

VIII.6. Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat első tagja nem osztja a másodikat, akkor egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat.

VIII.14. Ha egy négyzetszám oszt egy másikat, akkor az oldala is osztja a másiknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala osztja a másiknak az oldalát, akkor az egyik négyzetszám is osztja a másik négyzetszámot.

VIII.22. Ha egy háromtagú mértani sorozat első tagja négyzetszám, akkor a harmadik is négyzetszám.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

Tételek.

IX.2. Ha két szám összeszorzásakor négyzetszám keletkezik, akkor a számok hasonló síkszámok.

IX.11. Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, akkor egy kisebb tag egy nagyobbban valamely, a sorozatban előforduló szám szerint van meg.

IX.14. Prímszámok legkisebb közös többszörösét egyetlen más prímszám sem osztja, csak amelyek eredetileg is osztják.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

Tételek.

IX.20. *Prímszámok bármely adott sokaságánál van több.*

Bizonyítás. (az eredeti) Legyenek az adott prímszámok a, b és c . Azt állítom, hogy több prímszám van, mint a, b és c .

- Vegyük ugyanis a, b és c legkisebb közös többszörösét, ami — a VII. 36. Tétel szerint — abc és tekintsük az $d = abc + 1 = e + 1$ számot.
- Ez vagy prímszám, vagy összetett szám.
- Legyen először prím. Találtunk tehát az a, b, c számoknál több prímet, ezeket és még d -t.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

A bizonyítás folytatása.

- Ne legyen most d prím. Ekkor osztja valamely prímszám (VII. 31. Tétel). Ossza a g prím.
- Azt állítom, hogy g az a , b és c egyikével sem azonos.
- Tegyük föl ugyanis, hogy az a , b és c osztják e -t, tehát g is osztja e -t (ugyanis a , b és c az összes prím).
- Viszont g d -t is osztja, tehát a maradék egységet is osztja g , ami ellentmondás, hiszen g szám.
- g tehát nem azonos az a , b , c számok egyikével sem.
- A feltétel szerint prím, tehát találtunk az adott a , b , c prímeknél több prímet, a -t, b -t, c -t és g -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

A bizonyítás folytatása.

- 1. Megjegyzés.** Az oszthatóság egy elemi tulajdonságát használja, amelyet — két másikkal egyetemben — sohasem fogalmaz meg, de ismertnek tételez föl: ha $z = u + v$, $t|z$, $t|u$ akkor $t|v$.
- 2. Megjegyzés.** Az iménti bizonyítás lényegében megegyezik azzal, amelyet az elemi számelméleti tanulmányainkban megismertünk, csak ott a föltételben szereplő „összes” prímszám a $p_1, p_2, \dots, p_k$. Euklidesz bizonyítása lényegében csak azt használja ki, hogy abból a föltételből, hogy csak véges sok prímszám létezik, szükségképp ellentmondásra jutunk. Tehát tulajdonképpen azt igazolja, hogy végtelen sok prímszám van, de ezt így nem fogalmazza meg, hiszen az ő világa véges. (Arisztotelesz kétféle végtelene.)

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

A Párosról és a Páratlanról szóló tanítás.

- IX.21.** Bárhány páros számot adunk össze, az összeg páros.
- IX.23.** Ha összeadunk valahány páratlan számot, amelyek páratlan sokan vannak, akkor az összeg is páratlan lesz.
- IX.25.** Ha egy páros számból páratlant vonunk ki, a maradék páratlan.
- IX.30.** Ha egy páratlan szám oszt egy párosat, akkor a felét is osztja.
- IX.31.** Ha egy páratlan szám relatív prím valamely számhoz, akkor a kétszereséhez is relatív prím.
- IX.33.** Ha egy szám fele páratlan, akkor a szám csak párosszor páratlan alakban áll elő.

A IX.33. Tétel bizonyítása.

- Legyen az a szám fele páratlan.
- Ha a előáll párosszor páratlan alakban, akkor a fele, amely páratlan, párosszor van meg benne.
- Állítom, hogy csak ilyen alakban áll elő.
- Ha ugyanis a előállna párosszor páros alakban, akkor egy páros szám páros számszor lenne meg benne, úgyhogy a felét is osztaná egy páros szám, noha az páratlan, ami **ellentmondás**,
- a tehát csak párosszor páratlan alakban áll elő.
- Éppen ezt kellett megmutatni.

A IX. Könyv (a harmadik aritmetikai: számelmélet).

A könyv utolsó tétele.

IX.36. *Ha az egységtől indulva kétszeres arányban mértani sorozatot alkotunk addig, amíg az összeg prímszám nem lesz, és ezt megszorozzuk az utolsó taggal, akkor tökéletes számot kapunk.*

Mai terminológiával, szimbolikával

A

$$(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1})2^{k-1}$$

szám tökéletes, ha az első tényező, azaz

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

prímszám.

Egy kis kitekintés.

1. Euklidesz tétele azt mondja, hogy a $P_n = 2^{n-1}(2^n - 1)$ alakú számok tökéletesek, valahányszor a második tényező prímszám.
2. Az ókori görögök 4 tökéletes számot ismertek: 6, 28, 496, 8128
3. A geresai Nichomachosz (I.sz.l.-II.sz.) sejtései:
 - 3.1 A páros tökéletes számok fölváltva 6-ra és 8-ra végződnek.
 - 3.2 A k -adik tökéletes szám k jegyű.
 - 3.3 Mindkettőt megcácolták a XV.-XVI. században: az ötödik tökéletes szám a 33.550.336, míg a következő a 8.589.869.056.
4. Euler igazolta, hogy minden páros tökéletes szám az említett alakú.
5. Ez alapján egyszerűen igazolható, hogy minden páros tökéletes szám 6-ra vagy 28-ra végződik.
6. 2018-ban 51 páros tökéletes szám volt ismert, az a sejtés, hogy végtelen sok van.
7. Nem ismert, hogy van-e páratlan tökéletes szám.

A X. Könyv (az irracionálisok ókori elmélete).

X.1.D Mennyiségeket összemérhetőeknek mondunk, ha ugyanazon mértékkel mérhetők, összemérhetetleneknek pedig, ha nem található hozzájuk közös mérték.

X.4.D És nevezzük az adott szakasz négyzetét racionálisnak, és az azzal összemérhető felületeket racionálisnak, az azzal összemérhetetleneket pedig irracionálisoknak, az őket előállító szakaszokat — ti. ha a felületek négyzetek, magukat az oldalakat, ha pedig valamely más sokszögek, a velük egyenlő négyzeteket fölrajzoló szakaszokat — irracionálisoknak.

X.1. Tétel. Ha adva van két nem egyenlő mennyiség és a nagyobbikból levonunk a felénél többet, és a maradékból ismét a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, amely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

A X.1. Tétel bizonyítása 1.

- Legyen a két nem egyenlő mennyiség a, c és $a > c$.
- Az V.4. Definíció — mennyiségek egymáshoz viszonyított arányáról akkor beszélünk, ha az egyik többszöröse meghaladja a másikat — értelmében c -nek van olyan többszöröse, amely meghaladja a -t. Legyen ez $dc > a$.
- **Megjegyzés.** Euklidesz eredeti bizonyításában $d = 4$, amit úgy használ, hogy az nem szorítja meg az általánosságot, de csak 3 lépést tesz.
- Adjuk meg a következő $e_1, \dots, e_{d-1}$ mennyiségeket:
-

$$e_1 > \frac{a}{2}, \quad e_2 > \frac{a - e_1}{2}, \quad e_3 > \frac{a - (e_1 + e_2)}{2}, \dots, \\ e_{d-1} > \frac{a - (e_1 + \dots + e_{d-2})}{2}$$

A X.1. Tétel bizonyítása 2.

- Az a mennyiségből ezután levonjuk e_1 -et, majd az $a - e_1$ mennyiségből az e_2 -t, az $a - (e_1 + e_2)$ -ből az e_3 -at és így tovább, összesen $d - 1$ számú lépést teszünk.
- Látható: az $e_1, \dots, e_{d-1}$ mennyiségeket úgy határozzuk meg, hogy a levonások mindig elvégezhetők legyenek, azaz pozitív mennyiség maradjon minden egyes lépés után.
- Tekintsük most a dc mennyiségeket, és abból is vonjunk le $d - 1$ számú lépésben mindig c -t. Ez esetben mindig az adott (kapott) mennyiség felénél kevesebbet vonunk le.
- Hasonlítsuk most össze a két eljárásunkat.

A X.1. Tétel bizonyítása 3.

- Mivel $dc > a$,

•

$$\begin{aligned} dc - c &= (d - 1)c > a - e_1 \\ (d - 1)c - c &= d - 2c > a - (e_1 + e_2) \end{aligned}$$

⋮

$$(d - (d - 2))c - c = c > a - (e_1 + \dots + e_{d-1}).$$

- Az utolsó egyenlőtlenség éppen a bizonyítandó, hiszen

•

$$\begin{aligned} (d - (d - 2))c - c &= c > a - (e_1 + \dots + e_{d-1}) = \\ &= (\dots((a - e_1) - e_2) - \dots - e_{d-2}) - e_{d-1}. \end{aligned}$$

A X.1. Tétel bizonyítása 4.

A X.1. Tétel bizonyítása 5.

Megjegyzések.

1. Euklidesznél a fönti bizonyításban $d = 4$, de gondolatmenete megegyezik az általunk leírt általános esetről alkalmazottal.
2. Euklidesz megjegyzi: „hasonló a bizonyítás, ha a fele részeket vonjuk le”.

Vegyük észre: Euklidesz azt használta — hivatkozva az V. könyv 4. definíciójára —, hogy
... ha két nem egyenlő mennyiség közül a kisebbiket véges számú lépésben önmagához adjuk, akkor a nagyobbiknál nagyobb mennyiséget kapunk.

DE az idézett definíció erre nem jogosít, az csak arányuk létezéséről szól.

Archimedesz megjegyzése.

Archimédész rámutatott, hogy ezt posztulálni kellett volna, amit Eudoxos meg is tett. Archimédész ugyancsak posztulátumként használta, azóta nevezik **Archimédész - Eudoxos axiómának**.

A X.1. Tétel bizonyítása 6.

Kommentárok.

1. A kutatások szerint a X. könyv legnagyobb része Eudoxosztól és Theaitetosztól ered, így lehet, hogy Euklidesz „egyszerűbbre való törekvésével” találkozunk itt.

A. DE MORGAN rövid summázata: „Euklidesz e könyvben összegzi az összes olyan szakaszra vonatkozó ismeretet, amelyek (modern terminológiával) megadhatók, mint

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},$$

ahol a, b összemérhető szakaszok.”

2. Világos, hogy nem az összes irracionális reprezentálható ílmódon, Euklidesz e részben a geometriai algebrájával (a II. könyv tartalma) kezelhető esetekre szorítkozott.

A X. Könyv befejezése.

Egy régen várt tétel.

A 115. Tétel (az utolsó) után következik a

X.27. Függelék. *Mutassuk meg, hogy a négyzetekben az átló lineárisan összemérhetetlen az oldallal.*

A XI. - XIII. Könyvek.

Egybefüggő anyag, definíciók is csak a XI. Könyvben vannak, együtt tárgyaljuk a három könyvet. Valamennyi téreometriával foglalkozik, e mellett alakzatok területével és testek térfogatával kapcsolatos tételeket is tartalmaznak.

Definíciók 1.

XI.1.D Test az, aminek hosszúsága, szélessége és magassága is van.

XI.2.D A test vége felület.

XI.4.D Két sík merőleges egymásra, ha az egyik síkban a síkok közös részére bocsátott merőlegesek merőlegesek a másik síkra.

XI.6.D Két sík hajlata az a hegyesszög, amely a síkok közös részére ugyanazon a pontban az egyes síkokban állított merőlegesek fognak közre.

A XI. - XIII. Könyvek.

Definíciók 2.

XI.12.D Gúla az a téridom, melyet egy síkból induló egy pontban találkozó síklapok fognak közre.

XI.14.D Ha egy félkört rögzített átmérője körül addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom gömb.

XI.18.D Ha egy derékszögű háromszöget egyik derékszög melletti oldalát rögzítve addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom kúp. Ha a rögzített oldal egyenlő a körbeforgatott másik derékszög melletti oldallal, akkor a kúp derékszögű, ha kisebb, akkor tompaszögű, ha pedig nagyobb, akkor hegyesszögű.

A XI. - XIII. Könyvek.

Definíciók 3.

XI.24.D Kúpok és hengerek hasonlóak, ha tengelyeik és alapjaik átmérőit arányosak.

XI.25.D **Kocka** a hat egyenlő négyzet által közrefogott téridom.

XI.26.D **Oктаéder** a nyolc egyenlő (területű), egyenlő oldalú háromszög által közrefogott téridom.

XI.27.D **Ikozaéder** a húsz egyenlő, egyenlő oldalú háromszög által közrefogott téridom.

XI.28.D **Dodekaéder** a tizenkettő egyenlő, egyenlő oldalú és szögű ötszög által közrefogott téridom.

A XI. - XII. Könyvek.

Általános megjegyzés.

Viszonylag kevésbé kidolgozott e két könyv, a poliéderekre vonatkozó tételeket olykor csak speciális esetekre igazolta.

Tételek.

XI.1.-19. Egyenesek és síkok közös helyzetével foglalkoznak.

XI.24. Ha egy síkidomot (hat páronként) párhuzamos lap fog közre, akkor a szemközti lapok egybevágók és paralelogrammák.

XI.27. Emeljünk adott szakaszra adott paralelepipedonhoz hasonló és hasonlóan fekvő paralelepipedont.

XI.32. Azon paralelepipedonok, amelyek magassága ugyanaz, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.

A XI. - XII. Könyvek.

A XII. Könyv.

Tételek.

XI.38. Ha egy kocka két szemközti lapjának oldalait megfelezzük és az osztáspontokon síkokat fektetünk át, akkor a síkok metszete és a kocka átlója felezik egymást.

Terület - térfogat.

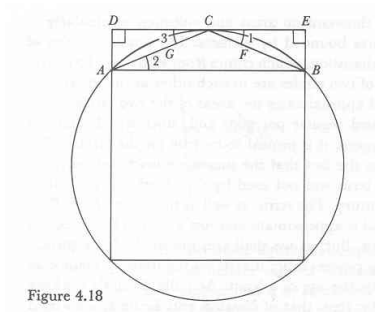
XII.1. Körbe írt hasonló sokszögek (területei) úgy aránylanak, mint a körök átmérőit négyzetei.

XII.2. A körök (területei) úgy aránylanak egymáshoz, mint átmérőik négyzetei.

XII.2. Bizonyítása.

- Első lépésként azt igazolja: a kör „kimeríthető” sokszögekkel. A X.1. Tételt alkalmazza.
- Második lépés: Megmutatja, hogy két kör aránya nem lehet sem kisebb, sem nagyobb az átmérők négyzetei arányánál.
- Az eljárás illusztrációja a következő dián látható.

Az ábra.



A XII. Könyv.

További tételek.

- XII.5.** Azonos magasságú háromszög alapú gúlák úgy aránylanak, mint alapjaik.
- XII.10.** Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapú hengernek.
- XII.18.** Gömbök (térfogatai) aránya átmérőik háromszoros aránya.

A XIII. Könyv.

A két fő téma.

- A szabályos sokszögek tulajdonságai, az aranymetszés (tekinthető K. Ptolemaiosz hűrtáblázatai előfutárának, előkészítőjének).
- Hogyan írhatjuk be adott gömbbe **AZ 5 szabályos testet**? (Hasonlítható a IV. Könyv körbe írt sokszögekre vonatkozó tételeihez.)

Fontos!

- E könyv tekinthető — különösen a második része — úgy is, mint az egész mű (ti. az Elemek) fő célja, minden ennek érdekében történt.
- Ugyanis azt is igazolja, hogy **a tekintett öt szabályos test az összes lehetséges ilyen test.**
- Vélhetően Theaitetosz eredményeit tartalmazza a XIII. Könyv.