

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Az Egyiptomi Középbiródalom korának matematikája.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2021. február 8.-15.

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Természeti viszonyok.

Földrajzi és éghajlati viszonyok 1.

- Szinte minden oldalról természetes, nehezen áthatolható határok: északon és keleten tenger, délen az Etiop magasföld, nyugaton a Nubiai sivatag; „bejárat” csak a Sinai félsziget felől.
- A (sokhelyütt keskeny) folyóvölgy védett a hódítóktól, külső hatásoktól.
- Nincsenek pusztító esők, de a Nilus rendszeresen árad,
 - ez víz + szerves anyag utánpótlást jelent,
 - lehetőség nagy mennyiségű gabona termelésére.
 - Ezért e vidék számos ókori birodalom „éléskamrájaként” funkcionált.

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Természeti viszonyok.

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Az egyiptomi civilizáció kezdete.

Földrajzi és éghajlati viszonyok 2.

- A Nilus rendszeres áradása csillagászati megfigyelésekre támaszkodva naptárrendszerük alapja lett.
- Megfigyelték, hogy két áradás között 365 nap telik el.
- Ez lett 1 év, a naptárunk alapja.
- Ez az áradások miatti földmérések is szükségesek voltak, ami az itt élő népek matematikájának kialakulására és fejlődésére is hatott.

Az egyiptomi mitológia: a legfőbb istenek.

- Kezdet: a **Napisten**,
- **RA** vagy **RÉ**, **Amonra**, **Amonré**.
- Gyemekeik az első „isten pár”: **SU** és **TEFNUT**,
- a „szárazság” és a „nedvesség” isteni párja.
- Gyemekeik az „isten pár”: **NUT** az Ég és **GEB** a Föld istene.
- Gyemekeik a két „isten pár”: **OZIRISZ** és **IZISZ** valamint **SET** és **NEFTISZ**.
- A két pár férfi tagjainak, Ozirisznek és Setnek állandó harca.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Az egyiptomi civilizáció kezdete.

Predinasztikus kor: a két királyság.

- Alsó- ill. Felső-Egyiptom, eltérő temetkezési szokások.
- Kapcsolat Mezopotámiával a 4. évezred vége felé.
- Az első írás, a **hieroglifikus** még a 4. évezred legvégén, a 3. elején alakult ki: szóírás volt.
- majd még az évezred elején (a kurzívabb) a második, a **hieratikus**. Ez is szóírás.
- A két írás használatának eltérő vonásai.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Első egyesítés.

A predinasztikus kor vége

Narmer (Narmer Aha) Felső-Egyiptom uralkodója a IV. évezred végén meghódítja Alsó-Egyiptomot.

Narmer paletta



Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Első egyesítés.

Narmer paletta: előlap



- Narmer neve a tetején olvasható (korai hieroglif írás) a Hathor-fejek közt,
- az uralkodó Felső-Egyiptom fehér koronáját viseli,
- az Alsó-Egyiptomot szimbolizáló fejedlemre sújt,
- Alsó-Egyiptom jelképét Hórusz isten megköttözi.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Első egyesítés.

Narmer paletta: hátlap



- Narmer Alsó-Egyiptom vörös koronáját viseli,
- körülvette lefejezett ellenségek.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

A három birodalom.

A dinasztiák.

- Az i.e. 280 körül uralkodott (hellén korbeli) II. Ptolemaiosz (Philadelphusz) utasítására egy Manetho nevű pap
- listát készített az uralkodókról (uralkodó családokról), 31 **dinasztiát** sorolt föl.
- Ezeket 3 nagy csoportba osztotta: ez az alapja a három **BIRODALOMNAK**: Óbirodalom, Középbirodalom, Újbirodalom.
- Közéjük ún. átmeneti korokat illesztett, amikor a birodalom egysége átmenetileg megszűnt.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

Óbirodalom

- Az első egyesítés i.e. 3100 körül (3200 és 2800 közötti időpontok olvashatók az irodalomban), Narmer utóda: Menész (Hórusz Aha néven is szerepel) stabilizálja a hódítást.
- Kezdetét veszi az **Óbirodalom** kora.
- Piramisépítések: a Királyok völgye. Abu Simbel sziklatemploma.
- Szobrászati emlékek: a guggoló írnok, Nofretete.
- Irodalmi alkotások: Imhotep (Ptahhotep) intelmei.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

Középbirodalom

- i.e. 2200-tól hanyatlás, majd az első átmeneti kor: a birodalom kettészakadt.
- i.e. 2040 körül **II. Mentuhotep** (XI. dinasztia, Felső Egyiptom) ismét egyesíti a két királyságot: kezdetét veszi a **Középbirodalom** kora.
- Építészet: a Fajjumi víztározó.
- Irodalom: Szinuhe története,
- Fontos matematikai papirusztekercsek: **Rhind** (British Museum), **Moszkvai (Golenisev)** (Puskin Múzeum).

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

Második átmeneti kor

i.e. 1750 körül a XII. dinasztia végén, részben külső (hikszosz) támadás következtében, megbukik az egységes birodalom, ismét két királyság.

- Elkészül a Rhind papirusz egy másolata, sok további matematikai tekercs.
- Kerekcső járművek, fazekaskorong.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

Újbirodalom

- 1600 körül a XVIII. dinasztia uralkodói ismét egyesítik a birodalmat: létrejön az **Újbirodalom**.
- A XXV. dinasztia idején, a 8.-7. században megjelenik a harmadik írás, a **demotikus**,

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

Az egyiptomi írások és megfejtésük.

A hieroglifikus írás.

- A **hieroglifikus** írás egyfajta képírás, hasonló a másutt, pl. Mezopotámiában használthoz. Eredete nem világos.
- Első változata vélhetően még az Óbirodalom előtti időből származik.

A hieratikus írás.

- Első változata szintén a predinasztikus korból származik, a hieroglifikust egyszerűbbé, „kurzívabbá” tették.
- I.e. 2500 körülre alakult ki a végsőnek tekinthető változata.
- Ez időtől a hieroglifikus írás használata szakrális célokra korlátozódott, a **hieratikus** írás vált általánossá.
- Egészen az I.sz. 2. századig használták.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

Az egyiptomi írások és megfejtésük.

A démotikus írás.

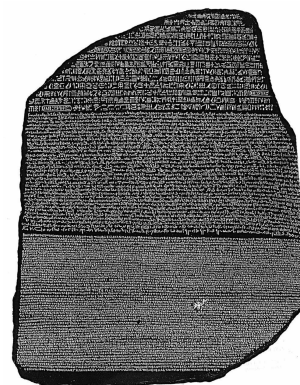
Az Újbirodalom vége felé, kb. a I.e. 8.-7. században további egyszerűsítés, kurziválás révén létrejött a **démotikus** írás.

Az írások megfejtése.

- 1799, a **Rosetta kő** megtalálása. A British Museumban őrzik.
- A I.e. 2. század elejéről származik. Kétféle egyiptomi (hieroglifikus valamint démotikus) írással, és görög nyelven szerepel ugyanaz a szöveg:
- Memphis főpapja istenek fiaként köszönti V. Ptolemaioszt.
- 1820-tól Champolion (francia) és T. Young (angol) előbb megfejtették a két egyiptomi írást (a görög alapján), majd interpolációval a hieratikus írást is.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
------------------------	----------------	--------------	------------	--	-----------------------

Rosetta kő.



Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Csillagászat.

A Nílus áradásai.

- Megfigyelték, hogy a a Nílus évenkénti, rendszeres áradása röviddel az után következik be, hogy a Szíriusz csillag közvetlenül a Nap fölkelte előtt jelenik meg a horizonton.
- Az ezt követő napokon a csillag hosszabb ideig látható a napkelte előtt egészen addig, amíg a Nap fénye elhomályosítja.
- Azt a napot, amelyen a csillag megjelent választották az év kezdőnapjának,
- ugyanis e naphoz volt köthető a Nílus rendszeres áradásának kezdete, és
- A Nílus áradásai alapvető fontosságúak voltak mezőgazdaságukban.

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Csillagászat.

A tanulságok.

- Azt tapasztalták, hogy két áradás, a Szíriusz két megjelenése között 365 nap telik el. Ezt tekintették egy évnek.
- Pontosabb számítások szerint kb. $365\frac{1}{4}$ nap telik el.
- Ezen eltérés sok probléma forrása.
- Naptárreformok sora következett.

Az első naptár.

- Az „évet” 12 egyenként 30 napos hónapra osztották, és volt még 5 „extra nap”.
- Az $\frac{1}{4}$ napos eltérés miatt a rendszer 1460 évenként került összhangba a valósággal.

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Csillagászat.

A naptár bevezetése.

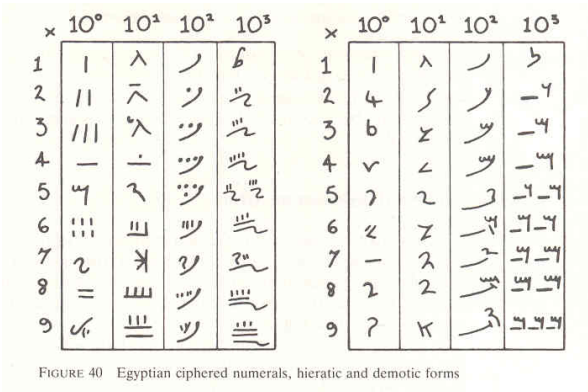
- Egyes források szerint az egyiptomiak e naptárukat i.e. 4241-ben vezették be,
- E dátum Censorinus római csillagász i.sz. 238-as számításain alapul,
- szerinte az egyiptomi naptár legutóbb i.sz. 139-ben volt összhangban a csillagászatival.
- Extrapolációs számításai eredményezték az i.e. 4241-es bevezetést.
- Három ciklussal számolt, de ez vitatható, túl korai dátum.
- Valószínűbb a két ciklussal korábbi, azaz i.e. 2773-as bevezetés.

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo oooooooooooo	Egy meglepő eredmény
-------------------------	----------------	--------------	------------	--	----------------------

Hieroglifikus számok.

1	I	IIII	6
2	II	IIII	7
3	III	IIII	8
4	IIII	IIII	9
5	IIII		
10	∩		
100	9		
1 000	Lotus		
10 000			
100 000	Tadpole or bird		
1 000 000	Not in later use		

Hieratikus és démotikus számok



Az egyiptomi aritmetika.

Számírásuk.

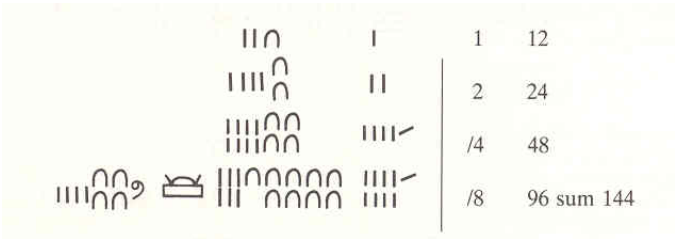
- 10-es alapú és nem helyiértékes,
- a 10 hatványainak különböző jele volt.
- Törteteket is használtak, DE ...
- nem voltak számlálóval és nevezővel rendelkező törtjeik.

Aritmetika: összeadás.

- Additív jellegű,
- kezdetben minden műveletet a kettőzésre vezettek vissza,
- később tízszeresek és feleztek is.
- Ebben a rendszerben egyszerű összeadni.

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás kettőzésekkel (hieroglifikusan).
12 · 12



Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás kettőzésekkel (mai jelölésekkel).

- Ismételt összeadásként végezték: kettőzések után.
- A $12 \cdot 13$ kiszámítása (mai számírással):

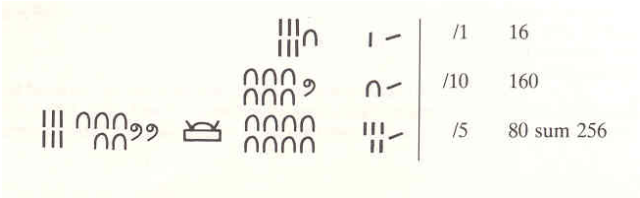
1	13
2	26
4	52
8	104

- Az első oszlopban a 2-mal jelzett sorokban $4 + 8 = 12$ áll, így a második oszlop alapján
-

$12 \cdot 13 = 52 + 104 = 156.$

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás tízszereléssel és felezéssel (hieroglifikusan).
16 · 16



Az egyiptomi aritmetika.

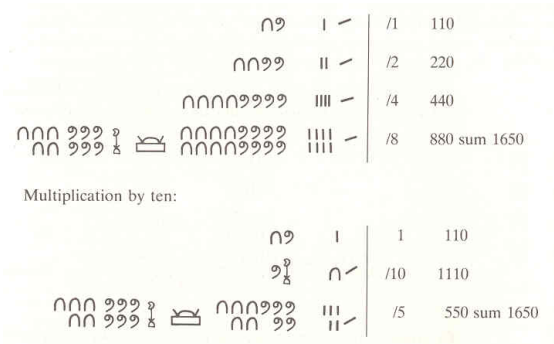
Szorzás tízszereléssel és felezéssel (mai jelölésekkel)

A $17 \cdot 13$ kiszámítása tízszereléssel és felezéssel: a

- | | |
|------|-----|
| 1 | 13 |
| } 2 | 26 |
| } 10 | 130 |
| } 5 | 65 |
- számolás alapján a $17 \cdot 13$ szorzat, lévén $17 = 2 + 10 + 5$, nem más, mint $26 + 130 + 65$, azaz **221**.

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás mindkét úton (hieroglifikusan): $15 \cdot 110$



Az egyiptomi aritmetika.

Osztás.

- Az előbbi szorzás alapján az osztás is elvégezhető akkor, ha a hányados egész, ugyanis
- additív aritmetikájukban az $a : b$ azt jelentette, hogy
- számolj b -vel addig, amíg a -t kapsz.

Az egyiptomi aritmetika.

Osztás.

- Bonyolultabb azonban a helyzet akkor, ha a hányados nem egész.
- Meg kell vizsgálni: hogyan számoltak törtekkel,
- egyáltalán milyen törtekkel tudtak számolni.

Törtek.

A korabeli egyiptomiak számára általában nem léteztek az $\frac{m}{n}$ alakú törtek, csak az $\frac{1}{n}$ alakúak.

Törtek: jelölések.

Saját jele csak az $\frac{1}{n}$ alakú törteknek, valamint a $\frac{2}{3}$ -nak volt. Ezeket $\overline{n}$ és $\overline{3}$ fogja jelölni.

Az egyiptomi aritmetika.

Osztás.

Tekintsük a $21 : 8$ osztást, azaz számoljunk nyolcasával addig, amíg 21-et kapunk.

-

1	8
$\overline{2}$	16
$\overline{2}$	4
$\overline{4}$	2
$\overline{8}$	1

- tehát, $21 : 8 = 2 + \overline{2} + \overline{8} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.
- A Rhind-papirusz 21. problémájának megoldása alapján: az osztásnál — a szorzásnál használt tízszerezés analogonjaként — tizedrészt is vettek a számolás rövidítésére.

Az egyiptomi aritmetika.

Londoni bőrtekercs.



Az egyiptomi aritmetika.

Londoni bőrtekercs.

- Elolvasásának nehézsége.
-

$$\begin{aligned}\overline{6} + \overline{6} &= \overline{3} \\ \overline{6} + \overline{6} + \overline{6} &= \overline{2} \\ \overline{3} + \overline{3} &= \overline{3}\end{aligned}$$

- Ezekből könnyen kaphatók a Rhind-papiruszon gyakran alkalmazott

$$\begin{aligned}\overline{3} + \overline{6} &= \overline{2} \\ \overline{2} + \overline{3} + \overline{6} &= 1 \\ \overline{3} &= \overline{2} + \overline{6}\end{aligned}$$

Az egyiptomi aritmetika.

Számolás törtekkel.

-
- egyenlőségek.

$$\overline{2} + \overline{3} = \overline{\overline{3}} + \overline{6}$$

$$\overline{\overline{3}} + \overline{2} = 1 + \overline{6}$$

Az egyiptomi aritmetika.

Az elemi törtek kétszerezése.

- Az egészek kétszerezése (tízszerezése, felezése) egyszerű, de a törteké?
- Világos, hogy a többszöri kétszerezés igen hosszú számalakokhoz vezet.
- Fontos fölfedezésük: az $\overline{n}$ kétszerezése ugyanazon számhoz vezet, mintha a 2-t n -felé osztanánk.
- A 2: n számolások eredményét az $5 \leq n \leq 101$ értékekre tartalmazza a Rhind papirusz elején található összeállítás.
- Természetesen csak a páros n -ekre.
- Ezen összeállításra Recto-ként is hivatkoznak olykor.

Rhind-papirusz.

Egy részlet.



A Rhind-papirusz.

Megtalálása

- A két darabból álló, összesen kb. 5 méter hosszú és 30 cm széles papirusztekercet 1858-ban vásárolta Alexandriában Henry Rhind skót régész, és a British Museum-nak ajándékozta.
- Vélhetően újkori sírbrlók vágták ketté, de miért???
- Néhány töredékét a Columbia Egyetemen (New York) őrzik.

Kiknek írták? A kezdő sor

Hozzáértő bevezetést minden dolgokba, minden létező, minden titok megismerését ígéri. DE...

A Rhind-papirusz.

A tényleges tartalom:

- Számolások egészekkel és törtekkel,
- ezek alkalmazása gyakorlati problémák megoldására,
- pl. a bér fölosztása, élelmezési számítások, felület és térfogat kiszámítása, ...
- Mindez hieratikus írással.

Kiknek írhatták?

- Arisztotelesz szerint a papságnak, mert ők voltak akkor a tudás hordozói.
- Herodotosz és Demokritosz véleménye: gyakorlati szakembereknek.
- De kik voltak azok?

A királyi írnokok rendje.

Anastasi I papirusz, egy írnok korholja társát:

Megmagyarázom, mit tesz az, mikor azt mondod: én írom a hadseregnek a parancsokat. Megbíznak téged azzal, hogy ássál egy tavat. Ekkor hozzám jössz, tőlem kérdezősködsz a katonák élelmezéséről, és így szólsz: számítsd ki nekem. Nem tudsz megbirkózni a feladatoddal, és az az én nyakamba szakad... Zavarba hozlak, amikor átadom urad parancsát, neked, az ő királyi írnokának... a nagytudású írnoknak, a sereg előljárójának. Töltést kell készíteni 730 könyök hosszút és 55 könyök széleset, amely 120 rekeszből áll, s náddal és gerendákkal van lefedve; ... A tábornokoktól érdeklődnek, hogy mennyi téglát kell ehhez, és valamennyi írnok összegyűlik, és egy sem tud semmit, mind benned bíznak: te nagy tudású írnok vagy, oldd meg nekünk hamar, Lásd, a te híred vagy ...

2 : 5 = $\overline{3} + \overline{15}$	2 : 53 = $\overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$
2 : 7 = $\overline{4} + \overline{28}$	2 : 55 = $\overline{30} + \overline{330}$
2 : 11 = $\overline{6} + \overline{66}$	2 : 59 = $\overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$
2 : 13 = $\overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$	2 : 61 = $\overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$
2 : 17 = $\overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$	2 : 65 = $\overline{39} + \overline{195}$
2 : 19 = $\overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$	2 : 67 = $\overline{40} + \overline{335} + \overline{536}$
2 : 23 = $\overline{12} + \overline{276}$	2 : 71 = $\overline{40} + \overline{586} + \overline{710}$
2 : 25 = $\overline{15} + \overline{75}$	2 : 73 = $\overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$
2 : 29 = $\overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$	2 : 77 = $\overline{44} + \overline{308}$
2 : 31 = $\overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$	2 : 79 = $\overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$
2 : 35 = $\overline{30} + \overline{42}$	2 : 83 = $\overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$
2 : 37 = $\overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$	2 : 85 = $\overline{51} + \overline{255}$
2 : 41 = $\overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$	2 : 89 = $\overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$
2 : 43 = $\overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$	2 : 92 = $\overline{70} + \overline{130}$
2 : 47 = $\overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$	2 : 95 = $\overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$
2 : 49 = $\overline{28} + \overline{196}$	2 : 97 = $\overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$
2 : 51 = $\overline{34} + \overline{102}$	2 : 101 = $\overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

A Rhind 2: n táblázata.

Hogyan számolhatták ki a szereplő hányadosokat?

- Nem egységes elveket alkalmaztak, de
- minden esetben úgy jártak el, hogy a
 - 2-t előállították, egy egynél nagyobb szám és
 - egy, kettő vagy három (elemi) tört összegeként.
 - Az első tag — mai terminológiával — olyan tört volt, amelynek számlálója az aktuális n osztó.
 - Az első tag megtalálásában nem voltak következetesek.
- Például, ha $n = 3k$, akkor mindig a $2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ fölbontást használták, ami megfelelne a

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$$

azonosság alkalmazásának, DE

- ez XX. századi és nem korabeli gondolat!

A Rhind 2: n táblázata.

1. példa: $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$.

- A papiruszon ez olvasható (mai jelölésekkel):

$$1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \text{ az } \frac{1}{12} \quad \frac{1}{3} \text{ az } \frac{1}{51} \quad \frac{1}{4} \text{ az } \frac{1}{68}.$$

- Vegyük észre: $1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$.
- A számolás

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} & 17 & \\ \frac{2}{3} & 11\frac{1}{3} & \\ \frac{1}{3} & 5\frac{2}{3} & \\ \frac{1}{6} & 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{12} & 1\frac{1}{4} + \frac{1}{6} & \end{array}$$

A Rhind 2: n táblázata.

1. példa: $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$.

- A maradék (a hiány) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$,
- hiszen $(1\frac{1}{4} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 2$,
- azaz ennyi kell még a 2-höz.
- Ezt még elő kell állítani 17-edekben.

A Rhind 2: n táblázata.

1. példa: $2: 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$.

- Ennek kiszámítása

$$\begin{array}{rcl} 1 & \frac{1}{17} & \\ 2 & \frac{1}{34} & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{51} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{68} & \frac{1}{4} \end{array}$$

- Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy közben fölhasználta az

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

egyenlőséget.

A Rhind 2: n táblázata.

2. példa: $2: 31 = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$

- A kezdő sor:

$$1 + \overline{2} + \overline{20} \text{ az } \overline{20}, \quad \overline{4} \text{ az, } \overline{124} \quad \overline{5} \text{ az } \overline{155}.$$

- A számolás az előbbihez hasonló

$$\begin{array}{rcl} 1 & \frac{1}{20} & 31 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{124} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{155} & \frac{1}{4} \end{array}$$

- A papiruszon az írnok az első sort is megjelölte, ami másolási hiba.
- A 2 fölbontása most: $2 = (1\frac{1}{2} + \frac{1}{20}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

A Rhind 2: n táblázata.

Elemzés

- Az előző két esetben a 2 fölbontása első tagja

$$1\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

$$1\frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{31}{20},$$

- azaz olyan tört, amelynek számlálója épp a kettőzendő tört nevezője.
- Utána előbb ezt kiegészítette 2-re,
- majd a kiegészítést előállította megfelelő törtekként.
- Hogyan jött rá az írnok???

A Rhind 2: n táblázata.

3. példa: $2:35 = \overline{30} + \overline{42}$

- A számolás eltér az eddiektől. Az első sor most

$$\begin{array}{ccc} 1 + \overline{6} & \text{az} & \overline{30} \\ \textcolor{red}{6} & & \textcolor{red}{7} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \overline{\overline{3}} + \overline{6} & \text{az} & \overline{42} \\ & & \textcolor{red}{5} \end{array}$$

- A számolás

$$\begin{array}{r} 1 \quad 35 \\ \overline{)30} \quad 1 + \overline{6} \\ \overline{)42} \quad \overline{\overline{3}} + \overline{6} \end{array}$$

- Mi a vörös számok — kiegészítő számoknak fogjuk nevezni — szerepe?
- A 7 és az 5 jelezheti az $1\frac{1}{6}$ -ban és $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ -ban a hatodik számát, amit a kezdő hatos is alátámaszt.
- A fölbontás: $2 = (1 + \frac{1}{6}) + (\frac{2}{3} + \frac{1}{6})$.

Az elemi törtek kétszerezése.

Interpretáció: a piros számok.

- lehetőség:** a 7 és az 5 nem más, mint a hatodik száma az első sorbeli $1 + \overline{6}$ és $\overline{\overline{3}} + \overline{6}$ -ban, s ekkor az elől álló 6-os szerepe is világos, hatodokról van szó.
 - lehetőség:** a 6, 7, 5 fordítottan arányos a 35, 30, 42-vel, s így egyenesen arányos $\overline{35}$, $\overline{30}$, $\overline{42}$ -vel.
- Az utóbbit támasztja alá, hogy a papiruszon levő két sor a következő számolást rejtheti:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 35 \\ \overline{)30} \quad 1 + \overline{6} \\ \overline{)42} \quad \overline{\overline{3}} + \overline{6} \end{array}$$

Az elemi törtek kétszerezése.

Interpretáció

- Amiből

$$\frac{2}{35} = \overline{30} + \overline{42}.$$

- Egy mai számolás.

•

$$\frac{2}{35} = \frac{12}{210} = \frac{7}{210} + \frac{5}{210} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42},$$

- azaz, törtek számlálóiként funkcionálnak.
- Ezt más számolásai is alátámasztják.

Az egyiptomi aritmetika.

A Rhind 21. feladata.

Mi egészíti ki a $\overline{3} + \overline{15}$ -öt 1-re?

Az eredmény:

10 1 összesen : 11 a maradék 4.

A megoldás.

- Számolj 15-tel, míg 4-et kapsz.
-

$$\begin{array}{r} 1 \quad 15 \\ \overline{10} \quad 1 + \overline{2} \\ \overline{5} \quad 3 \\ \overline{15} \quad 1 \end{array}$$

- A jelzett sorok jobb oldalán $3 + 1 = 4$ található, így $\overline{5} + \overline{15}$ az, amit hozzá kell adni.

Az egyiptomi aritmetika.

Elemzés.

- A feladat lényegében egy

$$1 - (\overline{3} + \overline{15})$$

kivonás.

- A vörös kisegítő számok mutatják, hogy 15-ökben kellszámolni: az $\overline{3}$ és $\overline{10}$ számlálói 15-ödökben.
- Maga a szám $\frac{11}{15}$, így még $\frac{4}{15}$ hiányzik, ezt állítja elő a számolása.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A Rhind 23. problémája.

Egészítsük ki

$$\overline{4} + \overline{8} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{45}\text{-öt}$$

$\overline{3}$ -ra.

A (hiányos) számolás.

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{4} & + & \overline{8} & + & \overline{10} & + & \overline{30} & + & \overline{45} \\ 11 + \overline{4} & & 5 + \overline{2} + \overline{8} & & 4 + \overline{2} & & 1 + \overline{2} & & 1 \end{array}$$

Az eredmény.

Tehát $\overline{9} + \overline{40}$ -et kell hozzáadni, hogy $\overline{3}$ -at kapjunk.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Ellenőrzés.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \overline{4}+ & \overline{8}+ & \overline{9}+ & \overline{10}+ & \overline{30}+ & \overline{40}+ & \overline{45}+ & \overline{3} \\ 11 + \overline{4} & 5 + \overline{2} + \overline{8} & 5 & 4 + \overline{2} & 1 + \overline{8} & 1 + \overline{2} & 1 & 15 \end{array}$$

Az összeg 1.

- A további részletek hiányoznak a papiruszról, de megadható egy lehetséges rekonstrukció.
- Hangsúlyozzuk**, hogy ez csak egy **lehetséges** eljárás, semmi biztosat nem tudunk az eredeti gondolatmenetről.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Rekonstrukció.

- Ha a törtek közös nevezőjének a 45-öt választjuk, akkor a „számlálók” összege
-

$$(11 + \overline{4}) + (5 + \overline{2} + \overline{8}) + (4 + \overline{2}) + (1 + \overline{2}) + 1 = 23 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{8}$$

- lenne.
- A 30-hoz még hiányzik $6 + \overline{8}$.
- Ezt 45-tel osztva kapjuk a $\overline{9} + \overline{40}$ kiegészítést.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Az osztás.

- 1
45

/9
5

/40
1 + 8
- Tehát a hányados, vagyis a kiegészítés

$$\overline{9} + \overline{40}.$$

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Vegyük észre.

- A korabeli egyiptomi közös nevező a legkisebb tört nevezője, de a számláló így már nem értelmezhető mai módon, hiszen gyakran nem egész. Ez őket nem zavarta.
- Igazolásul még egy feladat.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A 33. feladat.
Egy mennyiséghez hozzáadva kétharmadát, felét és hetedét 37-et kapunk.

A számolás 1.

- 1
2
4
8
16

1 + $\overline{3}$ + $\overline{2}$ + $\overline{7}$
4 + $\overline{3}$ + $\overline{4}$ + $\overline{28}$
9 + $\overline{6}$ + $\overline{14}$
18 + $\overline{3}$ + $\overline{7}$
36 + $\overline{3}$ + $\overline{4}$ + $\overline{28}$

(2 · $\overline{7}$ = $\overline{4}$ + $\overline{28}$)
($\overline{3}$ = $\overline{2}$ + $\overline{6}$)
- A $36 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28}$ már „nagyon közel” van a 37-hez.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A számolás 2.

- Ami hiányzik, az $\overline{3} + \overline{4} + \overline{28}$ kiegészítője 1-re.
- A kiegészítés a vörös kisegítő számokon alapul.
- A közös nevező azonban nem 28, hanem 42. Miért?
- Láttuk: a számlálóknak nem kell egészeknek lenniük, DE összegük már mindig egész.
- Ez 28-cal még nem, de 42-vel már teljesül.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A vörös számok eredete.

A szöveg alapján:

- 1
28

42
21

10 + 2
1 + 2
- A folytatás: az összeg 40, a maradék 2.
- A 40 kisegítő számok összege, és az egység 42 „kisegítő egységet” tartalmaz, tehát 2 még hiányzik.
- E 2-t úgy kapjuk, hogy az osztót, $1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7}$ -et, kisegítő egységekben fejezzük ki.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A számolás 3.

- 1
28
7
6

42
21

az összeg
97
- Azaz az osztó 97 kisegítő egységet tartalmaz, 97-ed része egyenlő $\overline{42}$ -del.
- Már csak egy kétszerezés kell, ami a táblázatból:
- 97
56 + 679 + 776

42
21

1
2

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A végeredmény.

37: (1 + $\overline{3}$ + $\overline{2}$ + $\overline{7}$) = 16 + $\overline{56}$ + $\overline{679}$ + $\overline{776}$.

Történeti mérőkövek	Írásos emlékek	Csillagászat	Aritmetika	A Rhind-papirusz oooo oooooooooooo ooooooooooooo	Egy meglepő eredmény.
---------------------	----------------	--------------	------------	---	-----------------------

A Moszkvai papirusz.

A 14. probléma.

Az a alapélű, b fedőélű és h magasságú csonkagúla térfogata

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}.$$