

A SZÁMFOGALOM ALAKULÁSA A KEZDETEKTŐL HILBERTIG 2.

4000 ÉVES IDŐUTAZÁS 2.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. május 13.

Természetes számok.

- ▶ A természetes számok a Peano axiómák egy modelljeként definiálhatók:
- ▶ $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, ha
 1. $1 \in \mathbb{N}$,
 2. $\forall k \in \mathbb{N}$ -hez létezik egy $k' \in \mathbb{N}$,
 3. nem létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $1 = k'$,
 4. ha valamely $m, n \in \mathbb{N}$ -re $m' = n'$, akkor $m = n$,
 5. ha $S \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $1 \in S$, és valahányszor $m \in S$, mindannyiszor $m' \in S$, akkor $S = \mathbb{N}$.
- ▶ Az $\mathbb{N}$ halmazon definiálható két asszociatív és kommutatív művelet, amelyeket általában $+$ és $\cdot$ jelöli, és összeadásnak, valamint szorzásnak nevezzünk.

Egész számok.

- ▶ A természetes számok egységelems félgűrűt alkotnak, így körükben általában nem oldhatók meg az $a + x = b$ alakú egyenletek, ahol $a, b \in \mathbb{N}$, ezért azt bővíteni kell.
- ▶ Végezzük el a következő konstrukciót.
 - ▶ Legyen $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és definiáljuk a következő relációt.
 - ▶ Tetszőleges $(a, b), (c, d) \in A$ -ra $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.
 - ▶ Definiáljunk összeadást és szorzást az $A/\sim$ halmazon:

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} \quad \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

- ▶ Megmutatható, hogy az $(A/\sim; +, \cdot)$ algebra egységelemes kommutatív zérusosztómentes gyűrű (=integráltartomány).

Egész számok.

- ▶ Ezen a gyűrű elemeit egész számoknak nevezzük, és halmazukat $\mathbb{Z}$ jelöli. $\mathbb{N}$ beágyazható $\mathbb{Z}$ -be, azaz létezik $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ injektív homomorfizmus.
- ▶ Azaz a $\mathbb{Z}$ gyűrű tekinthető az $\mathbb{N}$ félgűrű bővítésének.
- ▶ A bővítési folyamatot tovább kell vinni, meg kell konstruálni az egész számokat tartalmazó legszűkebb testet, amelyben már megoldhatók az $ax = b$, $a \neq 0$ alakú egyenletek is.

Racionális számok.

- ▶ A bővítés a következő konstrukciók nyugszik.
 - ▶ Legyen $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, amelyen két műveletet és egy (ekvivalencia) relációt definiálunk:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$

- ▶ $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.
- ▶ Ismét kiterjesztjük a műveleteket az $A/\sim$ faktorhalmazra:

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, b)}$$

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, d)} = \overline{(a, b)}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(d, d)}$$

Racionális számok.

- ▶ Tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$ -ra

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, b)}$$

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, d)} = \overline{(a, b)}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(d, d)}$$

- ▶ Az utóbbiból következik, hogy ha $a \neq 0$, akkor megoldható az

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(d, d)}$$

egyenlet.

- ▶ Ez azt (is) jelenti, hogy a $A/\sim$ algebra test, amelyet a racionális számok testének nevezünk, és általában $\mathbb{Q}$ -val jelöljük.

Racionális számok.

- ▶ A racionális számok testében — többek közt — nem oldhatók meg a következő problémák.
 1. Bár a konvergens sorozat fogalma definiálható: a racionális számokból álló (a_n) sorozat *konvergens*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ racionális számhoz van olyan $\nu \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy bármely $m, n > \nu$ -re $|a_n - a_m| < \varepsilon$ az ilyen sorozatoknak gyakran nem létezik határértéke.
 2. A $\mathbb{Q}$ test algebrailag nem zárt, azaz egy nemzéró $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak nem föltétlenül van racionális szám zéróhelye.
- ▶ A következő bővítést úgy végezzük, hogy az első probléma megoldódjék.

Valós számok: G. Cantor eljárása 1.

- ▶ Jelölje $\mathbb{Q}_\infty$ az összes racionális tagú végtelen sorozat halmazát, és legyen $\alpha = (a_k) \in \mathbb{Q}_\infty$. Ezen sorozat *nullasorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ esetén van olyan $\nu \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > \nu$ -re $|a_n| < \varepsilon$.
- ▶ A nullasorozatok halmazát jelölje $\mathbb{Q}_0$.
- ▶ Azt mondjuk, hogy az α sorozat *konvergens*, ha tetszőleges α' részsorozatára $\alpha - \alpha' \in \mathbb{Q}_0$.
- ▶ Egyszerűen látható, hogy ez egy átfogalmazása a konvergencia korábban adott definíciójának.
- ▶ A konvergens sorozatok halmazát jelölje $\mathbb{Q}_\infty^k$.
- ▶ Világos, hogy e halmaz a sorozatok szokásos összeadásával és szorzásával egységelemes kommutatív gyűrű.

G. Cantor eljárása 2.

- ▶ Vezessük be a következő $\sim$ relációt $\mathbb{Q}_\infty^k$ -n:
- ▶ Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_\infty^k$.

$$\alpha \sim \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta \in \mathbb{Q}_0$$

- ▶ Egyszerűen belátható, hogy $\sim$ kongruenciája a $\mathbb{Q}_\infty^k$ gyűrűnek.
- ▶ Ugyancsak egy egyszerű eljárással kaphat, hogy

$$\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$$

test.

- ▶ Világos, hogy e testnek van olyan részteste, amely izomorf a racionális számok $\mathbb{Q}$ testével: valamely $a \in \mathbb{Q}$ -nak azt az osztályt feleltessük meg, amely tartalmazza az (a) ún. konstans sorozatot.

G. Cantor eljárása 3.

A $\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$ testet a valós számok testének nevezzük.

A valós számok tehát modellezhetők, mint racionális számokból álló konvergens sorozatok határértékei.

Megjegyzés.

Megmutatható, hogy a $\mathbb{Q}_\infty^k / \sim$ test, amelyet a következőkben $\mathbb{R}$ jelöl, kielégíti az 1. feltételt, azaz bármely, az elemeiből képezett konvergens sorozatnak van határértéke $\mathbb{R}$ -ben. A második feltételt azonban csak a komplex számok teste elégíti ki.

Egy nem éppen kedvező eredmény.

G. CANTOR (1874)

- ▶ A valós számok (a végtelen tizedestörttekkel reprezentálható számok) „többben vannak”, mint a racionális számok, azaz egy ún. **nem megszámlálható** halmazt alkotnak, de
- ▶ az összes (valós és komplex) algebrai számok halmaza megszámlálható.
- ▶ Következésképp, **a transzcendens számok (külön a valósok is!) nem megszámlálható halmazt alkotnak**, „ugyanannyian” vannak, mint az összes valós (vagy komplex) számok.
- ▶ Másképpen mondva a transzcendens számok halmaza **kontinuum számosságú**, azaz **majdnem minden valós szám transzcendens**.

Néhány fontos konstans.

HERMITE (1873)

Az e szám transzcendens.

LINDEMANN (1882)

- ▶ *Ha $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ különböző algebrai számok, akkor*

$$e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_k}$$

lineárisan függetlenek az algebrai számok teste fölött.

- ▶ Másképpen mondva (az előbbi jelölésekkel) tetszőleges $p_1, \dots, p_k$ algebrai számokra

$$p_1 e^{\alpha_1} + \dots + p_k e^{\alpha_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 = \dots = p_k = 0.$$

Néhány fontos konstans.

Következmények.

1. Ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, akkor e^α , továbbá, ha $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0, 1$, akkor $\log \alpha$ transzcendens.
2. Az $e^{i\pi} + 1 = 0$ egyenlőség alapján $i\pi$ transzcendens, így — mivel az algebrai számok testet alkotnak, és i algebrai — π is transzcendens.
3. Így a kör négyesítőjének ókori problémája nem megoldható bizonyult.
4. Lindemann tételéből következik Hermite eredménye: ha $n = 2$, $p_1 = 1$, $x_2 = 0$, akkor e^{x_1} nem algebrai, s így e sem lehet az.

Néhány fontos konstans.

Három nyitott kérdés.

1. Természetes kérdés ezek után, hogy az $e + \pi$ szám transzcendens-e.
 - A válasz nem ismert, míg
 - $e + i\pi$ transzcendens volta trivialis.
2. Ugyancsak ismeretlen az ún. Euler-konstans, a

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right),$$

szám milyensége, a sejtés: transzcendens.

3. Szintén ismeretlen az α^β alakú számok természete, ha α algebrai, β pedig irracionális algebrai szám, például algebrai-e vagy transzcendens a $2^{\sqrt{2}}$ szám.

Részlet D. Hilbert 1900-as párizsi előadásából.

Hermite és Lindemann eredményeit — amelyek az exponenciális függvényekre vonatkoznak — minden matematikus nagyra értékeli. Ezen az úton tovább kell haladni, s az elkövetkező időben az alábbi problémát kellene megoldani. Bizonyos — az analízisben fontos — transzcendens függvények egyes algebrai szám helyeken algebrai szám értékeket vesznek föl. Úgy tűnik, hogy ezt érdemes alaposan megvizsgálni. Ugyanis általában azt képzeljük, hogy a transzcendens függvények mindenütt transzcendens értékeket vesznek föl. Tesszük ezt annak ellenére, hogy ismerünk olyan transzcendens függvényeket, amelyek algebrai számokhoz algebrai számot, sőt racionálisat rendelnek.

Részlet D. Hilbert 1900-as párizsi előadásából.

Például az e^{iz} exponenciális függvény értéke minden $z \in \mathbb{Q}$ -ra algebrai, míg minden $z \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ -ra transzcendens. Ezen állítás geometriailag is megfogalmazható. Ha egy egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szög és a szárak által alkotott szög aránya transzcendens, akkor az alap és a szár aránya is transzcendens. Bár ez egy igen egyszerűen hangzó állítás, ekvivalens Hermite és Lindemann eredményével, s a bizonyítása is igen nehéz, sőt meglehetősen bonyolult. Hasonlóan nehéz lehet a bizonyítása a következő állításnak is.

HILBERT VII. PROBLÉMÁJA.

Hilbert kérdése.
Legyen $\alpha \in \mathbb{A}$ és $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$, ekkor az α^β alakú számok, például $2^{\sqrt{2}}$, $e^\pi = i^{-2i}$ mindig transzcendens szám, vagy legalább irracionális.

Tovább az előadás.
Biztos vagyok benne, hogy ezen, és a hasonló problémák megoldása egészen új módszereket igényel, s egy új szemléletet is ad. Új megvilágításba helyezi az irracionális és a transzcendens számokat.

A probléma megoldása.

Részlet Hilbert egy előadásából, Göttingen 1919.

- 1. A VII. Probléma nagyon nehéz, így érdemes összehasonlítani néhány ismert problémával.
- 2. A Riemann-hipotézis bizonyítása irányába az utóbbi években komoly előrehaladás történt, így nagyon reméli, hogy még megéri a bizonyítását.
- 3. Számos biztató eredmény van a Fermat-sejtéssel kapcsolatban is, ezért talán a hallgatóság legfiatalabb tagjai megérik a sejtés bizonyítását.
- 4. Annak a bizonyítását azonban, hogy a $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám, a jelenlevők közül senki sem fogja látni.

Hilbert vélekedéséről.

- Az első két kérdésről.
- ▶ A Riemann-hipotézis, azaz a ζ függvény minden komplex zéróhelyének a valós része $\frac{1}{2}$, a mai napig nyitott kérdés.
 - ▶ A Fermat sejtés bizonyítását 1993-ban publikálta A. Wiles.
 - ▶ Azaz egy kérdésben Hilbert tévedett, egyben talán nem, ha ...

A harmadikról.
Az első részleges megoldás, az első nem teljes válasz 1929-ben jelent meg, majd pár év alatt teljessé vált a megoldás.

A VII. Probléma részleges megoldása.

Gelfond tétele. (1929)
Ha β komplex kvadratikus irracionális szám, akkor α^β transzcendens.

Ez tartalmazza az e^π esetet, hiszen e^π az i^i egyik értéke. i pedig komplex és kvadratikus irracionális.

Kuzmin és Siegel tétele. (1930)
 α^β akkor is transzcendens, ha β valós kvadratikus irracionális szám.
Megjegyzések.

- 1. A két matematikus eredményét egymástól függetlenül érte el.
- 2. Hilbert megérte annak bizonyítását, hogy $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám?

A VII. Probléma teljes megoldása.

Gelfond – Schneider tétel. (1934)

Ha $\alpha, \beta \neq 0$ és 1-től különböző algebrai számok, továbbá β irracionális, akkor α^β transzcendens szám.

Két további ekvivalens állítás.

- 1. Ha $\alpha, \beta \neq 0, 1$ -től különböző algebrai számok, akkor $\log \alpha / \log \beta$ racionális, vagy transzcendens.
- 2. Legyenek α, β nemzéró algebrai számok. Ha $\log \alpha, \log \beta$ lineárisan függetlenek a racionális számtest fölött, akkor lineárisan függetlenek az algebrai számok teste fölött.

A VII. Probléma teljes megoldása.

Megjegyzések.

- 1. Gelfond és Schneider egymástól függetlenül jutott el ezen eredményhez.
- 2. Hilbert sejtése a legerősebb formában bizonyult igaznak.
- 3. Hilbert 1943-ban halt meg, azaz megérte sejtése teljes bizonyítását.
- 4. Még egy 1919-es tévedése.

DE

Az előbbi tévedések nem árnyékolják be azon általános vélekedést, miszerint David Hilbert a XIX. század utolsó harmadának és a XX. század első felének egyik legnagyobb hatású matematikusa volt.

Egy záró gondolat.

- ▶ Gelfond bizonyításában alapvető szerepe volt a következő komplex függvénynek:
- ▶

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} C_{kl} e^{(k \log \alpha + l \log \beta)z}$$

- ▶ ahol $C_{kl} \in \mathbb{Z}$ és $|F^{(k)}(p)|$ „nagyon kicsi” sok p, k értékre.

Az előbbi függvény csak egy szerény adalék a probléma nehézsége illusztrációjához.