

A SZÁMFOGALOM ALAKULÁSA A KEZDETEKTŐL HILBERTIG 1. 4000 ÉVES IDŐUTAZÁS 1.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. május 6.

Folyammenti kultúrák.

Egyiptom.

- ▶ 10-es alapú nem helyiértékes számírásuk volt.
- ▶ A szám náluk — mai terminológiával — pozitív racionális szám volt,
- ▶ bár nem használtak számlálóval és nevezővel rendelkező törteket,
- ▶ szinte minden törtet speciális, 1 számlálójú törtek összegeként állítottak elő.
- ▶ Ez utóbbiak az „elemi törtek”.

Folyammenti kultúrák.

Mezopotámia.

- ▶ Számon ők is pozitív racionális számot értettek, DE
- ▶ számírásuk 60-as alapú helyiértékes volt.
- ▶ használtak hatvanados törteket is, de egy jelsorozat tört voltára nem volt speciális jelük.
- ▶ Ha gazdasági számításnál „negatív szám” adódott volna, akkor azt **nem tekintették rendes számnak**, hanem az egyszerűen **hiányt, adósságot** jelölt.
- ▶ A gyökvonáskor mindig csak pár lépést tettek algoritmusukban, hitték, hogy az néhány (további) lépés után (biztosan) véget ér.
- ▶ Következésképp, az **irracionális fogalma föl sem merülhetett**.

A görögök.

A szám Euklidesz első 9 könyve szerint.

- ▶ Euklidesz definíciója szerint: egységekből összetevődő sokaság, tehát **1-nél nagyobb egész szám**.
- ▶ Definiálták és használták a **számok arányát**, ami a **pozitív racionális számnak felelt meg**.
- ▶ Az arányokkal való számolásról szól Euklidesz V. könyve, az Eudoxos által bevezetett **menyiség** fogalmát használva.
- ▶ De itt csak ún. **összemérhető mennyiségekkel** foglalkoztak,
- ▶ bár ezt itt nem posztulálták, a mennyiségeket is számnak tekinthetjük.
- ▶ Azaz, a szám **1-től különböző pozitív racionális szám**.

A görögök.

A X. könyv.

Ezen nagyrészt Eudoxostól és Theaitetosztól származó könyv bizonyos összemérhetetlen mennyiségekkel és azok arányával foglalkozik, azaz a szám fogalma kiegészült **speciális, pozitív irracionálisokkal** is.

Hindu aritmetika (200-1200)

- ▶ Folytatták a görög tradíciókat.
- ▶ Az V. század végétől a hindu matematikusok munkáját elsősorban asztronómiai és asztrológiai problémák motiválták. Szinte az összes matematikai mű csillagászati (nem különült náluk el a csillagjóslástól még) könyvek részeként jelent meg.
- ▶ E korból már több matematikus (csillagász/csillagjós) nevét is ismerjük:
 - ▶ **ARYABHATA** (476–550(?)), **BRAHMAGUPTA** (598–660),
 - ▶ **MAHAVIRA** (800(?)-870(?)) és **BHASKARA** (1114–1185(?)).
- ▶ A peródus első felében a számokat hol szavakkal, hol más, szám jellegű szimbólumokkal jelölték. A 600-as évek körül kialakult a tízes alapú helyiértékes számírásuk.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

- ▶ A korszak második felétől az eddig csak a számjegy hiányát jelző szimbólumot, a „köröcskét”, számként is kezdték használni. A számjegy hiányának jele arab eredetű.
- ▶ Mahavira (IX. sz.) a következőket írta: *Egy számot 0-val szorozva 0-t kapunk, s ha egy számból 0-t vonunk ki, akkor a szám nem változik.*
- ▶ Azt is írta, hogy: *Ha egy számot 0-val osztunk, akkor a szám változatlan marad.*
- ▶ Itt nyilván **arra gondolhatott**, hogy ha egy számot „sehány” részre osztunk, akkor nem történik semmi.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

- ▶ Megjelennek a törtek is, főleg csillagászati számításokban. Írásukra a babyloni hatvanas rendszert alkalmazták. A műveletek elvégzési szabályait szinte ugyanúgy adták meg, mint manapság.
- ▶ Mahavira a törttel való osztás szabályaként azt mondta, hogy
 - ▶ **fordítsd meg és szorozz vele.**
- ▶ Bevezették a negatív szám fogalmát is hiány jelölésére.
- ▶ Először Brahmagupta fogalmazta meg 628-ban a négy alapművelet szabályát negatív számokra.
- ▶ Konkrét problémák megoldásánál azonban, ha az egyenlet valamely gyöke (a számolás végeredménye) negatív számnak adódott, akkor azt, mint lehetetlen megoldást, elvetették.

1. Hindu aritmetika: Bhaskara (XII. sz.) véleménye.

- ▶ ...ha egy probléma (pl. egyenlet) megoldásaként 50-et és –5-öt kapott: **Ez esetben a második értéket nem lehet figyelembe venni, mert az nem lehet megoldása a problémának, hiszen az emberek nem fogadják el a negatív megoldásokat.**
- ▶ Egy pozitív számnak két négyzetgyöke van, az egyik pozitív, míg a másik negatív. Fölvetette a negatív szám négyzetgyökének kérdését is, de azt mondta, hogy az nem létezik, lévén bármely szám négyzete pozitív.
- ▶ De mindezt indoklások, pontos definíciók és tételek megfogalmazása nélkül tették, általában verses formában.
- ▶ Mindezek ellenére, ha igen lassan is, de a negatív számokat egyre általánosabban fogadták el.

1. Hindu aritmetika (200–1200)

- ▶ A hinduk másik nagy lépése az aritmetikában az irracionálisok problémájának egyre korrektebb kezelése. Tőlük vették át az arabok.
- ▶ Korrekt módon kezdtek velük is számolni. Nem bizonyították ugyan általánosan eljárásaikat, de bőségesen illusztrálták módszereiket. Például:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{(3+12) + 2\sqrt{3} \cdot 12} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

- ▶ Az általános elv, amit használtak, mai jelölésekkel a

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} \quad \text{ahol } a, b > 0.$$

XVI. sz. eleje.

- ▶ 1500 körül az európai matematikusok, elsősorban az iszlám tradíciók alapján, már egyre kiterjedtebben számoltak gyökmennyiségekkel, speciális típusokat definiáltak és kalkulusokat adtak meg, a fő motiváció a gyakorlati számítások és a tudományos igények.
- ▶ Említésre érdemes új eredményeket tartalmaz például az olasz Luca Pacioli (1445(?)-1517) *Summa*, továbbá Tartaglia (Nicolo Fontana, 1500(?)-1557) *General trattato de' numeri e misure* című könyve.
- ▶ A század második harmadában az irracionálisokkal való számolási technikákat jelentősen továbbfejlesztette a német Michael Stiefel (1487–1567) és a flamand hadmérnök Simon Stevin (a hollandok „Bolyaija”, 1548–1620). Gyökmennyiségek újabb típusaira adtak meg kalkulusokat.

Stiefel *Arithmetica Integra* (1544)

Mivel az olyan geometriai bizonyításokban, ahol a racionális számok nem megfelelőek, alkalmazhatók az irracionális számok, és velük elvégezhetjük a bizonyításokat; az irányba kényszerülünk haladni, hogy kijelentsük: az irracionálisok igenis számok, mivel a velük kapott eredmények reálisok (valóságosak). Másrészt azonban más megfontolások arra készítetnek bennünket, hogy tagadjuk azt, hogy az irracionálisok egyáltalán számok. Ugyanis, amikor számolunk velük (tizedestört alakban) azt tapasztaljuk, hogy nem lehet őket pontosan meghatározni. Így nem nevezhetjük őket igazi számoknak, mivel természetüknél fogva hiányzik belőlük a precizitás. Ezért, ugyanúgy mint ahogy a végtelen nem szám, egy irracionális szám sem igazi szám, hanem éppúgy valami ködös végtelen.

Stiefel véleménye szerint a valóságos számok egészek vagy törtek, így az irracionálisok nyilván nem számok.

3. Irracionálisok a XVI-XVII. században.

Egy évszázaddal később még Blaise Pascal is úgy vélte, hogy *az olyan mennyiségek, mint például a $\sqrt{3}$ csak geometriai mennyiségként fogható föl. Az irracionálisok pusztán szimbólumok, amelyek nem léteznek az általuk reprezentált folytonos geometriai mennyiségtől függetlenül. A velük való számolásokra tehát nem aritmetikai szabályok vonatkoznak, hanem az Eudoxos-féle arányelméletet (Euklidesz V. könyve) kell alkalmazni.*

Lényegében ugyanezen véleményt olvashatjuk Isaac Newton (1643–1727) *Arithmetica Universalis* című könyvében, amely 1707-ben jelent meg (de kb. 30 évvel korábbi eredményeinek összefoglalása).

3. Irracionálisok a XVI-XVII. században.

Más vélekedések.

Simon Stevin: az irracionálisok olyan számok, amelyek tetszőleges pontossággal megközelíthetők racionális számokkal.

- ▶ René Descartes (1596–1650) 1628-ban kiadott *A gondolkodás szabályai* című könyvében az irracionálisokat olyan absztrakt számoknak tekintette, amelyek folytonos mennyiségeket reprezentálnak.

Az angol John Wallis 1685-ben megjelent *Algebra* című könyvében már teljes jogú számoknak ismerte el az irracionálisokat, s azon véleményének adott hangot, hogy az Elemek V. könyve lényegében aritmetikai jellegű.

Negatív számok a XVI-XVII. században.

Iszlám tradíciók alapján számoltak ugyan velük, de általában nem tekintette azokat számoknak. Egyenletek megoldásaként többnyire még azok sem fogadták el őket, akik különben hajlamosak voltak számnak tekinteni. Például Stiefel „abszurd számoknak” nevezte őket. Cardano megadta ugyan az egyenletek negatív gyökeit is, de csak fiktív megoldásoknak, pusztá szimbólumoknak tekintette azokat, hiszen a semminél kisebb mennyiségeket reprezentáltak, míg a pozitívokat valósoknak nevezte. Hasonlóan vélekedett Descartes is, aki az egyenletek negatív gyökeit hamis gyököknek nevezte, mert azok a semminél kisebb mennyiséget jelölnek, de az egyenlet transzformációjával pozitívvá, azaz — szóhasználatra szerint — valóssá tehetők.

Cardano egy feladata.

Az apa 56, fia 29 éves. Hány év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia?

Ha x jelöli az évek számát, akkor az

$$56 + x = 2(29 + x)$$

egyenletet kell megoldanunk, amiből $x = -2$. A kapott negatív megoldás **lehetetlen**, ami abból adódott, hogy **rosszul** tűztük ki a feladatot. Azt kellett volna kérdeznünk, hogy „hány évvel ezelőtt” volt az apa kétszer annyi idős, mint a fia

Újabb eredmények az irracionálisokkal kapcsolatban: lánc törtek.

- ▶ A XVI. század utolsó harmadának egyik nagy eredménye a lánc törtek részbeni újrafelfedezése és újabb alkalmazásai volt.
- ▶ A lánc törtek impliciten megjelentek Brahmaguptánál határozatlan egyenletek megoldásában.
- ▶ Az újdonság az a fölismerés volt, hogy a végtelen lánc törtek jól alkalmazhatók az irracionálisok elméletében is.
- ▶ Raffaello Bombelli 1572-es *Algebra* című könyvében találkozunk ezzel először. Ő a $\sqrt{2}$ -t a következőképpen közelítette.

Lánc törtek és irracionálisok 1.

Legyen $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$, azaz $y = 1 + \sqrt{2}$. Adjunk az utóbbi egyenlőség mindkét oldalához 1-et, így azt kapjuk, hogy $y = 2 + \frac{1}{y}$. Ekkor előbb az

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}},$$

majd a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}}$$

egyenlőséghez jutunk.

Lánc törtek és irracionálisok 2.

Az eljárást folytatva Bombelli azt kapta, hogy

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}},$$

Azzal természetesen már nem foglalkozott, hogy a végtelen lánc tört konvergál-e valamilyen értelemben, hiszen az illetén kérdések abban a korban föl sem merültek.

Lánc törtek és irracionálisok 3.

A lánc törtek konvergenciaproblémájával Wallis foglalkozott először az 1695-ös *Opera Mathematica* című könyvében, de csak formális számolásokat végzett megadva a lánc tört véges kezdő szeleteit, ő konvergenseknek nevezte ezek sorozatát.

Megjegyzés.

Egyszerűen igazolható, hogy minden véges lánc tört racionális szám, továbbá minden végtelen, nem periódikus tizedestört (azaz irracionális szám) is előállítható végtelen lánc törtként.

Egy rövid előremutatás 1.

Végtelen egyszerű lánc törtek.

Legyen $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$. Az

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

kifejezést végtelen egyszerű lánc törtnek nevezzük.

Egy rövid előremutatás 2.

Egyszerű észrevételek.

- α véges kezdő szeletei sorozata mindig konvergens.
- E határérték mindig irracionális szám.
- Ha az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozat valahonnan kezdve periódikus, akkor α gyöke valamely egész együtthatós másodfokú polinomnak.

„Képzetes számok”.

Cardano feladata.

Bontsuk föl a 10-et két részre úgy, hogy a részek szorzata 40 legyen.

A megoldás.

A feladat az $x(10 - x) = 40$ másodfokú egyenletre vezet, amelyet formálisan megoldva az $5 \pm \sqrt{-15}$ gyököket kapjuk.

Cardano kommentárja.

... ha túltesszük magunkat azon a lelki tortúrán, amit az ilyen szám okoz, formálisan ellenőrizhetjük az eredményt, ami korrekt, de hasztalan.

„Képzetes számok”.

Bombelli kalkulusa.

A „casus irreducibilis” tárgyalásakor leírta a négy alapl művelet elvégzésének szabályait az $a \pm b\sqrt{-1}$ alakú kifejezésekre, de ezeket nem tekintette számoknak, csak haszontalan pusztá „szofizmusoknak”.

Albert Girard véleménye.

Mire is használhatjuk ezen lehetetlen megoldásokat? Három okunk is van: az általános szabályok bizonyítása, használhatóságuk és mert nincs más megoldás.

„Képzetes számok”.

Konkluzió.

Lényegében tehát, mint az egyenletek formális megoldását, a komplex megoldások elfogadását ajánlotta, de azt nem fogadták el kortársai.

Descartes.

1. Elutasította, **imaginárius** (képzeletbeli) megoldásoknak nevezete azokat.
2. Érvelése.

2.1 Az egyenletek negatív gyökei az egyenlet transzformációja révén valóssokká (azaz pozitívokká) tehetők,

2.2 a komplex gyökökkel ezt nem lehet megtenni.

„Képzetes számok”.

Isac Newton.

Nem tulajdonított jelentőséget az egyenletek komplex gyökeinek nyilván azért is, mert nem volt (akkor még) fizikai jelentésük.

G. Leibniz 1702.

Az Isteni Szellem egy nagyszerű megnyilvánulási alkalmat talált az analízis ezen csodájában, az ideális világ e szokatlan tüneményében, amely egyidejűleg létező és nemlétező, amelyet mi a negatív egység imaginárius gyökének nevezünk.

Vita a komplex számok mibenlétéről.

1. forduló: Jacob Bernoulli és G. Leibniz.

- Jacob Bernoulli az $\int \frac{a^2 dx}{a^2 - x^2}$ integrál kiszámítására az $x = a \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$ helyettesítést alkalmazta,
- ez $A \int \frac{dt}{t} = A \log t$ alakú, tehát logaritmusfüggvényre vezető integrált eredményezett.
- Leibniz Johann Bernoullival közösen az $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ alakú integrálokat is hasonlóan számolta.

Vita a komplex számok mibenlétéről.

1. forduló: Jacob Bernoulli és G. Leibniz.

- DE nem foglalkozak azzal, hogy a $b^2 - 4ac < 0$ esetben a gyökök nem valósak,
- így eljárásuk alapján olyan $\int \frac{dx}{cx + d}$ alakú integrálokat is eredményezett, amelyekben legalább a d nem valós (komplex) szám volt.
- Mindezek ellenére nyugodtan használták — formálisan — e módszert,
- ami azt föltételezte, hogy ismerték és használták mind a negatív, mind a komplex számok logaritmusát is.
- Leibniz ki is jelentette, hogy **a komplex számok jelenléte semmiféle problémát nem okoz.**

Vita a komplex számok mibenlétéről: Johann Bernoulli és G. Leibniz.

Egy melléktermék.

Egyik integráljuk az arcus tangens függvényre vezet, így eredményük kapcsolatot teremtett a trigonometrikus függvények és a logaritmus függvény között.

Tisztázandó új kérdések.

- 1. Léteznek-e a negatív, ill. a komplex számok logaritmusai?
- 2. Ha igen (ugyanis a követett eljárások ezt igénylik), akkor hogyan definiáljuk azokat?

Vita a komplex számok mibenlétéről: Johann Bernoulli és G. Leibniz.

Leibniz válaszai.

Egy 1712-es dolgozat és levél Johann Bernoullihoz:

- a negatív számok logaritmusai a valóságban nemlétezők,
- azaz imagináriusok (képzeletbeliek).

Johann Bernoulli viszontválasza.

A negatív számok logaritmusai létezők, azaz valóságosak (valós számok).

Vita a komplex számok mibenlétéről.

Leibniz érvelése.

- A pozitív logaritmus értékek az 1-nél nagyobb számokhoz tartozok, míg a negatívok a 0 és az 1 közöttiekhez.
- Nincs olyan szám, amely valamely másféle szám logaritmusa lehetne.
- Ha $\log(-1)$ létezne, akkor igaz lenne a $\log(-1) = 2\log(\sqrt{-1})$ egyenlőség is, de ennek jobb oldalán nemlétező mennyiség áll.
- Mondta mindezet integrálási módszerei ismeretében.

Vita a komplex számok mibenlétéről.

Johann Bernoulli érvei.

$\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \log(-x) = \log x$. Lévéen $\log 1 = 0$, $\log(-1) = 0$ is áll.

Leibniz kontrája.

A $d(\log x) = \frac{dx}{x}$ összefüggés csak pozitív x -ekre áll fönn.

A Bernoullik a továbbiakban Eulerrel vitatkoztak, de vele sem jutottak egyezsége.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

3. forduló (1727-31): Johann Bernoulli és Leonhard Euler (1707-83) .

Bernoulli fönntartotta korábbi véleményét, amelyet Euler elutasított. Az ő véleménye is meglehetősen ellentmondásos volt ekkor még. Így nem jutottak egyetértésre.

Áttörés, Roger Cotes eredménye 1714-ből.

- ▶ A már-már feledésbe merült eredmény (mai jelölésekkel)

$$\sqrt{-1}\Phi = \log(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi).$$

- ▶ Ez később alapvetőnek bizonyult.

Vita a komplex számok mibenlétéről.

Euler kontra Leibniz és Johann Bernoulli 1.

1. Leibniz állítása, hogy a $d(\log x) = dx/x$ összefüggés csak $x > 0$ -ra igaz „árnyékba borítja az analízis alapjait, amely szerint azok általános elveket tartalmaznak”. E formula is általános.
2. Bernoulli érveléséből, miszerint $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, pusztán az következik, hogy $\log x$ és $\log(-x)$ egy additív konstansban — amely éppen $\log(-1)$ — különbözik.
3. Bernoullinak a $\log(-1) = 0$ állítását korrekten bizonyítania kellett volna.
4. Azon érvelése ugyanis, hogy a $(-a)^2 = a^2$ egyenlőség alapján $\log(-a)^2 = \log a^2$, amiből $\log(-a) = \log a$ következik nem korekt.

Vita a komplex számok mibenlétéről 3.

Euler kontra Leibniz és Johann Bernoulli 3.

- ▶ Euler válasza: sorokkal érvelve itt semmit sem érünk el.
- ▶ hiszen

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i,$$

- ▶ amelyből $x = -3$ és $x = 1$ helyettesítésekkel,

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots$$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Vita a komplex számok mibenlétéről.

Euler kontra Leibniz és Johann Bernoulli.

Az előbbi két sort összeadva kapjuk, hogy

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \dots$$

De ez az utolsó egyenlőség pedig már nyilván lehetetlen.

Euler megoldása 1.

- ▶ Egy ismert sor

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- ▶ Az e végtelen összegként való ismert előállítás alapján

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i,$$

ahol i egy végtelen nagy számot jelöl.

- ▶ Mindkét oldalból i -edik gyököt vonva

$$x^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{y}{i}, \quad \text{azaz} \quad y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1).$$

adódik.

Euler megoldása 2.

- ▶ Mivel $x^{\frac{1}{i}}$ egy végtelen nagy kitevőjű gyök (lévén $1/i$ végtelen kicsi kitevő), az y -ra végtelen sok komplex értéket kapunk,
- ▶ továbbá $y = \log x$, ezért $\log x$ -nek is végtelen sok komplex értéke van.
- ▶ Pontosabban fogalmazva, ha

$$x = a + b\sqrt{-1} = c(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

akkor a c helyett e^C -t írva

$$x = e^C(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) = e^C e^{\sqrt{-1}(\varphi \pm 2\lambda\pi)},$$

Euler megoldása 3.

Így

$$y = \log x = C + (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1},$$

ahol λ tetszőleges nemnegatív egész szám.

Euler kommentárja.

...valamely adott pozitív valós számnak egyetlen valós és végtelen sok képzetes logaritmusa van, míg a negatív és a képzetes számok logaritmusának minden értéke képzetes, tehát imaginárius, azaz „képzeletbeli”.

Záró megjegyzések.

1. Megjegyzés.

E zseniális megoldásával nem aratott osztatlan sikert. Például D’Alambert, aki a Nagy Francia Enciklopédia matematika fejezetét összeállította, analitikus, geometriai és metafizikus érvek sorát adta a $\log(-1) = 0$ egyenlőség elfogadása érdekében.

2. Megjegyzés.

- ▶ Euler gondolatmenet mai szemmel is briliáns, de
- ▶ bár korrekt eredményre vezet
- ▶ mai értelemben teljesen inkorrekt.
- ▶ Mentségül: **Euler zseni volt.**

Összegzés: XVI. század.

- ▶ A század végére: vannak a természetes számok, talán még szám a 0 is, meg vannak a pozitív racionálisok, amelyek előállnak két természetes szám hányadosaként.
- ▶ Időnként, főleg a hiány megjelenítésére használni lehet negatív számokat (egészek és racionálisok), de ezek nem „igazi” számok.
- ▶ Vannak még olyan mennyiségek is, mint pl. a $\sqrt{2}$, de ezek nem „igazi” számok, de lehet őket „közelíteni” számokkal.
- ▶ Az, hogy ez mit jelent homályba veszett.
- ▶ Egyenletek formális megoldásakor ugyan előjöhethetnek $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezések, amelyekkel lehet számolni, de „minek”.

Összegzés: XVII. század.

- ▶ Nincs lényegi előrelépés.
- ▶ A „nem racionálisokra”, a $\sqrt{2}$ félére nem aritmetikai, hanem geometriai eljárásokat, szabályokat kell alkalmazni, mert
- ▶ önmagukban nem léteznek, csak az általuk reprezentált „folytonos geometriai mennyiséggel” együtt, azaz
- ▶ Euklidesz V. könyvében leírtakat kell alkalmazni.
- ▶ az $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezéseket nem is említik.

Összegzés: XVIII. század.

- ▶ Integrálási problémákban ismét előjönnek az $a + b\sqrt{-1}$ alakú kifejezések, és **képzetes, imaginárius számoknak** nevezik őket (Leibniz és Euler), mert nem a valóságban, hanem „csak a képzeletünkben léteznek”.
- ▶ Ugyancsak integrálási problémákból indulva Euler inkorrekt úton korrekt eredményre jut a negatív és az imaginárius számok logaritmusaival kapcsolatban.
- ▶ Ugyancsak Euler sejti meg, hogy **vannak olyan számok, amelyek meghaladják az algebrai módszerek erejét**, azaz nem algebraiak, ezek a **transzcendens számok**.
- ▶ Sejtése szerint az e , π , valamint a trigonometrikus és a logaritmus függvények értékei általában ilyenek.
- ▶ Bizonyítani csak azt tudták (ő és Lambert), hogy a két konstans irracionális.

Az analízis válsága: Konvergenca problémák.

XVIII. század.

- ▶ Newton és Leibniz **infinitezimális kalkulusa**: szabadon számoltak **végtelen kicsi/nagy** „számokkal”.
- ▶ Euler:

$$e^x = \left(a + \frac{x}{i}\right)^i \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right).$$

- ahol i „végtelen nagy szám”.
- ▶ Alapvető kérdés: **mi is a végtelen kis/nagy szám, mi egy végtelen sok tagú összeg?**
- ▶ Akkor csak intuitív megközelítés volt (pl. mint a görbe aszimptotája).

XIX.-XX. század: Végtelen sorok konvergenciája.

► **Definíció.** Legyenek $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ valós számok. A

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

végtelen sor konvergens, ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

határérték létezik és véges. Ellenkező esetben a végtelen sor **divergens**.

► **Megjegyzés.** Világos, hogy a konvergencia szükséges feltétele, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ legyen.

XIX.-XX. század: Hatványsorok konvergenciája.

► **Definíció.** Az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

alakú kifejezéseket, ahol $a_i \in \mathbb{R}$ és x valós változó, **hatványsoroknak** (pontosabban valós-) nevezzük.

► **Definíció.** Az előbbi **hatványsor konvergens** az (a, b) intervallumon, ha a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

(véges) határérték létezik minden $x \in (a, b)$ -re.

Konvergenca problémák: XVIII. század.

- J. Fourier: a rezgő húr problémája: analitikus sorfejtések.
- Az $f(x)$ függvény **Fourier sora**
-

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

► ahol

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nxdx.$$

Konvergenca problémák: XVIII. század.

- Súlyos probléma: több olyan függvény került elő, amelynek Fourier sora nem állította elő a kiindulási függvényt.
- Nagy kérdés: hol a hiba?
 - Nem korrekt a sorbafejtés, vagy
 - a konvergencia fogalma sántít.

A kiút keresése a válságból, a határérték pontos fogalma.

- ▶ A definíció:
- ▶ Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat határértéke az a szám, azaz e sorozat a -hoz konvergál, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\nu \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > \nu$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.
- ▶ De hogyan lehet megállapítani egy sorozatról, hogy ez teljesül? Meg kell „álmodni” előbb az a -t?
- ▶ Cauchy ún. belső konvergencia kritériuma a XIX. század elején.
- ▶ Az (a_n) számsorozat konvergens, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ létezik, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan ν , hogy valahányszor $m, n > \nu$ mindannyiszor $|a_m - a_n| < \varepsilon$.
- ▶ Probléma: e föltétel szükségessége nyilvánvaló, de elegendő is?

A kiút keresése a válságból, a folytonosság kérdése.

- ▶ A folytonos függvények Bolzano-Darboux tulajdonsága:
- ▶ Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $f(a)$ és $f(b)$ közötti $c \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $y \in [a, b]$, hogy $f(y) = c$.
- ▶ A probléma: Nem sikerült e szemléletesen nyilvánvaló állítást bizonyítani.
- ▶ Egyre erősödik az a nézet, hogy az igazi probléma a **valós szám fogalmának tisztázatlansága, pontatlansága**.
- ▶ A „nagy kérdés”: **Valójában mik is a valós számok?**
- ▶ A válasz még várat magára.

Egy kerülőút lépései.

- ▶ Az 1830-as években a komplex szám „intuitív” fogalma széles körben használatos, de ez többeket nem elégített ki.
- ▶ William Rowland HAMILTON (1805-65): *Conjugate Functions and on Algebra as the Science of Pure Time* c. 1837-es dolgozata.
- ▶ Hamilton legfontosabb észrevételei:
 1. Pontosítja az ún. komplex egység fogalmát: i -vel egy olyan **szimbólumot** jelöl, amelynek négyzete -1 .
 2. Egy $a + bi$ alakban írott komplex szám NEM olyan összeg, mint például a $2 + 3$. A „plusz jel” használata történeti tévedés, hiszen a bi nem adható hozzá a -hoz az ismert, a $+$ -szal jelölt összeadással.
 3. Az $a + bi$ komplex szám nem több (és nem is kevesebb), mint az (a, b) (valós számokból álló) **rendezett pár**.

Egy kerülőút lépései.

- ▶ A műveletek a következő.

$$\begin{aligned}(a, b) \pm (c, d) &= (a \pm c, b \pm d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ \frac{(a, b)}{(c, d)} &= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)\end{aligned}$$

- ▶ A „szokásos” műveleti tulajdonságok: asszociativitás, kommutativitás, stb. egyszerű számolással belátható. **Ezzel a komplex szám fogalma — a valós szám fogalmára építve — logikailag is korrekt megalapozást nyert.**
- ▶ Azt sajnos még mindig NEM TUDJUK, hogy mik is a valós számok, de nekik az $(a, 0)$ alakú párok felelnek meg.

Egy kerülőút lépései.

- ▶ Nem mellékes „melléktermék”: a bizonyos értelemben misztikus $\sqrt{-1}$ problémája is rendeződött, mivel az nem más, mint a $(0, 1)$ pár, hiszen $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, de $(0, -1)^2 = (-1, 0)$ is áll.
- ▶ Gauss egy 1837-ben Bolyai Farkashoz írott levelében megemlítette, hogy ő már 1831-ben eljutott a komplex szám ezen fogalmához, de (természetesen) ezt sem publikálta. Így a matematikai világ a prioritást Hamiltonnak adta és adja a mai napig is. A „komplex szám” elnevezés minden bizonnyal Gausstól ered.
- ▶ Cauchy 1847-ben egy másik definícióját adta meg a komplex számok testének, s így a komplex számoknak is:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1).$$

Egy lehetséges továbblépés.

- ▶ A **valós számok**at tekinthetjük **egydimenziós számoknak**, a **komplexe**ket **kétdimenziósoknak**. Jogos kérdés: **léteznek-e háromdimenziós számok** annál is inkább, hogy a minket körülvevő tér is három dimenziós.
- ▶ Ugyanis, a komplex számok síkvektoroknak (is) tekinthetők és hasznosak a síkgeometriában. Miért ne lehetne ugyanígy háromdimenziós számokat használni a térgeometriában?
- ▶ A komplex (kétdimenziós) számok geometriai alkalmazásával — a legtöbbször e síkbeli reprezentációt tekintve definíciójuknak — többen is foglalkoztak: Caspar WESSEL 1797-ben, Jean Robert ARGAND 1806-ban, John WARREN 1828-ban, és mint már említettük Carl Fridrich GAUSS 1831-ben.

Hamilton: Léteznek-e 3 dimenziós számok?

- ▶ A méltán híres matematikus és fizikus a komplex számok precíz fogalmának megadása után, 30 évig dolgozott a 3 dimenziós számok megalkotásán.
- ▶ Természetesen a valós szám fogalmának tisztázása nélkül, DE arra alapozva.
- ▶ A sikertelen kísérletek után áttért a 4 dimenzióra, és itt sikeres volt: megalkotta a **kvaternió** fogalmát.
- ▶ Az i -hez hasonló további két képzetes egységet, j , k vezetett be:
- ▶ A definiáló egyenlőségek: $ii = jj = kk = -1$,

$$ik = iij = -j, \quad kj = ijj = -i$$

$$ki = j, \quad jk = i$$

$$k^2 = ijj = -iij = -1$$

A kvaterniók és azokon túl.

- ▶ A $\mathbb{Q} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ halmaz, ahol i, j, k az iménti képzetes egységek, komplex számoknál megismert összeadással és szorzással, figyelembe véve az előbbi azonosságokat, egy ún. **ferdetest**, a **kvaternio-ferdetest**, ahol $(\mathbb{Q}, +)$ Abel-csoport, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ csoport, és a szorzás disztributív az összeadásra, és a mint gyűrű zérusosztó-mentes.
- ▶ 1882-ben Frobenius igazolta, hogy további bővítésnek nincs értelme, hiszen 8 dimenzióست még lehetne definiálni, de az már nem asszociatív és nem zérusosztó-mentes szorzású.
- ▶ A kvaternióknak kiterjedt alkalmazásai lettek, többek közt az elméleti fizikában és a geometriában.

Út a valós szám mai fogalmához, a kezdetektől Eulerig.

- ▶ Elméletileg: valós szám = ami a valóságban létezik.
- ▶ Gyakorlatilag: kezdetben pozitív, később tetszőleges racionális szám (= előáll, mint két egész szám hányadosa), végül bizonyos algebrai irracionálisokat, pontosabban a $\sqrt[n]{a \pm \sqrt[n]{b}}$ alakú számokat, — lényegében azokat, amelyek szerepelnek Euklidesz X. könyvében — is ide sorolták.
- ▶ De már a pisai Leonardo rámutatott, hogy nem minden egyenlet gyökei kaphatók meg az előbbi alakban.
- ▶ Megjelenik — nem pontosan — a képzetes (=komplex) szám fogalma, de az a valós szám fogalmán alapul.
- ▶ **Euler egy sejtése:** vannak olyan számok is, amelyek **meghaladják az algebrai módszerek erejét.**

Út a valós szám mai fogalmához, a kezdetektől Eulerig.

- ▶ Pontosabban: vannak olyan „valós” (=valóságos) számok is, amelyek nem racionálisok, de nem is gyökmennyiségek.
- ▶ **Definíció.** Az α „valós szám” **algebrai szám**, ha van olyan $f(x)$ racionális (egész) együtthatós nemzérő polinom, hogy $f(\alpha) = 0$.
- ▶ A korábbi sejtés pontosabban: Az irracionális számoknak két osztálya van: az előbb definiált algebraiak, valamint azok, amelyek „meghaladják” az algebrai módszerek erejét, azaz nem gyökei egyetlen racionális együtthatós (nemzérő) polinomnak sem.
- ▶ Ez utóbbiakat Euler **transzcendens számoknak** nevezte.
- ▶ Az elnevezés eredete: transcend=meghalad.

Hogyan ismerhetők föl a transzcendens számok: egy kézenfekvő ötlet.

- ▶ Egyszerűen igazolható, hogy a racionális számok tizedestört alakja véges, vagy periódikus.
- ▶ Bizonyítható, hogy egy α valós szám pontosan akkor racionális, ha lánctört alakja véges, így a végtelen lánctörtek állítják elő az irracionálisokat.
- ▶ Hasonlóan, mint a tizedestörteknél, definiálható a lánctörtek periodicitása.
- ▶ **Jámbor óhaj:** De szép lenne, ha éppen a periódikus végtelen lánctörtek lennének az algebrai irracionálisok.

Hogyan ismerhetők föl a transzcendens számok?

- ▶ **Sajnos** nem így van, a periódikus lánctörtek az ún. (valós) kvadratikus irracionálisokat, azok amelyek egész együtthatós másodfokú egyenletek nem racionális gyökei.
- ▶ Euler egy eredménye: Az e irracionális, mert lánctört alakja végtelen, DE vélhetően NEM kvadratikus irracionális, mert lánctört alakja nem tűnik periódikusnak.

Az e és a π lánctört alakja



$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$
$$=< 2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots >$$

- ▶ Ez tényleg nem tűnik periódikusnak, sőt a π lánctört alakja sem:
- ▶ Lambert (Euler tanítványa) megmutatta, hogy

$$\pi = < 3; 7, 15, 1, 282, \dots >$$

Áttörés:

LIIOUVILLE.

Az 1840-es évek elején folytatott vizsgálatai elvezettek annak igazolásához, hogy

LÉTEZIK TRANSCENDENS SZÁM.

Liouville tétele (1844).

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001 \overbrace{0 \dots 0}^{17 \text{ zérus}} 10 \dots$$

sor konvergens, és összege tetszőleges rendben approximálható racionális számokkal, így az transzcendens szám.

Kitérő: A számfogalom fölépítésének vázlata.

Természetes számok.

- ▶ A természetes számok a Peano axiómák egy modelljeként definiálhatók:
- ▶ $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, ha
 1. $1 \in \mathbb{N}$,
 2. $\forall k \in \mathbb{N}$ -hez létezik egy $k' \in \mathbb{N}$,
 3. nem létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $1 = k'$,
 4. ha valamely $m, n \in \mathbb{N}$ -re $m' = n'$, akkor $m = n$,
 5. ha $S \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $1 \in S$, és valahányszor $m \in S$, mindannyiszor $m' \in S$, akkor $S = \mathbb{N}$.
- ▶ Az $\mathbb{N}$ halmazon definiálható két asszociatív és kommutatív művelet, amelyeket általában $+$ és $\cdot$ jelöli, és összeadásnak, valamint szorzásnak nevezzünk.

Egész számok.

- ▶ A természetes számok egységelems félgűrűt alkotnak, így körükben általában nem oldhatók meg az $a + x = b$ alakú egyenletek, ahol $a, b \in \mathbb{N}$, ezért azt bővíteni kell.
- ▶ Végezzük el a következő konstrukciót.
 - ▶ Legyen $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és definiáljuk a következő relációt.
 - ▶ Tetszőleges $(a, b), (c, d) \in A$ -ra $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.
 - ▶ Definiáljunk összeadást és szorzást az $A / \sim$ halmazon:

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} \quad \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

- ▶ Megmutatható, hogy az $(A / \sim; +, \cdot)$ algebra egységelemes kommutatív zérusosztómentes gyűrű (=integrítástartomány).

Egész számok.

- ▶ Ezen a gyűrű elemeit egész számoknak nevezzük, és halmazukat $\mathbb{Z}$ jelöli. $\mathbb{N}$ beágyazható $\mathbb{Z}$ -be, azaz létezik $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ injektív homomorfizmus.
- ▶ Azaz a $\mathbb{Z}$ gyűrű tekinthető az $\mathbb{N}$ félgyűrű bővítésének.
- ▶ A bővítési folyamatot tovább kell vinni, meg kell konstruálni az egész számokat tartalmazó legszűkebb testet, amelyben már megoldhatók az $ax = b$, $a \neq 0$ alakú egyenletek is.

Racionális számok.

- ▶ A bővítés a következő konstrukciók nyugszik.
 - ▶ Legyen $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, amelyen két műveletet és egy (ekvivalencia) relációt definiálunk:
 - ▶

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (ad + bc, bd) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd),\end{aligned}$$

- ▶ $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.
- ▶ Ismét kiterjesztjük a műveleteket az $A/\sim$ faktorhalmazra:

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \overline{(0, b)} &= \overline{(a, b)} \\ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, d)} &= \overline{(a, b)} \\ a \neq 0 \Rightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} &= \overline{(d, d)}\end{aligned}$$

Racionális számok.

- ▶ Tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$ -ra
- ▶

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \overline{(0, b)} &= \overline{(a, b)} \\ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, d)} &= \overline{(a, b)} \\ a \neq 0 \Rightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} &= \overline{(d, d)}\end{aligned}$$

- ▶ Az utóbbiból következik, hogy ha $a \neq 0$, akkor megoldható az

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(c, d)}$$

- egyenlet.
- ▶ Ez azt (is) jelenti, hogy a $A/\sim$ algebra test, amelyet a racionális számok testének nevezzünk, és általában $\mathbb{Q}$ -val jelöljük.