

EUKLIDESZ V. POSZTULÁTUMÁTÓL
A NEM-EUKLIDESZI GEOMETRIÁKIG.
NÉHÁNY LÉPÉS A 2000 ÉVES ÚTON.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. április 29.

A kezdet.

Az V. posztulátum.

Követeltessék meg, hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabítva találkozzék azon az oldalon, amerre az két derékszögnél (összegben) kisebb szögek vannak.

- **Emlékezzünk.** Ez a posztulátum „kakuktktojás” a többi négy mellett, nem olyan „ön-evidens” állítás a fizikai térről, mint azok.
- 2000 éven keresztül kételyek sora merült föl, amelyek eloszlátásán sokan dolgoztak. Ezek alapvetően két föltevésen alapultak.

Az általános kételyek.

A két alapvető fölvetés.

1. Az V. posztulátum egy **tétel**, ezért **helyébe**, a posztulátumok sorába, egy **egyszerűbbet**, a többi négy posztulátumhoz hasonló **kellene illeszteni**.
2. **Törölhető** a posztulátumok közül: **az V. posztulátum egy tétel**, amit be lehet/kell bizonyítani az első négy posztulátum alapján.

Euklidesz kételyei.

A definíció és tételek az 1. könyvből.

- I.23. Definíció.** Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabítva egyiken sem találkoznak.
- I.27. Tétel.** Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.

További tételek az 1. könyvből.

I.28. Tétel. Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.

I.29. Tétel. Ha párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek.

I.30. Tétel. Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak.

Euklidesz **először a 29. Tétel bizonyításában** hivatkozott az **V. Posztulátumra**, bár korábban is hasznos lett volna.

Ókori kommentárok.

Proklosz
Az első, ókori kísérletekről az V. századi neoplatonista filozófus, **Proklosz** kommentárjaiból tudunk. Az első kettő a l.e. I. században élt **POSZIDONIOSZ** és **GEMINOSZ** nevéhez fűződik.

Poszidoniosz.
Definíció. *Azon egy síkban fekvő egyeneseket nevezzük párhuzamosoknak, amelyek mindenütt egyenlő távolságban vannak egymástól.*

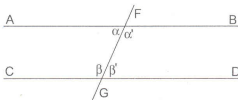
Geminosz vélekedése.
Euklidesz definíciója értelmében párhuzamosnak kellene tekinteni a hiperbola ill. a parabola aszimptotáját és magát a görbét, hiszen azok sem metszik egymást, de Poszidoniosz definíciója ezt kizárja.

Ókori kommentárok.

Proklosz.
Kimutatta, hogy egyik sem vezet semmi jóra, sőt Geminosz észrevételét a geometria talán legnagyobb paradoxonának tekintette, s mindkettőt elvetette.

Az első helyettesítési kísérlet.

- Klaudiosz Ptolemaiosz
- ▶ Az I.sz. II. századi csillagász érvelése.
 - ▶ Legyen AB és CD két párhuzamos egyenes, s jelölje az FG metsző egyenes által létrehozott 2-2 belső szöget α, β és α', β' .



Az első helyettesítési kísérlet.

Klaudiosz Ptolemaiosz érvelése:



- ▶ Három lehetőség van.
- ▶

$$\alpha + \beta \begin{cases} > \alpha' + \beta' \\ = \alpha' + \beta' \\ < \alpha' + \beta' \end{cases}$$

Az első helyettesítési kísérlet.



Az első lehetőség.

Ha $\alpha + \beta > 2R$, akkor

$$FB \parallel GD, \quad \text{és} \quad FA \parallel GC,$$

amiből a posztulátum szerint

$$\alpha' + \beta' > 2R \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4R,$$

ami lehetetlen. (R a derékszöget jelöli itt és a továbbiakban.)
A **harmadik lehetőség** ugyanúgy tárgyalható, mint az első.

Klaudiosz Ptolemaiosz posztulátuma.

Ha az előbbi lehetőségek valamelyike teljesül egy esetben, akkor minden esetben az az eset áll fenn.

Az első helyettesítési kísérlet.

A konklúzió.

Mivel e két eset nem lehetséges, marad a harmadik (a középső), tehát szükségképp

$$\alpha + \beta = 2R,$$

amiből levezethető az V. Posztulátum.

Proklosz véleménye:

Ptolemaiosz posztulátuma semmivel sem egyszerűbb Euklideszénél, nem is rövidebb.

Proklosz javaslata.

Két egymást metsző egyenes egy-egy pontjának távolsága akármilyen nagy lehet, ha az egyeneseket elegendően meghosszabítjuk.

Az első helyettesítési kísérlet.

Proklosz tétele.
Azon egyenes, amely két párhuzamos egyenes valamelyikét metszi, metszi a másikat is.

G. Saccheri (XVIII. sz.)
Proklosz sem oldotta meg a problémát. Igazolta, hogy e posztulátum (is) ekvivalens az eredetivel, föltéve, hogy két párhuzamos egyenes távolsága mindig véges. (Ennek ellenkezője a görögöknél föl sem merülhetett.)

Az iszlám matematikusok kísérletei.

Omar Khajjam: Kommentárok Euklidész könyvében található nehézségekhez.

- **Khajjam posztulátuma:** *Két összetartó (egymáshoz közeledő) egyenes metszi egymást, és lehetetlen, hogy két összetartó egyenes vonal távolodna egymástól az összetartás irányában.*
- Kommentárja szerint ezen elvet Arisztotelesz egy műve alapján fogalmazta meg, de az általa említett mű nem ismert a mai napig.
- **Megjegyzés.** Látni fogjuk, hogy ez (is) „zsákutca”, mert egy állítást kettőre cserélt, és mindkettő utóbb ekvivalensnek bizonyult Euklideszével.

Omar Khajjam tételei.

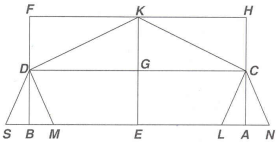
- 1. Tétel.** *Egy adott egyenesre merőleges két egyenes mindenütt egyenlő távolságra van.*
8 továbbval együtt ez helyettesíthetné az I.29. Tételt.
Bizonyításában alapvető volt a már korábban is említett ún. Archimedesz-Eudoxosz posztulátum.

Archimedesz-Eudoxosz posztulátum (Hilbert megfogalmazása).
Legyen A_1 tetszőleges pont valamely egyenesen a rajta fekvő A és B pontok között. Vegyünk föl ezen egyenesen olyan $A_2, A_3, \dots$ pontsorozatot, amelyre A_1 az A és A_2 , az A_2 A_1 és A_3 között fekszik, s így tovább. Továbbá legyenek az $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ szakaszok mind egyenlők. Ezen pontsorozatban van olyan A_n pont, hogy B az A és az A_n pontok közé esik.

Omar Khajjam.

Legfontosabb eredménye e témában.

- Egy ahhoz hasonló négyszöget vizsgált, amely évszázadokkal később G. Saccheri meggondolásaiban is alapvető szerepet játszott.
- A négyszög



Az európai matematikusok kísérletei 1.

- ▶ Az európai matematikusok a XVI. századtól kezdve foglalkoztak a párhuzamosok problémájával, mert csak ekkorra váltak ismertté számukra az alapvető görög és iszlám források (zömmel arab közvetítéssel).
- ▶ Az első érdemi eredmények az 1667 és 1733 között élt olasz jezsuita szerzetes és a Pavia-i Egyetem professzora **GEROLAMO SACCHERI** nevéhez fűződtek.

- ”
- ▶ Euclides ab omni naevo vindicatus ...” (Euklidesz megvédetett minden támadástól ...) (Milano, 1733.) című könyvében összefoglalta a párhuzamosokkal kapcsolatos vizsgálatait, amelyek az V. Posztulátum bizonyítását célozták.
 - ▶ Alapvető szerepe volt egy olyan négyszögnek (a Saccheri-négyszög), amely lényegében megegyezett Omar Khajjámmal

Az európai matematikusok kísérletei 2.

Saccheri eredményei 1.

- ▶ Első lépése a következő lemma volt.
- ▶ Ábra



- ▶ **Lemma.** *Ha az ABCD négyszögben az A és B csúcsoknál levő szögek derékszögek és az AD valamint a BC oldalak egyenlők, akkor a C és D csúcsoknál levő szögek egyenlők. Ha azonban e két oldal különböző, akkor a C és a D csúcsoknál levő szögek is különbözők, mégpedig az a nagyobb, amely a rövidebb oldalnál van.*

Saccheri eredményei 2.



Legyen a továbbiakban az A és a B-nél levő szög derékszög. 3 hipotézis fogalmazható meg.

- ▶ **Derékszög hipotézis:** (ekvivalens az V. Posztulátummal)

$$\angle C = \angle D = R.$$

- ▶ **Tompaszög hipotézis:** $\angle C = \angle D > R$.
- ▶ **Hegyszög hipotézis:** $\angle C = \angle D < R$.

Saccheri eredményei 3.

Saccheri 1. Tétele.



Tekintve rendre az előbbi hipotéziseket kapjuk, hogy $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$.

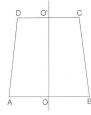
Bizonyítás.

A lemmát fogjuk használni.

- ▶ A derékszög hipotézis alapján nyilvánvaló, hogy $AB = CD$.
- ▶ Tekintsük ezután a tompaszög hipotézist, és állítsunk egy OO' merőlegest az AB oldal felezőpontjába.

Saccheri eredményei 4.

Bizonyítás. (folytatás)



- ▶ Ezen szakasz négyszögünket két egyenlő részre osztja, s mind az O , mind az O' csúcsoknál levő belső szög derékszög.
- ▶ A Lemma alapján $AO > DO$, s így $AB > CD$.
- ▶ Ha pedig a hegyesszög hipotézist vesszük alapul, akkor hasonló érveléssel adódik, hogy $AB < CD$.

Saccheri eredményei 5.

Saccheri további tételei 1.

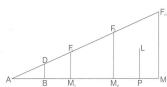
- 2. Tétel.** *Ha az előbbi hipotézisek valamelyike teljesül egy adott Saccheri-négyszögben, akkor valamennyi Saccheri-négyszögben e hipotézis teljesül.*
- 3. Tétel.** *Ha rendre a derékszög, a tompaszög ill. a hegyesszög hipotézis bizonyul igaznak, akkor a háromszögek belső szögeinek összege két derékszög, nagyobb két derékszögnél, ill. kisebb két derékszögnél.*
- 4. Tétel.** *Ha egy háromszög belső szögeinek összege két derékszöggel egyenlő, vagy nagyobb két derékszögnél, vagy kisebb két derékszögnél, akkor rendre ugyanaz teljesül bármely háromszögben.*

Saccheri eredményei 6.

Saccheri további tételei 2.

5. Tétel. (Két tétel egyesítve.) *Tegyük föl, hogy vagy a derékszög, vagy a tompaszög hipotézis teljesül. Az olyan egyenes amely merőleges egy adott egyenesre és ez utóbbit egy további egyenes hegyesszögben metsz, akkor az egyenes ez utóbbit is metszi.*

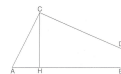
- ▶ Bizonyítás helyett tekintsük a következő ábrát. A tétel szerint a PL egyenes metszi a háromszög átfogóját.



Saccheri konklúziója 1.

7. Tétel. *Az V. Posztulátum igaz mind a derékszög-, mind a tompaszög hipotézis mellett.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő ábrát, ahol az AB és a CD egyenesek metszik az AC egyenest,



- ▶ és tegyük föl, hogy $\angle BAC + \angle ACD < 2R$.
- ▶ Ekkor az előbbi két szög közül az egyik, mondjuk a BAC szög hegyesszög. A C pontból húzzunk merőlegest AB -re, ez a CH egyenes.

Saccheri konklúziója 2.



- Föltételünk szerint az ACH háromszögben

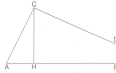
$$\angle A + \angle C + \angle H \geq 2R.$$

- Mi azonban azt tételeztük föl, hogy

$$\angle BAC + \angle ACD < 2R.$$

- Ez utóbbi két egyenlőtlenségből az következik, hogy $\angle AHC > \angle HCD$.

Saccheri konklúziója 3.



- Ezért a HCD szögnek hegyesszögnek kell lennie, mivel H -nál derékszög van. Az 5. Tétel alapján az AB és a CD egyenesek metszik egymást. Saccheri szerint ez azt jelenti, hogy a tompaszög hipotézis hamis.
- Mivel a két esetben Euklidész posztulátuma teljesül, igazak a belőle levezetett tételek is. Tehát a négyszöge belső szögeinek összege 4 derékszög, ami a derékszög hipotézist igazolja.
- Még nem érte el végcélját: be kellett még látnia, hogy a hegyesszög hipotézis sem állhat fenn.

Saccheri konklúziója 4.

A végső konklúzió előtt néhány további állítása..

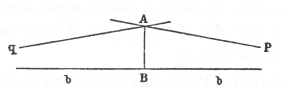
- Ha van két olyan egy síkban levő egyenes, amelyek nem metszik egymást, és nincs olyan egyenes, amely mindkettőre merőleges lenne, akkor ezek aszimptotikusok.
- Megjegyzés.** Ez megerősíti azon ókori görög vélekedést, hogy léteznek egy síkban levő aszimptotikus egyenesek.
- Ha teljesül a derékszög- vagy a hegyesszög hipotézis, akkor egy metsző egyenespár egyikén levő pont távolsága a másik egyenestől minden határon túl növekszik, ha a pont távolodik az egyenesen.

Saccheri végső konklúziói.

Összegző tétele.

Ha a hegyesszög hipotézis igaz, akkor adott b egyenes és rajta kívül fekvő A pont esetén léteznek olyan az A ponton áthaladó p és g egyenesek jobbra ill. balra haladva aszimptotikusak a b egyeneshez és az A ponton áthaladó egyeneseket két csoportra osztják. Az egyikbe azok tartoznak, amelyek metszik a b egyenest, míg a másikba azok, amelyeknél az A pontból a b -re húzható merőlegesek egybeesnek.

Ábra.



Saccheri végső konklúziói.

1. Ha két egyenes folytonosan közeledik egymáshoz úgy, hogy távolságuk mindig meghalad egy adott távolságot, akkor a hegyesszög hipotézis lehetetlen.
2. Ebből következik, hogy ha posztuláljuk, hogy nem léteznek aszimptotikus egyenesek, akkor el kell fogadnunk Euklidesz posztulátumát.
3. Az előbbiek alapján fontos döntés előtt állt.

3.1 A bizonyított állításoknak, a logikai érveléseknek hisz, vagy

3.2 intuícióiban, az évezredes beidegződésben bízik.

Saccheri döntése.

1. A hegyesszög hipotézis abszolút hamis, mert teljesen visszataszítóná teszi az egyenesek viselkedését.
2. Ezzel eljutott könyve címéhez: **EUKLIDÉSZ MEGVÉDETETT MINDEN TÁMADÁSTÓL.**

Összegzés.

- ▶ TALÁN Ő VOLT AZ ELSŐ MATEMATIKUS, AKI OLYAN PONTIG JUTOTT EL, AHONNAN MÁR CSAK EGY LÉPÉS VÁLASZTOTTA EL ATTÓL, HOGY KIJELENTSE
- ▶ „NEM BIZTOS, HOGY EUKLIDÉSZ GEOMETRIÁJA AZ EGYETLEN LEHETSÉGES ÉS ÍGY ABSZOLÚT”, LÉTEZHETNEK MÁS GEOMETRIÁK IS,
- ▶ PÉLDÁUL OLYANOK, AMELYEKBE NEM A DERÉKSZÖG HIPOTÉZIS TELJESÜL, HANEM A TOMPASZÖG HIPOTÉZIS, VAGY A HEGYESSZÖG HIPOTÉZIS.
- ▶ Egy későbbi „fajsúlyos probléma”: I. Kant véleménye.

Néhány állítás, amely ekvivalens az V. posztulátummal.

1. **Playfair Posztulátuma: Adott egy l egyenes és egy P pont úgy, hogy $l \notin P$. Pontosan egy olyan egyenes létezik P -n keresztül (a P és az l által meghatározott síkban), amely párhuzamos l -l.**
2. Egy háromszög (belső) szögeinek összege 2 derékszög.
3. Létezik négyzet a geometriában.
4. A Saccheri négyszögben a „felül levő” szögek derékszögek.
5. Léteznek hasonló, de nem egybevágó háromszögek a geometriában.
6. A félkörbe írt szög derékszög.
7. Bármely három, nem egy egyenesre eső, ponton át kör rajzolható.
8. A párhuzamosság tranzitív reláció. (Euklidesz: Elemek, I.30.)

Néhány állítás, amely ekvivanens az V. posztulátummal.

9. Azon egyenes szakasz hossza, amely egy háromszög két oldalának felezőpontját köti össze feleakkora hosszúságú, mint a háromszög harmadik oldala.
10. Létezik két olyan egyenes, amelyek mindenütt egyenlő távolságra haladnak egymástól.

Saccheri hatása.

G.S. Klügel (1763. Helmstädt)

- ”Az a bizonyosság, amely alapján elfogadjuk Euklidesz párhuzamossági posztulátumát, tapasztalati tényen alapul.”
- Ez az első olyan leírt vélemény, miszerint egy posztulátum nem valami ön-evidens állítás, hanem tapasztalaton, kísérleten alapuló kijelentés is lehet.

► Következtetése: Saccheri nem jutott ellentmondásra, pusztán egy olyan eredményt ért el, amely valami más tapasztaláson nyugszik.

J. H. Lambert

Theorie der Parallelinien (1766, 1786): egy olyan négyszöget tekintett, amelyben 3 derékszög volt. Megvizsgálta milyen lehet a negyedik szög.

J. H. Lambert.

1. **Tapasztalatai:** ha tompaszög, akkor ellentmondásra jutott, ezt a lehetőséget elvetette. Ellentétben Saccherivel, nem tapasztalt ellentmondást, ha hegyesszögnek tételezte föl.
2. Megvizsgálta — az elvetett — tompaszög, és a megtartott hegyesszög hipotézis néhány következményét.
3. Néhány megállapítása: Mindkét hipotézis mellett a sokszögek területe arányos az ún. szögdefektussal, a belső szögek összegének $(2n - 4)R$ -től való eltéréseivel. (Saccheri: $n = 3$.)
4. A tompaszög hipotézis olyan eredményekre vezet, amelyek hasonlatosak a gömbfelületen érvényesekhez.
5. A hegysszög hipotézis esetén olyan állításokat kapott, amelyek képzetes sugarú gömb felületén lennének érvényesek.
6. Egy mellékterméke vizsgálatainak: eljutott a trigonometrikus függvények kiterjesztéséhez komplex argumentumokra.

J. H. Lambert.

Fontos megállapítása:
HIPOTÉZISEK OLYAN EGYÜTTESE, AMELY NEM VEZET ELLENTMONDÁSRA, ELVEZETHET EGY ÚJABB GEOMETRIÁHOZ.

A Göttingeniek.

K. Schweikart

1818-ban Gausshoz küldött 1816-os dolgozatában megkülönböztetett két geometriát:

- ▶ az egyikben a háromszögekben a belső szögek összege $2R$,
- ▶ a másikban kisebb, vagy nagyobb, mint $2R$. **(Megjegyzés.** R a derékszöget jelöli.)
- ▶ Az utóbbiak közül azt geometriát, amelybe a szögösszeg kisebb $2R$ -nél, „asztrális geometriának” nevezte, mert az a „csillagok világában” lehetne érvényes.
- ▶ Ez hasonlatos Saccheri és Lambert hegyesszög hipotéziséhez.

A Göttingeniek.

F. A. Taurinus (Schweikart unokaöccse): Geometrie Prima Elementa (1826).

A zömmel analitikus geometriával foglalkozó könyvben azt írta, hogy „... az Euklideszi geometria nem írja le a fizikai teret, és az asztrális geometria logikailag konzisztens.”

Összegzések (Saccheri hatása):

- ▶ Klügel, Schweikart és Taurinus, valamint a göttingeni A. G. Kästner meg voltak győződve arról, hogy Euklidesz V. posztulátuma nem bizonyítható a többiből, tehát független azoktól.
- ▶ Lambert-Schweikart-Taurinus: úgy vélték, hogy egy alternatív posztulátummal logikailag konzisztens más geometria építhető ki.

A Göttingeniek.

Összegzések (Saccheri hatása):

- ▶ Lambert nem említett alkalmazási lehetőséget, Schweikart és Taurinus szerint a fizikai tér ilyen lehet, a csillagok világában érvényes geometriát kaphatunk.
- ▶ DE kijelenthető ezen vizsgálatok elindulásában Saccherié a fő érdem.

Carl Fridrich GAUSS (1777 Brunswick, 1855 Göttingen).

Életének néhány állomása:

1795 (egyetemi évek Göttingen): eljárás a szabályos 17-szög szerkesztésére.

Helmstädtban doktorál J. F. Pfaff-nál 1798-ban, értekezése legfőbb eredmény a (klasszikus) algebra alaptételének bizonyítása. Utána visszamegy Brunswickba, megírja egyik fő művét, a Disquisitiones Arithmeticae-t 1801-ben.

1794-ben igazolta, hogy a négyszög területe arányos a defektussal.

Carl Fridrich GAUSS életének néhány további állomása:

Levél Bolyai Farkasnak (1799): „A párhuzamossági posztulátum bizonyításában bizonyos haladást értem el, de a siker messze nem teljes. Például, ha igazolni tudnám, hogy létezik tetszőlegesen nagy területű egyenlőszárú háromszög, akkor igazolhatnám az egész Euklideszi geometriát. Eddig azonban mindig csak oda jutottam, hogy a terület korlátos. Többen javasolták, hogy legyen az előbbi egy posztulátum, de és azt elvetettem. Egyre erősödik azon megérzésem, hogy az V. posztulátum nem igazolható a többiből, így komolyan kellene venni új, lehetséges geometriák kialakítását.”

1807-ben meghívják az asztronómia professzorának Göttingenbe.

Carl Fridrich GAUSS életének néhány további állomása:

1813-as irataiban olvasható (csak halála után kerültek elő), komolyan fölvetette egy másik, anti-Euklideszi, vagy asztrális geometria létezését, amit később nem-Euklideszinek nevezett.

1827-ben jelenik meg Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas c. könyve, amelyben a felületek geometriájában (a görbült terekkel kapcsolatban) elért eredményeit összegezte.

Göttingeni éveiben W. Weberrel közösen megteremtették a modern értelemben vett elméleti fizika (a „matematikai fizika”) alapjait a mágnességre és az égitestek mozgására vonatkozó vizsgálataikkal.

A nem-Euklideszi geometriákkal (amelyekben nem érvényes az V. posztulátum) kapcsolatban nem publikált semmit, csak néhány levele maradt fenn.

Carl Fridrich GAUSS a nem-Euklideszi geometriákról.

Levél Besselnek 1829-ben:

”Valószínűleg soha sem fogom publikálni ezen eredményeimet, mert azok annyira meglepőek, furcsák.” DE alkalmazkodva a göttingeni tradíciókhoz a kérdés továbbra is foglalkoztatta: már 15 évesen is úgy vélte, hogy létezhetnek olyan konzisztens geometriák, amelyekben nem érvényes az V. posztulátum.

Carl Fridrich GAUSS a nem-Euklideszi geometriákról.

1817-es levele Olbersnek:

”Egyre jobban meg vagyok győződve arról, hogy az Euklideszi geometria fizikai szükségszerűsége nem igazolható, legalább is emberi elmével (kis engedmény Kant-nak). Lehet, hogy egy másik életben bepillanthatunk a tér természetébe, de az most elérhetetlen. ... Addig nem tehetjük a geometriát ugyanabba sz osztályba, ahol pl. az aritmetika van, amely tisztán a priori, inkább olyan, mint a mechanika.”

Carl Fridrich GAUSS híres kísérlete.

3 hegycsúcs, a Brocken, a Hohehagen és az Insekberg alkotta 69, 85 és 197 km oldalhosszúságú háromszög belső szögeit megmérve azt kapta, hogy az összeg 14,85 másodperccel nagyobb 180° -nál. Ezen eltérés kisebb a mérési hibánál, tehát nem dönt el semmit.

Összegzés.

Gaussnak megvolt az intellektuális bátorsága ahhoz, hogy komolyan foglalkozzon azzal a kérdéssel, hogy létezhetnek olyan geometriák, amelyekben nem érvényes az V. posztulátum, és az ilyen geometriáknak lehetnek fizikai alkalmazásai, lehet, hogy a fizikai térben egy ilyen geometria érvényes. DE morálisan nem merte fölállalni a szakítást Kant azon nézetével, miszerint a fizikai tér Euklideszi volta az a priori tudásunk része.

Morris KLINE (A XX. század egyik leghíresebb matematikatörténésze) véleménye.

A döntő lépést két olyan matematikus tette meg, akiknek nemcsak intellektuális bátorsága volt ahhoz, hogy szakítsanak egy 2000 éves dogmával, hanem morális tartásuk is volt ahhoz, hogy vizsgálataik eredményét a nyilvánosság elé tárják.

Nyikolaj Ivanovics LOBACSEVSZKIJ (1793-1856)

- ▶ Göttingenben J. C. Bartelsnél tanult, tanára révén megismerkedett a párhuzamosok problémájával. Különösen Legendre azon eredménye inspirálta, miszerint
- ▶ a háromszögek belső szögeinek összege nem haladhatja meg $2R$ -et,
- ▶ Ha van olyan háromszög, amelyben az összeg pontosan $2R$, akkor ez minden háromszögben teljesül.
- ▶ 1826-ban írta első cikkét a párhuzamosokról, de ez elveszett.
- ▶ 1829-30-ban 2 cikket közölt egy Kazan-i és egyet egy német folyóiratban. Elküldte eredményeit a Pétervári Akadémiának, de ott érdektelennek tartották (Osztrogradszkij véleménye alapján).

Nyikolaj Ivanovics LOBACSEVSZKIJ (1793-1856)

- ▶ 1840-ben könyv formájában német nyelven foglalta össze eredményeit, és elküldte Gaussnak. Ő meghívta Göttingenbe.
- ▶ Geometriájának végső formája egy 1855-ös (már vakon írt) könyvében jelent meg.

Bolyai János (Kolozsvár 1802 - Marosvásárhely 1860)



Márkos Ferenc festménye

Bolyai János (Kolozsvár 1802 - Marosvásárhely 1860)

- ▶ Részlet az 1823-as Temesvári levélből: **Egy olyan csodálatos fölfedezést tettem, amely engem is meglepett. A semmiből egy új, más világot teremtettem.**
- ▶ Ez az utalás arra, hogy eljutott az ún. hiperbolikus geometriához, amelyben egy egyenessel egy rajta kívüli ponton át a kettőjük által meghatározott síkban két párhuzamos, és végtelen sok nem-metsző egyenes húzható.
- ▶ Eredményét egy latin nyelvű függelékként (Appendix) jelentette meg apja Tentamen című ugyancsak latin nyelvű 1832-es könyvében „A tér abszolút tudománya” címmel.
- ▶ Apja elküldte Gaussnak, aki csak annyit válaszolt, hogy „nem dicsérhetem, mert akkor magamat dicsérem”.

Bolyai János (Kolozsvár 1802 - Marosvásárhely 1860)

