

Az Ókori Mezopotámia matematikája.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. február 11.-18.

A kezdetek.

Neolitikum

- ▶ Már az i.e. VIII. évezred elején is lakott volt a kellemetlen ökológiai viszonyok ellenére.
- ▶ Kevés ásványi nyersanyag, pusztító árvizek: özönvizek.
- ▶ Speciális házáépítési technika, tellek (település-halmok).
- ▶ Az első városok (falvak) kultikus helyeken 7000-től:
 - ▶ Dzsarmo (Kurdisztán) kb. 150 lakos,
 - ▶ Jerico (Palesztina) kb. 2000 lakos 6000 körül,
 - ▶ Ur (Dél-Mezopotámia) kb. 34.000 (!) lakos 2800 körül.

Az itt élő népek

Az őslakók ismeretlenek.

IV.-III. évezred.

Az itt élő népek

- ▶ Az első ismert bevándorlók a **SUMEROK**.
- ▶ Nem tudjuk merről jöttek, biztosan nem tartoztak a semi-, ill. az indoeurópai népek családjába,
- ▶ városállamokat alapítottak,
- ▶ a IV. évezred végén összeolvadtak az őslakókkal.
- ▶ Megbízható régészeti (írással) források kb. 2750-től vannak, zömmel a városállamok harcairól a hegemoniáért.
- ▶ Uruk ↔ Kis, és Ur ↔ Lagas.
- ▶ 2800 körül **GILGAMES** Uruk királya falat épít városa köré.
- ▶ 2600 körül: a *Gilgames eposz*, az első irodalmi alkotás.

A III. évezred.

Részlet a Gilgamesből.

Gilgámes barátjával Enkiduval elindul, hogy hőstetteket hajtson végre. Enkidu megöli Huwawát, a cédruserdő védelmezőjét és az égi bikát, akit Innin (Istar) istennő uszított a két hősre. Enkidunak e lázadásért halállal kell bünhődnie. Gilgámes kétségbeesetten indul útnak, hogy fölkeresse ősapját Utnapistit, és megtudja tőle a halhatatlanság titkát. Utnapisti azt tanácsolja neki, hogy 6 nap és 7 éjjel virrasszon, de Gilgámes nem állja ki a próbát, elalszik. Újabb hiábavaló próbálkozás után Gilgámes belátja, hogy a halhatatlanság az emberek számára elérhetetlen, de tettei mégis halhatatlan dicsőséget szereztek számára.

Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
-----------------------	----------------------------	-------------------------	---------------

A III. évezred.

Özönvíz legendák.

- ▶ Mintegy 250 ilyen legenda ismert.
- ▶ Görögök: Zeusz bosszúja az emberi romlottság miatt.
- ▶ Maják: A gyékényen ülő bölcsek könyve.
- ▶ A „klasszikus” bibliai történet.

Fontos találmányaik.

- ▶ fazekaskorong,
- ▶ lovak használata,
- ▶ ló vontatta kerek járművek.

Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet
-------------	---------------------

Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
-----------------------	----------------------------	-------------------------	---------------

A III. évezred.

A III. évezred 2. fele.

- ▶ 2500-tól Ur, a kor legnagyobb lakosságú városa hegemoniája.
 - ▶ kb. 34.000 lakos ↔ I.sz. XIII. sz-i Párizs, London.
- ▶ 2400 körül Lagas a vezető hatalom, az első társadalmi reform: Urukagina a kistermelők érdekében, majd az első kísérlet egységes birodalom létrehozására.
- ▶ Az I.e. XXIV. századtól az első sémi népcsoportként **AKKÁD** hódítók jöttek Sarrukin (Szargon) vezetésével. A különböző kronológiák szerint 2334 - 2279, ill. 2270 - 2215-ig uralkodott. Átveszik és terjesztik a sumér kultúrát.
- ▶ 2200 körül: „sumér másodvirágzása” Lagas vezetésével.
- ▶ Az irodalom másodvirágzása,
- ▶ az első kezdetleges helyiértékes számírás.

Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet
-------------	---------------------

Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
-----------------------	----------------------------	-------------------------	---------------

A II. évezred.

A II. évezred első harmada.

- ▶ 2000 körül több hullámban újabb, nomád, hódító sémi népek jönnek: **akkádok** (ismét), **elámiak**, **amurok/amoriták**, **médek** és mások.
- ▶ Letelepdednek, újabb városokat alapítanak, köztük **BABILONT** (akkádok). Gyors „lakosságcsere”, a sumer holt nyelv lesz, az akkád válik általánosan használttá.
- ▶ A XVIII. század elején **HAMMURAPI** megalapítja az **ÓBABLONI BIRODALMAT**.
- ▶ Hammurapi törvényei, I.sz. 1801, Susa.
- ▶ Ma is érvényes és használt matematikai eredmények.

Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet
-------------	---------------------

Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
-----------------------	----------------------------	-------------------------	---------------

Hammurapi törvényoszlopa 1.



Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet
-------------	---------------------

Hammurapi törvényoszlopa 2.



A II. évezred.

A II. évezred második felétől.

- ▶ 1600 körül a hettita hódítók megdöntik a birodalmat. Rövidesen a kassuk is jönnek, elterjesztik a lótenyésztést.
- ▶ 1500 körül alakul ki északon Föniciában az első, ékírásos ábécé, ami az eddigi szóírás helyett a betűírás kezdetét jelenti. A legrégebbi ismert ilyen szöveg kb 1250-ből való
- ▶ Ahiram bübloszi király szarkofágján olvasható.
- ▶ A XII. század elején asszír hódítók (Takulti-Ninurta).
- ▶ Takulti-apil-Ésara 1100 körül a történelem folyamán először:
 - ▶ népcsoportok áttelepítése.
- ▶ Rövidesen Damaszkusz megalapítása.

Ahram bübloszi király szarkofágja

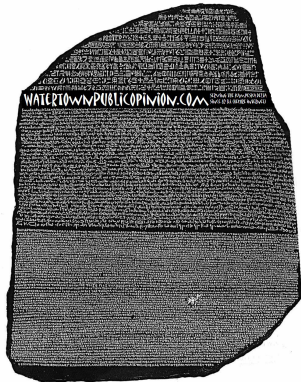


II. évezred.

Írásos emlékek.

- ▶ Az elsőként megtalált számottevő leletgyűttes: Asszurbanipal asszír uralkodó Ninive-i könyvtára.
- ▶ 1870. A Behistum kőtábla megtalálása.
- ▶ A XX. század első harmadában nagy számú matematikai tartalmú tábla került elő az ásásokkor.

A Behistum kőtábla.



A Behistum kőtábla.

- ▶ perzsa, asszír és méd nyelven tudósít I. Dareiosz perzsa uralkodó Kambüesz fölötti győzelméről
- ▶ A XIX. században a perzsa ismeretében megfejtették a másik kettőt, majd az asszír alapján az akkádót.

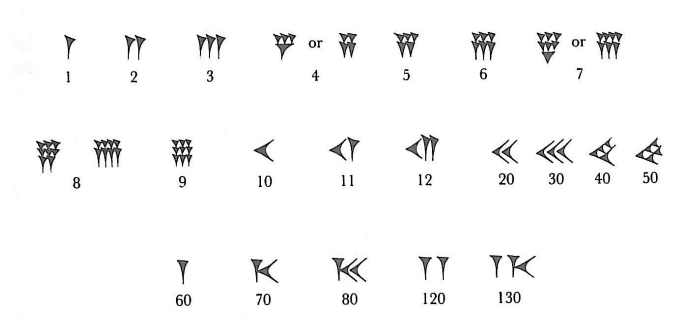
A mezopotámiai számírás.

60-as alapú helyiértékes számírást alkalmaztak. Mindössze két jelet használtak.

A számjegyek írása.

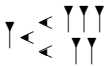
- ▶ Az 1 jele, az „ék”: 
- ▶ Nemcsak az 1-et, hanem a 60 bármely egész kitevős hatványát jelölhette.
- ▶ A 10 jele, a „sarokpánt”: 
- ▶ Ez szolgált a 60 bármely egész kitevős hatványa tízszeresének jelölésére is.

Számírás



A mezopotámiai számírás.

Egy példa.



- ▶ Ha egész szám, akkor lehet például
- ▶ $1 \times 60^3 + 10 \times 60^2 + 20 \times 60 + 5 = 253.205,$
- ▶ vagy $1 \times 60^2 + 30 \times 60 + 5 = 5.405,$
- ▶ vagy akár $60 + 35 = 95.$

A mezopotámiai számírás.

DE ők hatvanados törtekkel is számoltak, így a lehetséges jelentések száma növekszik.

Törtek.
Néhány lehetséges jelentés:

- ▶ $1 + 10 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-3}$
 $= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{43.200},$
- ▶ $60 + \frac{35}{60} = 60\frac{7}{12}.$

Neugebauer és Sachs kb. 1930-tól.

- ▶ A 60-as számrendszerben megadott számok decimális jegyekkel való fölírására Neugebauer adott meg egy módszert: a 60-ados jegyeket decimálisan írjuk, és vesszővel választjuk el egymástól.
- ▶ Az akkor nem létező „hatvanados-vesszőt” pontosvesszővel jelöljük. Így az előbbi számok a következőképp írhatjuk:
- ▶

$$\begin{aligned}
 1 \times 60^3 + 10 \times 60^2 + 20 \times 60 + 5 &= 1,10,20,5 = 253.205, \\
 1 \times 60^2 + 30 \times 60 + 5 &= 1,30,5 = 5.405, \\
 1 + 10 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-3} &= 1;10,20,5 \\
 &= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{43.200}
 \end{aligned}$$

Algebra: másodfokú egyenletek.

Megvizsgálunk néhány olyan problémát, amely — mai szóhasználattal — **másodfokú egyenletre** vezet.

1. Probléma (Szenkerekh).

Hosszúság és szélesség. A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, és így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadtam a területhez, és 3,3 [-at kaptam]. Hosszúság és szélesség összeadva pedig 27. Mi a hosszúság, szélesség, terület?

Algebra: másodfokú egyenletek.

Az eredmény közlése.

27	3, 3	az összegek
15		a hosszúság
12		a szélesség
3, 0		a terület

Az eredeti szöveges megoldás.

- ▶ 27-et, a hosszúság és a szélesség összegét 3, 3-hoz add hozzá; 3, 30 [az eredmény]. 2-t a 27-hez add hozzá; 29 [az eredmény]. Majd a 29-ből letöröd a felét; 14; 30-szor 14; 30 [az] 3, 30; 15. Levonsz 3, 30-at 3, 30; 15-ből; 0; 15 a különbség.
- ▶ 0; 15 négyzetgyöke 0; 30. Az első 14; 30-hoz add hozzá a 0; 30-at: a hosszúság 15. 0; 30-at a második 14; 30-ból kivonsz: a szélesség 14.
- ▶ Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál, 14-ből, a szélességből levonod: 12 a végleges szélesség. A 15 hosszúságot és a 12 szélességet összeszoroztam. 15-ször 12 [az] 3, 0 [ennyi a] terület.
- ▶ A 15 hosszúság a 12 szélességen mennyivel nyúlik túl? 3[-ma] haladja meg. 3-at a 3, 0-hoz, a területhez adj hozzá: 3, 3[-at kapsz].

Másodfokú egyenletek.

Elemzés 1.

Mai jelölésekkel: ha x a hosszúság, y a szélesség, akkor az

▶

$$\begin{aligned}xy + x - y &= 3, 3 \\ x + y &= 27\end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk.

- ▶ A számolás második lépéséből látszik, hogy az y szélesség helyett egy új $y' = y + 2$ szélesség bevezetésével kapjuk, hogy
- ▶

$$\begin{aligned}xy' &= 3, 30 \\ x + y' &= 29.\end{aligned}$$

Másodfokú egyenletek.

Megjegyzés.

Vegyük észre, hogy — mai terminológiával — az történt, hogy

- ▶ összeadta a két egyenletet

$$\begin{aligned}(xy + x - y) + (x + y) &= 3, 3 + 27 = 3, 30 \\ xy + 2x &= x(y + 2) = 3, 30 \\ xy' &= 3, 30\end{aligned}$$

- ▶ majd második egyenletként az

$$\begin{aligned}x + y + 2 &= 27 + 2 = 29 \\ x + y' &= 29\end{aligned}$$

egyenletet tekintette.

Elemzés 2.

Párhuzamos számolás 1.

$$27 + 3, 3 = 3, 30$$

$$2 + 27 = 29$$

$$29 : 2 = 14; 30$$

$$14; 30 \times 14; 30 = 3, 30; 15$$

$$3, 30; 15 - 3, 30 = 0; 15$$

$$xy' = 3, 30$$

$$x + y' = 29$$

$$\frac{x + y'}{2} = 14; 30$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 = 3, 30; 15$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy' = 0; 15$$

Párhuzamos számolás 2.

$$\sqrt{0; 15} = 0; 30$$

$$14; 30 + 0; 30 = 15$$

$$14; 30 - 0; 30 = 14$$

$$14 - 2 = 12$$

$$\sqrt{\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy'} = \frac{x - y'}{2} = 0; 30$$

$$\frac{x + y'}{2} + \frac{x - y'}{2} = x = 15$$

$$\frac{x + y'}{2} - \frac{x - y'}{2} = y' = 14$$

$$y' - 2 = y = 12$$

Másodfokú egyenletek.

Összegzés.

Mai szimbolikával a szöveges probléma egy



$$xy = P$$

$$x + y = a$$

- ▶ alakú egyenletrendszerre vezet.
- ▶ Ennek megoldásakor bevezettek egy új w határozatlant (a két eredeti határozatlan számtani közepétől való eltérést), amelynek révén egyhatározatlanossá vált a probléma:
- ▶ E módszer később még hivatkozunk.

Másodfokú egyenletek.

Összegzés.



$$x = \frac{1}{2}a + w$$

$$y = \frac{1}{2}a - w, \quad w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P}.$$

- ▶ A bemutatott számolás ezen w meghatározása

De mit kellene ehhez tudni?

- 1. Egyrészt ismerniük kellett az alábbi azonosságokat:
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- 2. másrészt tudniuk kellett négyzetgyököt vonni.

Megjegyzések.

- 1. Hangsúlyozni kell, hogy formulákat kizárólag a mai olvasó könnyebbségére írtunk és írunk föl.
- 2. A MEZOPOTÁMIAI ÍRŰK MINDEN PROBLÉMA MEGOLDÁSÁT SZÖVEGESEN ÍRTA LE.

További másodfokú egyenletek.

VAT 6598.
Megoldandó az

$$\begin{aligned} xy &= P \\ x - y &= d \end{aligned}$$

egyenletrendszer.

VAT 6598.

Megoldás.

- Most a határozatlanok számtani közepére vezettek be új határozatlant, mi w -vel jelöljük.
-

$$x = w + \frac{d}{2}, \quad y = w - \frac{d}{2}, \quad \text{ahol } w = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + P}.$$

Az előbbi két feladat megoldási módszere szerepel I. sz. 250 körül élt alexandriai Diophantosz Aritmetikájában, mint az összeg és különbség módszere.

Másodfokú egyenletek.

További problémák: BM 13901.

- 8. Probléma: Megoldandó az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= S = 21,40 \\ x + y &= a = 50 \end{aligned}$$

egyenletrendszer.

- A számolás az mutatja, hogy a második egyenlet négyzetéből kivonták az első egyenletet, és ezzel ugyanolyan egyenletrendszert kaptak, mint az első problémában szereplő, és a

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/8.

$$w = \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$
$$x = \frac{a}{2} + w,$$
$$y = \frac{a}{2} - w,$$

formulák által leírt úton haladtak.

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/9.

A második egyenlet most $x - y = d = 10$ alakú, s a megoldás az előbbiekhez hasonlóan az

$$w = \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2},$$
$$x = w + \frac{d}{2},$$
$$y = w - \frac{d}{2}.$$

formulákkal adható meg.

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/2.

Kivontam a négyzetet a területéből és az 14, 30.

Az eredeti megoldás.

- ▶ Vedd az 1-et [az együttthatót] és osszad két részre.
- ▶ A 0; 30-at szorozd önmagával, az 0; 15.
- ▶ Ezt add hozzá a 14, 30-hoz.
- ▶ A 14, 30; 15 [négyzet]gyöke 29; 30.
- ▶ Ezt add hozzá a 0; 30-hoz, amit önmagával szoroztál.
- ▶ Ez 30, ami a négyzet [oldala].

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/2. Elemzés.

- ▶ A probléma az $x^2 - x = 14, 30$ egyenlet, egy $x^2 - ax = b$ alakú egyenlet, megoldását kívánja.
- ▶ Látható, a bal oldalt teljes négyzetté alakították (az említett azonosság alkalmazásával), és
- ▶ a ma „mérlegelvnek” nevezett módszert alkalmazták.
- ▶ Az utóbbi első alkalmazását az 1930-as évekig az I.sz. VIII. században élt bagdadi al-Khwarizminek tulajdonították.

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/2. Elemzés, a számolás eredménye.

Az $x^2 - ax = b$ alakú egyenlet megoldása:

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b}$$

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/7.

A négyzet hétszereséhez hozzáadtam a terület tizenegyszeresét és ez 6; 15.

A megoldás elve.

- ▶ A $11x^2 + 7x = 6; 15$ egyenletet kell megoldanunk.
- ▶ Ismét négyzetté alakították az egyenlet bal oldalát, de
- ▶ ehhez előbb 11-gyel megszorozták az egyenlet, azaz a

$$2, 1x^2 + 1, 17x = 1, 8; 45$$

egyenlettel dolgoztak.

Másodfokú egyenletek.

A megoldás mai jelölésekkel.

- ▶ A megoldandó egyenlet

$$ax^2 + bx = c$$

alakú.

- ▶ Átalakítás után kaphatta, hogy

$$a^2x^2 + abx = ac$$

- ▶ Számolásuk formulával:

$$x = \frac{1}{a} \left(\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \right)$$

Észrevétel.

- ▶ Az előbbi két megoldás azt tanúsítja, hogy tulajdonképpen ismerték a „másodfokú egyenletek gyökképletét”, hiszen aszerint számoltak.
- ▶ Világos azonban, hogy NEM a KÉPLETET ismerték, hanem azt az eljárást, amivel az megkapható.

Másodfokú egyenletrendszerek.

Még három feladat módszereik erejének demonstrálására.

BM 13901/14.

Két négyzetem területét összeadtam, [az] 25,25. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.

A megoldás 1.

- ▶ Ha x, y jelöli a két négyzet oldalát, akkor az
- ▶

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25,25 \\ y &= 0;40x + 5\end{aligned}$$

- ▶ egyenletrendszert kell megoldani.

Másodfokú egyenletrendszerek.

- ▶ A második egyenletből y -t az elsőbe helyettesítve,

$$a_1x^2 + a_2x = a_3$$

alakú másodfokú egyenletet kapunk.

- ▶ DE, e módszer — a behelyettesítés — bevezetését szintén al-Khwarizminek tulajdonították.

Másodfokú egyenletrendszerek.

A megoldás 2.

- ▶ Az agyagtáblán található számolás ezt a vélekedést is cáfolja, ugyanis a következőképp számoltak:
- ▶

$$\begin{aligned}1 + 0;40 \cdot 0;40 &= 1;26,40, \\ 5 \cdot 0;40 &= 3;20, \\ 25,25 - 5 \cdot 5 &= 25,0\end{aligned}$$

- ▶ Ez pedig nem más, mint azon egyenlet együtthatói kiszámítása, amit az említett behelyettesítéssel kapunk, azaz

$$x^2 + (0;40x + 5)^2 = 25,25.$$

Másodfokú egyenletrendszerek.

A megoldás 3.

- ▶ Rendezve

$$(1 + 0;40^2)x^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0;40x = 25,25 - 5^2 = 25,0.$$

- ▶ Ezen egyenlet megoldását az alábbi számolásokkal végezték el:
- ▶

$$\begin{aligned}1;26,40 \cdot 25,0 &= 36,6;40, \\ 3;20 \cdot 3;20 &= 11;6,40, \\ 36,6;40 - 11;6,40 &= 36,17;46,40.\end{aligned}$$

- ▶ Ezután megadták a 36,17;46,40 négyzetgyökét, ami 46;40, majd így folytatták.

Másodfokú egyenletrendszerek.

A megoldás 4. (eredeti)

- ▶ A gyöknek és annak, amit önmagával szoroztál a különbsége 43; 40.
- ▶ Ha ezt megszorozod 1; 26, 40 reciprokával, megkapod az egyik négyzetet [a négyzet oldalát], ami 30. A másik négyzet [oldala] pedig 25.

Megjegyzés.

Hasznos lehet az érdeklődők számára a reciprok meghatározása hatvanados tört alakban, mi nem részletezzük. Az azonban világos, hogy korrekt megoldást kaptak.

Másodfokú egyenletrendszerek.

Elemzés.

- ▶ Világos, hogy a behelyettesítés után kapott

$$ax^2 + 2bx = c$$

alakú egyenletet előbb a-val megszorozták,

- ▶ olyan lépések, amelyek első alkalmazását al-Khwarizminek szokás tulajdonítani,
- ▶ majd az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították,

$$(ax + b)^2 = ac + b^2.$$

- ▶ ezután gyökvonással kapták a megoldást.

Tanulságok.

- ▶ Az Óbabiloni Birodalom írnoakai ismerték az összeg és a különbség négyzetére vonatkozó azonosságokat.
- ▶ Ismereték már az al Khwarizminek tulajdonított al-muqabala és al-jabr módszert.
- ▶ Minden olyan (pozitív együtthatós) másodfokú egyenletet meg tudtak oldani, amelyeknek volt pozitív gyöke (két pozitív gyök esetén csak a nagyobbikat adták meg).
- ▶ Így az egyenletek 3 típusával kellett foglalkozniuk:

$$\begin{aligned}x^2 + px &= q \\ x^2 &= px + q \\ x^2 + q &= px\end{aligned}$$

Egy megmaradt kérdés.

Hogyan számolták ki (pozitív) számok négyzetgyökét?

A Yale Egyetem gyűjteményének YBC 7289-es agyagtábláján szerepel a $\sqrt{2}$ kiszámítása 3 hatvanados tört helyiértékre:

1; 24, 51, 10.

- ▶ E szám decimálisan közelítőleg 1, 41421 $\overline{296}$, ami csak kb. $6 \cdot 10^{-7}$ -nel tér el a helyes értéktől.
- ▶ Ezt a pontosságot a reneszánsz kor vége felé tudták újra elérni az európai, valamint az iszlám matematikusok.

Az YBC 7289 agyagtábla.



2. a YBC 7289 tábla.

A táblán egy négyzet látható két átlójával. Az oldalán a 30, átlóin az 1, 24, 51, 10 és a 42, 25, 35 számok olvashatók.

Ezek interpretációja:

- Vegyük észre, hogy

$$1, 24, 51, 10 \cdot 30 = 1, 24, 51, 10 : 2 = 42, 25, 35$$

- ami azt rejti, hogy az $a = 30$ oldalból a $d = 42, 25, 35$ átlót a

$$\sqrt{2} = 1; 24, 51, 10$$

érték segítségével kaptuk.

Mennyire jó az approximáció?

Számoljunk

- Emeljünk négyzetre

$$1; 24, 51, 10^2 = 1; 59, 59, 59, 38, 1, 40$$

- azaz a hiba kisebb mint $22 \times 60^{-4} \approx 10^{-7}$.
- Decimálisan e szám 1,41421296, a mai kalkulátor adta 1,4142135 helyett.

Egy jogos kérdés.

- Ismerték a Pithagorasz-tételt több mint 1000 évvel a görög matematikus előtt?
- A válasz IGEN, de ...[Később indoklunk.](#)

Négyzetgyökvonás.

Iterációs eljárásuk.

$\sqrt{a}$ -t akarjuk meghatározni.

- 1. lépés: Válasszunk egy a_1 közelítést,
- a második legyen a $b_1 = \frac{a}{a_1}$. $\sqrt{a}$ a két érték között van.
- 2 lépés: Legyen $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, és $b_2 = \frac{a}{a_2}$.
- Világos, hogy

$$\sqrt{a} \quad a_2 \quad \text{és} \quad b_2 \quad \text{között van,}$$

valamint

$$|a_1 - b_1| > |a_2 - b_2|$$

- Az eljárást a kívánt pontosság eléréséig kell folytatni, de hány lépés kell.

A mezopotámiai algebra.

Konvergenция.

Az eljárás nyilván konvergens, gyorsaságát mutatja, hogy ha $\sqrt{2}$ értékét az előbbi módon az $a_1 = 1$ kezdő értékkel számoljuk, akkor az a_5 értéke megegyezik azzal a számmal amit a mai általánosan használt zsebkalkulátorok szolgáltatnak. A pontosság kb. $6 \cdot 10^{-7}$.

Utóélet.

Ezen algoritmust a későbbi korok számos tudósna tulajdonították. Olvashatunk róla úgy, mint a i.e. 426-365 között élt tarrentumi Archytas (az „utolsó nagy pitagoreus”), a i.sz. 100 körül élt alexandriai Heron eljárása, de úgy is, mint Newton algoritmusa.

Az YBC 7289-es tábla száma.

- ▶ A szereplő érték egyszerűen és gyorsan megkapható ezen eljárással.
- ▶ Legyen $a_1 = 1; 30$, ekkor $b_1 = 1; 20$.
- ▶ $a_2 = 0; 30(1; 30 + 1; 20) = 0; 30 \cdot 2; 50 = 1; 25$,
- ▶ $b_2 = \frac{2}{1;25} = 1; 24, 42, 21$.
- ▶ Folytatva:

$$a_3 = 0; 30(1; 25 + 1; 24, 42, 21) = 0; 30 \cdot 2; 49, 42, 21 = 1; 24, 51, 10, 30.$$

- ▶ Ebből az utolsó jegyet elhagyva, vagy a 21 felét egyszerűen 10-nek véve, adódik a tábla 1; 24, 51, 10-es értéke.

Még egy gyökvonási eljárás.

- ▶ Számos feladatban alkalmazták a

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

közelítést.

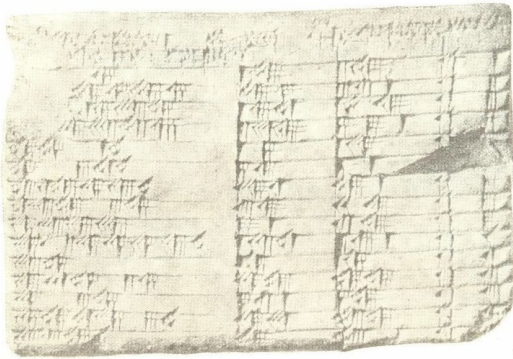
- ▶ Ez első látásra (mai szemmel!) a binomiális sorral való — két tagot figyelembe vevő — közelítés, de ők ezt nyilván nem tudták alkalmazni.
- ▶ Azonnal adódik azonban az előbbi eljárásból: legyen $a_1 = a$, és az a_2 -t kell meghatározni mindössze:

$$a_1 = a \qquad b_1 = \frac{a^2 + b}{a} = a + \frac{b}{a}$$

$$a_2 = \frac{a + (a + \frac{b}{a})}{2} = a + \frac{b}{2a}$$

- ▶ Ezen egyszerű közelítést még ma is használjuk.

A Plimpton 322. agyagtábla.



Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
I	II(= b)	III(= d)	IV
[1, 59, 0,]15	1, 59	2, 49	1
[1, 56, 56,]58, 14, 50, 6, 15	56, 7	3, 12, 1	2
[1, 55, 7,]41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1, 50, 49	3
[1,]5[3, 1,]0, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	4
[1,]48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
[1,]47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
[1,]43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
[1,]41, 33, 59, 3, 45	13, 19	20, 49	8
[1,]38, 33, 36, 36	9, 1	12, 49	9
1, 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
1, 33, 45	45	1, 15	11
1, 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
[1,]27, 0, 3, 45	7, 12, 1	4, 49	13
1, 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 31	53, 49	14
[1,]23, 13, 46, 40	56	53	15
Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet		

Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
A Plimpton 322 agyagtábla.			
Neugebauer elemzése 1.			
- A II. és a III. oszlopban álló b, d számok ún pitagoraszai számok, ugyanis $d^2 = l^2 + b^2,$ - Az l szám ugyan nem található meg a (jelenlegi) táblázaton, de könnyen kiszámítható b és d ismeretében. - Vélhetően egy időközben letörött (és vissza nem ragasztott) oszlopban szerepeltek. Itt a Pitagorasz-tétel?, - sőt itt kezdődött a pitagoraszai-számhármasok vizsgálata?			
Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet		

Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
A Plimpton 322 agyagtábla.			
Az előbbi / értékek.			
sor	/	sor	/
1	2, 0	6	6, 0
2	57, 36	7	45, 0
3	1, 20, 0	8	16, 0
4	3, 45, 0	9	10, 0
5	1, 12	10	1, 48, 0
11	1, 0	12	40, 0
13	4, 0	14	45, 0
15	1, 30		
Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet		

Történeti áttekintés.	A mezopotámiai aritmetika.	A mezopotámiai algebra.	Plimpton 322.
A Plimpton 322 agyagtábla.			
Három megválaszolandó kérdés.			
- Milyen elv szerint rendezték el a számhármasokat? - Hogyan számolták ki a táblázaton szereplő számokat? Hogyan határoztak meg olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám? - Milyen „szinten”, milyen „mélységben” ismerték a Pitagorasz-tételt?			
Mezopotámia	TTIK Bolyai Intézet		

A válaszok.

1. Kérdés.

- ▶ Az első sorból

$$\frac{b}{l} = \frac{1,59}{2,0} = 0;59,30 \approx 1$$

- ▶ azaz a háromszög egyenlőszárú, egy négyzet fele.
- ▶ Egyszerűen kapható, hogy a 15. sornak megfelelő derékszögű háromszög két hegyesszöge közelítőleg 30° és 60°.
- ▶ A közbűlső értékek pedig olyanok, hogy az l. oszlopbeli $\frac{d^2}{l^2}$ értékek közelítőleg lineárisan csökkennek, ami még inkább teljesül a $\frac{d}{l}$ értékekre.

A válaszok.

2. Kérdés.

- ▶ Ennek megválaszolása messze vezetne, nem részletezzük.
- ▶ Egy másik előadásban az érdeklődők részletes választ kaphatnak rá.
- ▶ Csak annyit, hogy egyenletmegoldási módszereiket kell alkalmazni.

3. Kérdés.

A válasz egyszerű: empirikus eredményként.