

Az Ókori Kína Matematikája.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2018. február 25.

Történelmi mérföldkövek 1.

- I.e. 1550-1050 k.** A legkorábbi államalakulat a Hoang ho a **Vörös folyó** völgyében, a **San-Jin** állam. Első írásos emlékek, bronzkori kultúra.
- I.e. 1050-770 k.** A **Csou-dinasztia** állama.
- I.e. 770 k.** Az állam fölbomlik, néhány nagyobb fejedelemség függetleníti magát. Állandó harcok a hegemoniáért: „Tavaszi és őszi korszaka” I.e. 722-481, a „Harcoló királyok kora” I.e. 481-221.
- Létrejönnek a nagy vallásfilozófiai iskolák: **taoizmus** (I.e. VI. sz. Lao-ce), **konfucianizmus** (Konfuciusz, vagy Kung-ce megh. 479).

Történelmi mérföldkövek 2.

- I.e. 220-209 k.** Csing Si Huang-ti legyőzi és egyesíti a „harcoló királyságokat”, császárként megalapítja a Kínai Birodalmat, **Csin dinasztia, I.e. 221-206.**
- Kialakul a később **ázsiai típusú birodalomnak** nevezett államforma, benne az ún. **ázsiai termelési mód**:
 - despotikus császári hatalom,
 - centralizált hivatali apparátus,
 - fejlett adórendszer.
- Védmű (a Nagy Fal előde) a birodalom határán.
- I.e. 206-I.sz. 8.** Az első, a **korai Han-dinasztia.**
 - Folytatódik a bürokratikus államrend kiépítése,
 - szervezett hivatalnokképzés,
 - terjedni kezd a konfucianizmus, később államvallássá válik,
 - hódító politika: Dél-Kína, Korea, Mandzsuria, Tarim-medence (első kapcsolat az indiai és a perzsa kultúrával),
 - a Nagy Fal építése.

Történelmi mérföldkövek 3

- I.sz. 200 k.** Kína északi határán megalakul a legkorábbi ismert belső-ázsiai nomád birodalom: a **hunok elődei?**
- I.sz. 25-220** A második (késői) **Han-dinasztia.** A hódításokat már csak dél felé folytatják. Behatolnak Hátsó-Indiába.
- I.sz. 316** A belső-ázsiai nomádok támadása megdönti a Han-dinasztiát követő Csin-dinasztiát. Délre menekülve új birodalmat hoznak létre a Jang ce, a **Sárga folyó** mentén.
- Északon nomád birodalmak alakulnak, és azok fokozatosan átveszik a kínai kultúrát.
- 439** A (barbár) **Vej-dinasztia** egyesíti Észak-Kínát, uralkodóvá teszi a buddhizmust.
- 589-618** A **Szuj-dinasztia** uralma alatt újra egységesül az egész Kína.

Az első ismert matematikai mű.

AZ ARITMETIKA MŰVÉSZETE KILENC KÖNYVBEN

A „Kilenc Könyv”.

1.

Először az i.e. 179-körül (korai Han dinasztia) állították össze az I. évezred kínai matematikája összefoglalásaként.
2.

A legrégebbi fennmaradt példány (egy szerkesztett változat) szerzője az I.sz. III. század híres geométere Liu Huj.

2.1

A matematikai ismeretek enciklopédiája az államszervezet hivatalnokainak szolgálatában.

2.2

A célszemélyek: földmérők és építészek, pénzügyi hivatalnokok és kereskedők, gazdálkodók és kézművesek.

Az egyes könyvek témakörei.

- I. Területszámítás, számolás törtekkel.
- II. A különböző szemes termények kölcsönviszonya (pl. tisztítatlan köles, durván földolgozott köles, tisztított köles, ..., fejedelemnek való köles). Lineáris határozatlan egyenletek, egyenletrendszerek.
- III. Arányos osztások (pl. 3 szarvas húsának fölosztása 5 különböző rangú hivatalnok között $5 : 4 : 3 : 2 : 1$ arányban.)
- IV. Sao kang. Geometriai problémák (pl, téglalap egy oldalának meghatározása a területből és a másik oldalból, kör-, ill. gömb átmérőjének meghatározása a területből ill. térfogatból).

Az egyes könyvek témakörei.

- V. A munkák értékelése: különböző falak, csatornák, gátak stb. (bonyolult alakzatok is) építéséhez szükséges munkások számának meghatározása.
- VI. Arányos elosztás, benne véges sorok összegzése.
- VII. Többlet és hiány.
- VIII. Fang-cseng, lineáris egyenletrendszerekre vezető problémák.
- IX. Kou-kuba, derékszögű háromszögekkel kapcsolatos feladatok.

A kínai számírás.

Tizes alapú és bizonyos helyiérték-szerű jegyeket hordoz. A számjegyeket pálcikákból (számolópálcák) rakták függőlegesen vonalazott táblára. Fönről lefelé írtak.

I	egy, száz, ..., 10^{2k} ,
II	kettő, kétszáz, ..., $2 \cdot 10^{2k}$,
III	három, ..., $3 \cdot 10^{2k}$,
IIII	négy, ..., $4 \cdot 10^{2k}$,
IIII	öt, ..., $5 \cdot 10^{2k}$,
┐	hat, ..., $6 \cdot 10^{2k}$,
┐┐	hét, ..., $7 \cdot 10^{2k}$,
┐┐┐	nyolc, ..., $8 \cdot 10^{2k}$,
┐┐┐┐	kilenc, ..., $9 \cdot 10^{2k}$,

A kínai számírás.

További számjegyek.

—	tíz, ezer, $\dots, 10^{2k+1}$,
—	húsz, kétezer, $\dots, 2 \cdot 10^{2k+1}$,
≡	harminc, $\dots, 3 \cdot 10^{2k+1}$,
≡	negyven, $\dots, 4 \cdot 10^{2k+1}$,
≡	ötven, $\dots, 5 \cdot 10^{2k+1}$,
⊥	hatvan, $\dots, 6 \cdot 10^{2k+1}$,
⊥	hetven, $\dots, 7 \cdot 10^{2k+1}$,
⊥	nyolcvan, $\dots, 8 \cdot 10^{2k+1}$,
≡	kilencven, $\dots, 9 \cdot 10^{2k+1}$,

A kínai számírás.

A számjegyek.

Általában: „Az egyesek állnak, a tizedek fekszenek, a százasok állnak és az ezresek ismét fekszenek...”

Egy példa.

► A

jelsorozat

► a **6728** számot reprezentálja.



Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

II. Könyv: határozatlan egyenletrendszerek 1.

38. Probléma. 576 pénzt fizettünk 78 bambusZRúdíért. Mennyit vettünk a nagy- és a kis rúdíból, és mennyit fizettünk az egyes rúdífajtákért?

Az eredmény.

48 nagy rudat és 30 kis rudat vettünk, az árak 8 és 7 pénz voltak.

A megoldás mai szimbolkával, de az eredetit követve.

Megoldandó az

$$x + y = 78$$

$$px + qy = 576$$

egyenletrendszer, x, y a rudak száma, $p, q, p > q$ az árak.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A II/38. megoldása (folytatás).

1. $y = 78 - x$ -et helyettesítve a második egyenletbe

$$(p - q)x + 78q = 576.$$

2. Mindig föltételezték, hogy p, q egészek, továbbá $p - q = 1$ minden hasonló feladatban. Így a megoldandó egyenlet:

$$x + 78q = 576$$

3. Világos, hogy $x < 78$, így egyetlen (pozitív egész) megoldás adódik: q éppen az $576 : 78$ osztás hányadosa és x a maradék, azaz

$$q = 7 \quad \text{és} \quad x = 30$$

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A III/3. probléma: arányos osztás.

Három utazó, **A,B,C** érkezik a vámhoz, **A**-nak 560, **B**-nek 350, **C**-nek 180 rézpénze van. Hármuknak összesen 100 rézpénz vámot kell fizetniük. Megegyeznek, hogy mindegyikük ugyanolyan hányadát áldozza föl e célra pénzének. Mennyit fizet egy-egy utazó?

A válasz

A $51\frac{41}{109}$, **B** $32\frac{12}{109}$, míg **C** $16\frac{56}{109}$ pénzegységet fizet.

A számolás.

Az összes pénz: $560 + 350 + 180 = 1090$.

A fizetnivalók:

1. $(560 : 1090) \cdot 100 = 51\frac{41}{109}$, ami maradékos osztással kapható.

A többi ugyanígy kapható.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A III/20. probléma: kamatszámítás.

Egy ember 1000 pénz után 30 pénz kamatot fizet egy hónapra. Egy másik ember 750 pénz hitelt vesz föl. 9 nap után ezt visszafizeti. Mennyi kamatot kell fizetnie?

A szöveges megoldás.

A hónap 30 nap, ezt szorzod 1000-rel, ez az osztó. A 30 kamatot szorzod a 750-nel, a kölcsönnel, és a napok számával, a 9-cel. Ez az osztandó. A hányados: $6\frac{3}{4}$, ennyit kell fizetned.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A V/2. probléma: térfogatszámítás.

Van egy gát. Az alap szélessége 4 öl, a tetejének szélessége 2 öl, magassága 5 öl, hossza 126 öl 5 láb. Mekkora a térfogata?

A mértékegységek

1 öl=10 láb

Eredmény.

A térfogat 1897500 köbláb.

A számolás.

Add össze az alsó és a felső szélességet, vedd a felét, majd szorozzad a magasságával és még a hosszával.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A „többlet és hiány módszere”.

A VII/1. **Probléma.** *Emberek egy csoportja közösen akar megvásárolni egy tárgyat. Ha mindegyikük 8 pénzt fizet, akkor 3 pénz a „többlet”, míg ha 7 pénzt fizetnek, akkor akkor 4 pénz a „hiány”. Hány ember akar vásárolni, és mennyi a tárgy ára?*

A megoldás.

7 ember vásárol és 53 pénz a tárgy ára.

A számolás.

$$(3 + 4) : (8 - 7) = 7 \text{ ember}$$
$$(8 \cdot 4 + 7 \cdot 3) : (8 - 7) = 53 \text{ az ár.}$$

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A „többlet és hiány módszere” .
A **VII/2. Probléma.** *Emberek egy csoportja közösen akar megvásárolni egy tyúkot. Ha mindegyikük 9 pénzt fizet, akkor 11 pénz a „többlet”, míg ha 6 pénzt fizetnek, akkor akkor 16 pénz a „hiány”. Hány ember akar vásárolni, és mennyi a tyúk ára?*

A megoldás.
9 ember vásárol és 70 pénz a tyúk ára.
A számolás.

$$(11 + 16) : (9 - 6) = 9 \quad \text{ember}$$
$$(9 \cdot 16 + 6 \cdot 11) : (9 - 6) = 70 \quad \text{a tyúk.}$$

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A „többlet és hiány módszere” .
A **VII/3. Probléma.** *Emberek egy csoportja közösen akar megvásárolni egy „Chin-követ”. Ha mindegyikük $\frac{1}{2}$ pénzt fizet, akkor 4 pénz a „többlet”, míg ha $\frac{1}{3}$ pénzt fizetnek, akkor akkor 3 pénz a „hiány”. Hány ember akar vásárolni, és mennyi a kő ára?*

A megoldás.
42 ember vásárol és 17 pénz a „Chin-kő” ára.

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A számolás.

$$(4 + 3) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 42 \quad \text{ember}$$
$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 42 \cdot \frac{1}{2} - 4$$
$$= 42 \cdot \frac{1}{3} + 3 = 17 \quad \text{a kő.}$$

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A megoldási technika.
A negyedik feladat után megfogalmazták a **többlet és hiány módszerét**, a megoldandó egyenletrendszer:

$$a_1x - f_1 = y$$
$$a_2x + f_2 = y,$$

ahol x, y az emberek száma és a tárgy ára.

A megoldási technika.

A táblakép 1.

- Tedd a táblára a fizetendő pénzt, alájuk a többletet és a hiányt:

a_1
 f_1

a_2
 f_2

$(a_1 > a_2)$
 $(f_1 \text{ a többlet})$

A megoldási technika.

A táblakép 2.

- Szorozz kereszbe, majd adj össze, ez — az „osztandó” — a harmadik sor, majd a többlet és a hiány összege — az „osztó” — a negyedik sor:

a_1
 f_1

a_2
 f_2

$(a_1 > a_2)$
 $(f_1 \text{ a többlet})$

$a_1 f_2 + a_2 f_1$
 $f_1 + f_2$

A megoldási technika.

A táblakép 3.

- Vonjad ki a nagyobból a kisebbet: $a_1 - a_2$. Ekkor

$(f_1 + f_2) : (a_1 - a_2) = N$

az emberek száma

$\frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{f_1 + f_2} \cdot N$

az ár.

Ellenőrzés.

Az ár $N \cdot a_1 - f_1 = N \cdot a_2 + f_1$.

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

A megoldás elve: az első szabály.

- A többlet és a hiány együtt adják a megvásárolt dolgot.
- Fektesd le [a számológéptáblára] a beadott összegeket, tedd alájuk a többletet és a hiányt.
- Szorozd kereszbe az összegeket.
- Add össze, megkapod az osztandót.
- Add össze a többletet és a hiányt, ez lesz az osztó. Ha törteket kaptál hozz közös nevezőre.
- Fektesd le a beadott összegeket, és vond ki a nagyobból a kisebbet, ez a különbség.
- Ezzel [a különbséggel] osszad el az osztót és az osztandót.
- Megkapod az árat és az emberek számát.

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

A megoldás elve: a második szabály.

- ▶ Add össze a többletet és a hiányt, ez az osztandó.
- ▶ A beadott összegeknél vond ki a nagyobból a kisebbet, a különbség az osztó.
- ▶ Végezd el az osztást.
- ▶ Megkapod az emberek számát.
- ▶ Ezzel szorozd meg az egyik kiadott összeget, és vedd el a többletet, vagy add hozzá a hiányt.
- ▶ Megkapod a tárgy árát.

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Elemzés mai jelölésekkel 1.

Egy

$a_1x - f_1 = y$

$a_2x + f_2 = y$

alakú egyenletrendszert kell megoldani, ahol

- ▶ a_1, a_2 a beadott összegek,
- ▶ f_1, f_2 a többlet és a hiány.

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Az első szabály táblaképe (mai jelölésekkel).

a_1	a_2	$(a_1 > a_2)$
f_1	f_2	$(f_1 \text{ a többlet})$
$a_1f_2 + a_2f_1$		osztandó
$f_1 + f_2$		osztó
$a_1 - a_2$		különbség
$(a_1f_2 + a_2f_1) : (a_1 - a_2) = y$		a tárgy ára
$(f_1 + f_2) : (a_1 - a_2) = x$		az emberek száma

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Mit rejt e számolás?

- ▶ Az egyenletrendszer

$a_1x - f_1 = y$

$a_2x + f_2 = y$

- ▶ Az elsőből kivonva a másodikat

$a_1x - a_2x = f_1 + f_2$

$x = \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}$

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Mit rejt e számolás?

- ▶ Az egyenleteket f_2 , ill. f_1 -gyel szorozva majd összeadva

$$(a_1 f_2 + a_2 f_1)x = (f_1 + f_2)y$$
$$y = \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{f_1 + f_2} \cdot \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}$$
$$y = \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{a_1 - a_2}$$

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Az első szabály másképpen.

- ▶ Kifejezve mindkét egyenletből x -et kapjuk, hogy
- ▶

$$\frac{y + f_1}{a_1} = \frac{y - f_2}{a_2},$$

- ▶ amiből közös nevezőre hozás után

$$y = \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{a_1 - a_2}.$$

- ▶ Sajnos ez nem magyarázza meg a korabeli eljárás, túlzottan „mai” érvelés. Az első a valószínűbb.

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Második szabály táblaképe (mai jelölésekkel).

$$\frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}$$
$$(f_1 + f_2) : (a_1 - a_2) = x$$
$$x \cdot a_1 - f_1 = y (= x \cdot a_2 + f_2)$$

osztandó

osztó

az emberek száma

a tárgy ára

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

A második szabály.

- ▶ Az

$$a_1 x - f_1 = y$$
$$a_2 x + f_2 = y$$

egyenletrendszerből

- ▶ $a_1 x - f_1 = a_2 x + f_2$,
- ▶ amit rendezve

$$x = \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}.$$

- ▶ y pedig valamelyik egyenletbe helyettesítéssel adódik.

VII. Könyv: A „többség és hiány” módszere.

Mit kell tudni a szabályokhoz.

Ismerni kellett

- ▶ Azt, amit ma „mérlegelvnek” nevezünk,
- ▶ vagy amit ma „egyenlő együtthatók módszerének” nevezünk, azaz itt kivonjuk egymásból a két egyenletet.
- ▶ Valószínűbbnek tűnik az első föltételezés, bár...
- ▶ naivitás föltételezni egyrészt, hogy ez a mezopotámiai matematika hatása (távolság!)
- ▶ másrészt a „független fölfedezés”-re sincs igazán példa, vagy talán olykor ...?

VII. Könyv: „Mindkettő többség”

A VII./5. Probléma.

Emberek közösen vásároltak aranyat. Ha mindenki beadott 400 pénzt, akkor a többség 3400 pénz, míg ha mindenki 300 pénzt adott be, akkor a többség 100 pénz. Hányan vásároltak, és mennyibe került az arany?

A válasz

33 ember vásárolt, az arany ára 9800 pénz.

VII. Könyv: „Mindkettő hiány”

A számolás.

- ▶ Az emberek száma: $(3400 - 100) : (400 - 300) = 33$.
- ▶ Az ár az első szabály szerint: $(300 \cdot 3400 - 400 \cdot 100) : (400 - 300) = 9800$.
- ▶ Az ár a második szabály szerint: $33 \cdot 400 - 3400 = 9800 = 33 \cdot 300 - 100$.

VII. Könyv: „Mindkettő hiány.”

A VII./6. Probléma.

Emberek közösen vásárolnak egy birkát. Ha mindenki öt pénzt adott, akkor 45 pénz a hiány, míg ha mindenki 7 pénzt adott, akkor a hiány csak 3 pénz. Hányan vásároltak és mennyi a birka ára?

A válasz

21 ember vásárolt, a birka ára 150 pénz.

A számolás.

- ▶ Az emberek száma: $(45 - 3) : (7 - 5) = 21$.
- ▶ Az ár az első szabály szerint: $(7 \cdot 45 - 5 \cdot 3) : (7 - 5) = 150$.
- ▶ Az ár a második szabály szerint: $21 \cdot 5 + 45 = 21 \cdot 7 + 3 = 150$.

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

A közös szabályuk 1.

- ▶ Mindkettő többlet vagy mindkettő hiány együtt adják ki a megvásárolt dolgot.
- ▶ Fektesd le a kiadott összegeket, ezek alá tedd a többleteket vagy hiányokat.
- ▶ Szorozd őket keresztbe.
- ▶ A kisebbet vond ki a nagyobból. Ez a különbség lesz az osztandó.
- ▶ A kisebb többletet vagy hiányt vond ki a nagyobbik többletből vagy hiányból, ez lesz az osztó. ha törteket kaptál, hozz közös nevezőre.
- ▶ A kiadott összegek közül a nagyobból vond ki a kisebbet. Ez egy különbség lesz.

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

A közös szabályuk 1. (folytatás)

- ▶ Ezzel oszd el az osztót és az osztandót.
- ▶ Az elosztott osztandó az emberek száma, az elosztott osztó a dolog ára.

A közös szabályuk 2.

- ▶ Fektesd le a kiadott összegeket, a kisebbet vond ki a nagyobból, ez a különbség lesz az osztó.
- ▶ A nagyobb többletből vagy hiányból vond ki a kisebbet, ez a különbség lesz az osztandó.
- ▶ Oszd el az osztandót az osztóval, ez lesz az emberek száma.

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

A közös szabályuk 2. (folytatás)

- ▶ Ezzel szorozd meg a az egyik kiadott összeget és vond ki belőle a hozzá tartozó többletet, vagy add hozzá a hozzá tartozó hiányt.
- ▶ Ez a dolog ára.

Elemzés 1. (a táblakép mai jelölésekkel).

Ha x, y az emberek száma, ill. a tárgy ára, $a_1 > a_2$ a beadott pénzek, és $f_1 > f_2$ a hozzájuk tartozó többletek, ill. hiányok, akkora megoldandó egyenletrendszerek:

$a_1x - f_1 = y$

$a_2x - f_2 = y$

$a_1x + f_1 = y$

$a_2x + f_2 = y$

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

Első szabály.

a_1	a_2	beadott összegek
f_1	f_2	többlet-többlet
$a_2f_1 - a_1f_2$		osztandó
$f_1 - f_2$		osztó
$a_1 - a_2$		különbség
$(a_1f_1 - a_1f_2) : (a_1 - a_2) = y$		a tárgy ára
$(f_1 - f_2) : (a_1 - a_2) = x$		az emberek száma

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

Második szabály.

$f_1 - f_2$	oszcandó
$a_1 - a_2$	osztó
$(f_1 - f_2) : (a_1 - a_2) = x$	az emberek száma
$f_1 - x \cdot a_1 = y$	az ár, mindkettő többlet
$x \cdot a_1 + f_1 = y$	az ár, mindkettő hiány

Az eljárás igazolható, de nyitott hogyan jöhettek rá.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

VIII. könyv, kettőnél több határozatlanos egyenletrendszerek.

E könyvben 3 - 5 határozatlanos lineáris egyenletrendszerekre vezető problémák találhatók.

A VIII/1. Probléma. 3 jó kévéből, 2 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 39 tau gabonát kapunk. 2 jó kévéből, 3 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 34 tau gabonát kapunk. 1 jó, 2 közepes és 3 rossz kévéből pedig 26 tau gabonát. Mennyi gabonát kapunk 1 - 1 jó, közepes és rossz kévéből?

A válasz.

1 jó kéve $9\frac{1}{4}$ tau, 1 közepes kéve $4\frac{1}{4}$, 1 rossz kéve $2\frac{3}{4}$ tau gabonát ad.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A megoldás 1.

A tömör választ a némileg részletezett megoldás követte, a megfelelően kirakott számolótábla-képeket közölték kommentár nélkül. Az elv meglepő.

A táblák.

1	2	3	0	0	3	0	0	3
2	3	2	4	5	2	0	5	2
3	1	1	8	1	1	36	1	1
26	34	39	39	24	39	99	24	39

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A megoldás 2.

$$\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4},$$
$$(24 \cdot 36 - 99) : 5 : 36 = 4\frac{1}{4},$$
$$(39 \cdot 36 - 1 \cdot 99 - 2 \cdot 153) : 3 : 36 = 9\frac{1}{4}.$$

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A „modern” megoldás 1.

Ha x, y, z jelöli a jó, a közepes és a rossz kénék adta gabonát, akkor az

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

egyenletrendszert kell megoldani. Ez megfelel az 1. Táblaképnek.

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A „modern” megoldás 2.

A 2. Táblaképnek megfelelő egyenletrendszer:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$5y + z = 24$$
$$4y + 8z = 39$$

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A „modern” megoldás 3.

A 3. Táblaképnek megfelelő egyenletrendszer:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$5y + z = 24$$
$$36z = 99$$

Problémák a „Kilenc Könyv” -ből.

A „modern” megoldás 4.

Ezen utolsó egyenletrendszer már könnyen megoldható:

$$\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$$
$$(24 \cdot 36 - 99) : 5 : 36 = 4\frac{1}{4}$$
$$(39 \cdot 36 - 1 \cdot 99 - 2 \cdot 153) : 3 : 36 = 9\frac{1}{4}.$$

A VIII. könyv egy meglepetése.

A módszer egy általánosítása.

- ▶ Az egyenletrendszerek megoldásakor könnyen beleütközhetünk abba, hogy
 - ▶ kisebb számból nagyobb számot kellene kivonni.
- ▶ Mit tettek ilyenkor?
- ▶ Megjelennek a **negatív számok**?
- ▶ A megoldások erre utalnak, sőt
 - ▶ olykor színes számolópálcákat használtak,
 - ▶ pirosat a pozitív- és feketét a negatív számok esetén.
- ▶ A táblázat pozitív elemeit **cseng**nek, míg a negatívokat **fun**ak nevezték.
- ▶ A következő feladatból látható, hogy — először a matematikában — tökéletesen számoltak előjeles számokkal.

A VIII. könyv 8. problémája.

A VIII. könyv 8. problémája.

A megoldandó egyenletrendszer.

$$\begin{aligned}2x + 5y &= 13z + 1000 \\ 3x + 3z &= 9y \\ 6y + 8z &= 5x - 600\end{aligned}$$

Rendezve az egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}2x + 5y - 13z &= 1000 \\ 3x - 9y + 3z &= 0 \\ -5x + 6y + 8z &= -600\end{aligned}$$

Mit rejt e számolás?

- ▶ Bármennyire is meglepő az nem más, mint az, amit ma
- ▶ **Gauss-elimináció** néven ismerünk és kiterjedten használunk.
- ▶ Korabeli neve **Feng csen**.

A feladat.

Egy vásárlási - eladási problémáról szól.

- ▶ 2 bivaly és 5 bárány eladásakor és 13 sertés vásárlásakor marad 1000 csien (részpénz).
- ▶ 3 bivaly és 3 sertés eladásakor kapott pénz éppen elég 9 bárány vásárlására.
- ▶ 6 bárány és 8 sertés eladásakor 5 bivaly megvételéhez 600 csien hiányzik.

Az eredmény.

Egy bivaly ára 1200, egy bárány ára 500, míg egy sertés ára 300 csien.

A VIII. könyv 8. problémája.

A kiindulási táblakép.

5	3	2
6	9	5
8	3	13
600		1000

A végső táblakép.

		2
	33	5
48	45	13
1440	3000	1000

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A IX. könyv.

- ▶ Zömében derékszögű háromszögekkel kapcsolatos számításokat tartalmaz.
- ▶ Ezekben alapvető a Pithagorasz tétel.

A IX/11. Probléma.

Van egy ajtó, amelynek magassága 6 chih-vel és 8 tsun-nal több a szélességénél. Az egyik sarkától az átellenes sarokig 1 chang a távolság. Mennyi az ajtó magassága és szélessége.

Az eredmény.

A szélesség: 2 chih, 8 tsun, a magasság: 9 chih és 6 tsun.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A mértékegységek.

1 chang = 10 chih = 100 tsun.

A probléma mai jelölésekkel.

Megoldandó az

$$\begin{aligned}x - y &= l = 6,8 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= d = 10\end{aligned}$$

egyenletrendszer, ahol x, y, d rendre a magasság, a szélesség és az átló.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Az eredmény.

Az igen tömören fogalmazott szöveges megoldásból az olvasható ki, hogy az

▶

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(d^2 - 2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)} + \frac{l}{2} \\ y &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(d^2 - 2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)} - \frac{l}{2}\end{aligned}$$

formulák szerint számoltak, és azt kapták, hogy

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Az eredmény.

$x = 9$ chih és 6 tsun $y = 2$ chih és 8 tsun.

Elemzés 1.

Kérdés, hogyan kapták meg ezt a (korrekt) számolási módot. A könyv nem ad útbaigazítást. Támpontot adhat Jang Huj 1261-ben írott, a „*Kilenc könyv*” *matematikai szabályainak részletes magyarázata és osztályozása c. kézírata.*

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A megoldás lépései 1.

- ▶ A megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned}x - y &= l = 6,8 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= d = 10\end{aligned}$$

- ▶ Fejezzük ki x-et az első egyenletből: $x = y + 2\left(\frac{l}{2}\right)$.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A megoldás lépései 2.

A második egyenlet négyzetébe x-et behelyettesítve majd rendezve

$$\begin{aligned}\left(y + 2\left(\frac{l}{2}\right)\right)^2 + y^2 &= d^2 \\ 2y^2 + 4\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{l}{2}\right)y &= d^2 \\ y^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{l}{2}\right)y &= \frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) \\ \left(y + \left(\frac{l}{2}\right)\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

A megoldás lépései 3.

- ▶ Mindkét oldalból gyököt vonva

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)} - \frac{l}{2},$$

- ▶ végül

$$\begin{aligned}x &= y + l. \\ x &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)} + \frac{l}{2}.\end{aligned}$$

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Kommentár.

A megoldás tetszetős, elképzelhető, hogy így kapták a megoldást, de figyelembe kell venni, hogy a kommentár legalább ezer évvel később született, mint az eredeti könyv.

Elemzés 2.

- ▶ Ezért megfontolandó, hogy — hasonlóan az ókori mezopotámiaiakhoz — ők is inkább a Diophantosz által **összeg-szorzat** módszernek nevezettet követték-e.
- ▶ Ha ezt alkalmazzuk, akkor előbb egy új határozatlanlnt kell bevezetni, x és y z számtani közepét.
- ▶ Ekkor $x = z + \frac{1}{2}$ és $y = z - \frac{1}{2}$.
- ▶ Az átlóra fölírt Pithagorasz tételbe helyettesítve a

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Elemzés 2.

- ▶ $\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = d^2$
- ▶ egyenletet kapjuk, amit egyszerű megoldani
- ▶

$$2z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = d^2$$
$$z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)},$$

- ▶ ami után x és y azonnal adódik.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Négyzetgyökvonás 1.

Hasonlóan a mezopotámiaiakhoz, e kérdés itt is megkerülhetetlen.

- ▶ A módszert szövegesen adták meg elmagyarázva, hogy hogyan kell a pálcikákat rakosgatni a számolótáblán.
- ▶ Ez számunkra igen nehezen követhető, ezért — mint már többször is tettük — mai algebrai szimbolikával írjuk le módszerüket a $\sqrt{55.225}$ kiszámtásán keresztül.
- ▶ Világos, hogy e feladat ekvivalens az

$$x^2 = 55.225$$

egyenlet pozitív gyökének meghatározásával.

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Négyzetgyökvonás 2.

- ▶ **1. lépés.** Meghatározzuk a gyök nagyságrendjét, ami 100, így a következő lépés a gyök „százasaínak” meghatározása lesz.
- ▶ **2. lépés.** A százások meghatározásához legyen $x = 100x_1$ és $x_1 = p + y$, ahol $0 \leq p < 10$ egész, $0 \leq y < 1$. A
- ▶

$$10.000x_1^2 = 55.225 \tag{1}$$

egyenlőségből adódik, hogy $p = 2$, így $x_1 = 2 + y$.

- ▶ Helyettesítsük ezt (1)-be:

$$10.000x_1^2 = 10.000(2 + y)^2$$
$$= 40.000 + 40.000y + 10.000y^2 = 55.225,$$

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Négyzetgyökvonás 3.

- ▶ amiből
$$40.000y + 10.000y^2 = 15.225. \tag{2}$$
- ▶ **3. lépés.** A tizedesek meghatározásához legyen $10y = y_1$. Ezt (2)-be helyettesítve
$$4.000y_1 + 100y_1^2 = 15.225. \tag{2'}$$
- ▶ Az előző lépéshez hasonlóan legyen $y_1 = q + z$, ahol $0 \leq q < 10$ egész és $0 \leq z < 1$.
- ▶ Mivel (2')-ből
$$(4.000 + 100q)q \leq 15.225,$$

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Négyzetgyökvonás 4.

- ▶ kapjuk: $q = 3$ (hiszen ez a legnagyobb egész, amelyre az előbbi egyenlőtlenség teljesül), így $y_1 = 3 + z$.
- ▶ Ezt (2')-be helyettesítve
$$\begin{aligned} 15.225 &= 100(3 + z)^2 + 4.000(3 + z) \\ &= 900 + 600z + 100z^2 + 12.000 + 4.000z \\ &= 100z^2 + 4.600z + 12.900 \end{aligned}$$
- ▶ Rendezve
$$100z^2 + 4600z = 2325. \tag{3}$$

Problémák a „Kilenc Könyv”-ből.

Négyzetgyökvonás 5.

- ▶ **4. lépés.** Az egyesek meghatározásához legyen $10z = z_1 = r$. Ezt (3)-ba helyettesítve
$$z_1^2 + 460z_1 = 2.325,$$
- ▶ A $z_1 = r$ értékét 5-nek választották (Vélhetően maradékos osztás segítségével)

Végeredmény:

$$\sqrt{55.225} = 100 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 = 235.$$