

IGAZ-E AMI BIZONYÍTHATÓ, BIZONYÍTHATÓ-E AMI IGAZ.

AZ IGAZSÁG ELVESZTÉSE, MAJD KERESÉSE A XIX-XX.
SZÁZADBAN.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. május 13.

A XIX. Század matematikája: Algebra 1.

1. Megjelennek a nem-kommutatív műveletek,

1.1 mátrixok,

1.2 kvaterniók.

Definíció. $Q = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, ahol

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$xy = -yx, x \neq y, x, y \in \{i, j, k\}.$$

ferdetest (nem kommutatív test).

A XIX. Század matematikája: Algebra 2.

1. n dimenziós lineáris terek.
2. Galois: az egyenletek megoldhatóságának vizsgálata,
 - 2.1 testbővítések,
 - 2.2 permutációcsoportok, a „helyettesítések” csoportja,
 - 2.3 véges testek.
3. A geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete.
 - 3.1 Gauss: a szabályos n -szög pontosan akkor szerkeszthető meg, ha $n = 2^k p_1 \dots p_m$, ahol $k \geq 0$, $p_1, \dots, p_m$ különböző Fermat-prímek. Ha $m = 0$, akkor $k \geq 2$.
 - 3.2 Minden szerkeszthető komplex szám algebrai.
4. A csoport absztrakt fogalma. Az első struktúratétel.
5. Test fölötti algebrák: Frobenius lezárja a számfogalom bővítését.

A XIX. Század matematikája: Számelmélet 1.

1. Analitikus vizsgálatok.
2. Vizsgálták a prímszámok eloszlását, empirikus becslések.
3. Legyen $\pi(x) = k$, ha az $x \in \mathbb{R}$ -nél nem nagyobb prímszámok száma k .

3.1 Gauss sejtése: $\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$,

3.2 Csebisev tétele (1854): léteznek olyan a, b pozitív konstansok, hogy

$$a \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq b \frac{x}{\log x}.$$

minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ -re

3.3 Hadamard és de la Vallée-Poussin (1896): a „Nagy Prímszámtétel”.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

A XIX. Század matematikája: Számelmélet 2.

- 1. Létezik transzcendens szám, azaz olyan komplex szám, amely nem lehet gyöke egyetlen nemzéró $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak sem.
- 2. Euler sejtése: e, π , valamint a logaritmus- és a trigonometrikus függvények értékei a legtöbb helyen transzcendensek.
- 3. Liouville (1844): a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

- szám transzcendens.
- 4. Hermite (1873): Az e szám transzcendens.
 - 5. Lindemann (1882): A π szám tanszcendes.
 - 6. Következmény: A „körnégyszögesítés” problémája nem oldható meg.
 - 7. Nyitott kérdés, hogy $e + \pi$ algebrai, vagy transzcendens, míg az $e + i\pi$ esete triviális.

A XIX. Század matematikája: Geometria.

- 1. Fölfedezik a nem-euklideszi geometriákat:
 - 1.1 hiperbolikus geometria: Bolyai és Lobacsevszkij,
 - 1.2 elliptikus geometriák és egységes elmélet: B. Riemann.
- 2. Megjelenik az ábrázoló geometria,
- 3. újra fölfedezik a projektív geometriát.
- 4. n -dimenziós analitikus geometria.

A XIX. Század matematikája: Függvénytan.

- 1. Vizsgálatok végtelen sorokkal kapcsolatban: konvergencia-problémák.
 - 1.1 Hatványsorok,
 - 1.2 trigonometrikus sorok (Fourier- sorok).
- 2. Jelentősen bővült a differenciálegyenletek elmélete,
 - 2.1 közönséges differenciálegyenletek $\rightarrow$ mechanikai alkalmazások,
 - 2.2 parciális differenciálegyenletek $\rightarrow$ elektrodinamika.
- 3. Teljesen új diszciplinaként megjelenik a komplex függvénytan, amely az alkalmazások szempontjából szinte azonnal jelentős lesz.

Súlyos elvi kérdések.

A bizonyítás, az igazság.

- 1. I.e. 100 körülől fokozatosan megszűnik az axiómatikus tárgyalás, eltűnnek a szigorú bizonyítások.
- 2. A matematika szinte teljesen empirikus tudománnyá alakul.
- 3. A XIX. SZÁZAD ELSŐ HARMADÁTÓL SÚLYOS MEGOLDATLAN PROBLÉMÁK.
 - 3.1 Mit jelent az „igazsága” egy nem-kommutatív művelettel kapcsolatos állításnak?
 - 3.2 Egy állításnak pl. az 5 dimenziós térre vonatkozóan?
 - 3.3 Melyik geometria írja le a fizikai teret?
 - 3.4 A derivált és az integrál valami komoly matematikai fogalom, vagy egyszerűen rövidített írásmód?
- 4. Valójában mi a „konvergencia”?
- 5. A Fourier-sorok problémája.

Súlyos elvi kérdések.

Gauss egy véleménye

Az a legmélyebb meggyőződése, hogy a tér fogalma egy teljesen egyedi helyet foglal el a priori ismereteink között, lényegesen különbözik például az aritmetika által elfoglalttól.
... a szám fogalma gondolkodásunkból ered, míg a téré azon kívül van. Így annak törvényeit nem tudjuk a priori teljesen előhívni.

Néhány „zűrös” fogalom.

- ▶ Transzcendens szám, valós szám,
- ▶ folytonosság, a Bolzano-Darboux tulajdonság,
- ▶ konvergencia, sorfejtések.

Egy alapvető kérdés.

Mit jelent az, hogy „egy állítást bebizonyítottunk?”

IGAZ-E AMIT BIZONYÍTOTTUNK, BIZONYÍTHATÓ-E AMI IGAZ?

A bizonyítás kérdése.

1. A két fő kérdés:
 - 1.1 MI AZ, HOGY BIZONYÍTÁS?, és egyáltalán
 - 1.2 MI A MATEMATIKA?
2. Térjünk-e vissza a klasszikus görög matematika hagyományaihoz, vagy keressünk új utakat?
3. Világos, hogy újra kell éleszteni az arisztotelészi logikát, de **mi az elsődleges: a matematika vagy a logika.**

További jelentős változások a XIX. században.

- ▶ Egyre több folyóirat közölt matematikai cikkeket, a század végére kb. 500. A legtöbb megszűnt, de az 1826-ban L. Crelle által alapított *Journal für Rheine und Angewandte Mathematik* a mai napig létezik.
- ▶ Egy nem csak öröndetes: a matematikai diszciplinák annyira szétváltak, hogy a közlemények egyre inkább egy szűk csoportnak szóltak.
- ▶ Sok új tudományos központ alakult A hagyományos angol, francia és német egyetemek mellett.
- ▶ Az európai akadémiaák „tudós társaságok” voltak, üléseknek, tudományos vitáknak adtak helyet.
- ▶ Az 1863-ban alapított National Academy of Sciences (USA) már „tudományos műhely” volt, amely folyóiratot adott ki, kutatásokat támogatott, intézeteket alapított.

Az igazság keresése 1.

- ▶ Vizsgáljuk meg a régi görögök axiómatikus matematikáját.
- ▶ Ha van egy „félíg-meddig” kidolgozott elméletünk, akkor hogyan lehet azt axiomatizálni?
 - ▶ Rendezzük a fogalmakat: eljutunk elméletünk alapfogalmaihoz.
 - ▶ Rendezzük a már „bizonyított” tételeinket: eljutunk az axiómákhoz.
 - ▶ DE a bizonyítás mibenléte, a „következmény fogalma” még tisztázatlan, valahonnan importálni kell: Arisztotelész.
 - ▶ Kérdés: hogyan alkalmazhatjuk mindezt a „modern” a „mai” matematikára?
- ▶ KÍNOS kérdések:
 - ▶ Ellentmondás-mentes-e rendszerünk?
 - ▶ Azaz, **tartalmaz-e olyan tételt/állítást, hogy az meg a tagadása is bizonyítható** a rendszeren belül.
Ha igen, mit sem ér a rendszer.

Az igazság keresése 2.

1. kísérlet: **G. Cantor halmazelmélete.**
 - 1.1 Részleges visszatérés a görögök axiómatikus módszeréhez.
 - 1.1 Az alap a „halmaz” fogalma, amely egy **definiálatlan fogalom**, alapfogalom..
 - 1.2 Axiómatikus alapozás kell, de kérdés, hogy ellentmondásmentes-e az adott axiómarendszer.
 - 1.3 Első lépés: a halmazelmélet axiomatizálása.
 2. A fogadtatás: teljes elutasítás, „antinómiák” tömege.
 - 2.1 J. Richard: „A 100, vagy kevesebb betűvel meg nem adható számok halmaza.”
 - 2.2 B. Russel: „A tartalmazkodó, és a nem-tartalmazkodó halmazok.” „A falu borbélyja.”
 3. Cantor válasza: „csak” apróbb módosítások kellenek.
 4. A matematika és a logika még nem merül föl.

Az igazság keresése 3.

2. kísérlet: **G. Frege logicizmusa.**
 1. A logika elsődlegességét hirdeti a matematikával szemben: a matematika a logika egy fejezete.
 2. Frege: Logika, matematika, szemantika.
 3. Whitehead-Russel: Principia Mathematica.
 4. Eltűnik az alkalmazott matematika, az alkalmazások korrekt lehetősége.
 5. Zsákutca.

Az igazság keresése 4.

3. kísérlet: **konstruktivizmus (intuicionizmus).**
 1. A matematika az elsődleges a logikával szemben.
 2. A megalapító: Kronecker német matematikus az 1870-es években.
 3. Főbb érvei a halmazelméleti megalapozás ellen (Weierstrass, az egzisztencia bizonyítások, irracionálisok).
 4. Modern intuicionizmus: Brouwer
 5. A. Weyl véleménye: „Ha a logika a matematika hygiénéje, akkor nem lehet táplálékforrása.” (1950)
 6. A N. Bourbaki csoport tevékenysége a 20-as évektől.
 7. Magát számolta föl a XX. század második felében: saját nekrológ 1976-ban.

4. kísérlet: Hilbert bizonyításelmélete, ill. a metamatematika.

- 1. Az axiómatikus módszer a követendő.
- 2. meg kell különböztetni a matematikai elméleteken belüli állításokat azoktól, amelyek valamely matematikai elméletről szólnak.
- 3. Például.
 - 3.1 Az, hogy „az egyszerű Abel-csoportok prímrendűek” matematikai állítás,
 - 3.2 míg az, hogy „az elemi aritmetika ellentmondás-mentes” egy állítás valamely matematikai elméletről.
 - 3.3 Az utóbbiak ún. **metamatematikai állítások**.
- 4. A metamatematikai állítások bizonyításában csak olyan elvek, eljárások engedhetők meg, amelyekben „mindenki egyetért”, tehát pl. a véges jellegű módszerek.

Az igazság keresése 6. Axiómatikus elméletek.

- Nem formális axiómatikus elméletek.
- ▶ Hasonlóak ahhoz, amit Euklidesz könyvében olvashatunk.
 - ▶ Az ilyen elmélet definiálatlan (alap-) és definiált fogalmakat használ.
 - ▶ Kiindulási állításokat fogalmaz meg, amelyeket nem bizonyít, zömmel az alapfogalmakra vonatkozóak. Ezek az elmélet **axiómái**.
 - ▶ Az elmélet **tételei** olyan állítások, amelyekben az alap- és a definiált fogalmakról mondanak valamit. A tételek formalizálhatók.
 - ▶ Ezeket akkor fogadja el igaznak, ha az axiómák következményei valamely — az elméleten kívül megfogalmazott — következmény-fogalom értelmében.

Az igazság keresése 7. Axiómatikus elméletek.

- Formális axiómatikus elméletek 1.
- ▶ A formalizálás magasabb szintű.
 - ▶ A következményfogalom is része az elméletnek: levezethetőség.
 - ▶ Eldönthetőség: megjelenik az **ALGORITMUS** fogalma, ami egy NEM MATEMATIKAI fogalom (nem definiálható szigorúan).

Metamatematika 1.

- Formális axiómatikus elméletek 2.
- ▶ Axiómarendszer (axiómatikus elmélet) ellentmondás-mentessége, konzisztenciája.
 - ▶ Axiómatikus elmélet teljessége: egy axiómatikus elmélet **teljes**, ha minden állítása (formulája) vagy annak tagadása (negáltja) bizonyítható (tétel).
 - ▶ A konzisztencia „általánosan elfogadott” kritériuma: a véges modell létezése.
 - ▶ Relatív konzisztenciák.

Metamatika 2.

Néhány pozitív eredmény.

- 1. Konzisztens elméletek.
 - 1.1 Ítéletkalkulus.
 - 1.2 Az elsőrendű függvénykalkulus.
 - 1.3 Boole-algebrák.
- 2. Bizonytalan: az elemi aritmetika.

Egy relatív konzisztencia sorozat.

Hiperbolikus geometria → euklideszi geometria → a valós számok aritmetikája → némi halmazelmélet (ez „biztonságos”) és az elemi aritmetika.

Eldöntésprobléma, eldönthető elméletek.

Az igazság keresése 9. Metamatika 3.

Két negatív eredmény.

- 1. K. Gödel 1. tétele: *Ha valamely elsőrendű elmélet elegendően gazdag, axiómáinak halmaza eldönthető (azaz axiomatikus elmélet) akkor bővítésével nem konstruálható olyan elegendően gazdag konzisztens elsőrendű elmélet amelyben az eredeti elmélet minden igaz állítása bizonyítható.*
- 2. K. Gödel 2. tétele: *Egy elegendően gazdag konzisztens elsőrendű elmélet konzisztenciája és teljessége nem bizonyítható olyan módszerekkel, amelyek tükröztethetők az adott elméletben.*