

Az ÓKORI GÖRÖG MATEMATIKA 1.

Kezdetek, az első iskolák

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. március 4.

Az I.e. II. évezred.

A folyammenti kultúrák hanyatlása.

- ▶ Az évezred közepére az egyiptomi és a mezopotámiai (folyammenti) birodalmak fejlődése minden területen megrekedt.
 - ▶ A nagy- és növekvő számú új papirusz és agyagtábla nem jelentett minőségi fejlődést.
 - ▶ A bronzról vasra váltás nagyrészt nem náluk zajlott le,
 - ▶ a vas fegyverek birtoklása újabb népcsoportok és hatalmi centrumok fölemelkedését eredményezte.
- ▶ Az új hatalmi centrumok a Földközi tenger medencéjében jöttek létre, **Tengeri kor** kezdete.
 - ▶ A főbb új kolóniákat a RÓMAIAK a KARTHAGOIAK és mindenek fölött a GÖRÖGÖK hozták létre.
 - ▶ A MINOSZI kultúra Krétán.
 - ▶ I.e. 800-tól a folyammenti kultúrák véglegesen lehanyatlottak.

Átmenet a kultúra területén:

A MINOSZ-i kultúra Krétán.

- ▶ a lineáris B írás, az első „szótagírás”, megfejteni csak 1953-ban sikerült, a lineáris A máig megfejtetlen.
- ▶ 1600 körül a minoszi kultúra átterjedt a görög szárazföldre ⇒ „műkénei kultúra”, ami kb. 900-ig állt fenn; régészeti leletek, Homerosz eposzai, Hesziadosz. Olimpiák I.e. 776-tól.
- ▶ DE: sok bizonytalanság, pl. milyen nyelven beszéltek a műkéneiek, görögül vagy nem, ők voltak az őslakók vagy bevándorlók; egy valószínűsíthető hipotézis: nem őslakók, hanem északról jöttek, görögül beszéltek, de szókék voltak.

A görögök.

A törzsek bevándorlása.

- ▶ Északról jöttek, először a II. évezred elején a IONOK,
- ▶ követték őket az ACHÁJOK, majd a DOROK.
- ▶ Előbb „szelíd” hódítók voltak, átvették a krétai eredetű kultúrát, majd az achájok már szervezett birodalmat alakítottak ki és megkezdték a hatalom átvételét, amit a dorok befejeztek, korábbi helyett szinte egyeduralkodóvá tették ősi indoeurópai hitvilágukat ötvözve a krétaival.

A görögök.

A törzsek bevándorlása.

- ▶ A kétféle — minoszi és indoeurópai — hitvilágból alakult ki az ismert **GÖRÖG MITOLOGIA**, amelyben egyaránt találhatók műkénei- és indoeurópai istenek.
- ▶ A 3 bevándorló törzs előbb a kisázsiai partvidéket, utána a szigetvilágot (beleértve néhány Földközi tengeri szigetet, pl. Ciprust is), majd a Peloponeszoszi félszigetet foglalta el.
- ▶ 1200 körül Agamemnon vezetésével szövetség Troja ellen, a híres „Trojai háború”.

A görög városállamok.

- ▶ Az első jelentős a kisázsiai MILETOSZ, 540-ig, a perzsa uralom alá kerülésig, alapvető szerepet játszott.
- ▶ Szerepét tovább győngítette az i.e. 494-es (sikertelen) fölkelés. 479-ben lett újra görög (ion) város, de régi szerepe nem tért vissza.
- ▶ Fontos keleti kapcsolatok: vita a matematika történészek és a filológusok között,
- ▶ Platon: „Bármit is vettek át a barbároktól, azt mindig magasabb tökélyre fejlesztették.”
- ▶ Thalesz, Pithagorasz, Demokritosz és Eudoxos utazásai.
- ▶ van der Waerden: „... a hellének nem lehettek olyan korlátoltak, hogy ne vették volna észre és ne becsülték volna meg, ami az idegen kultúrákban érték.”

A görög kultúra első virágkora.

A Klasszikus Görög Kor: I.e. 600 - 300.

- ▶ A „**görög demokrácia virágkora**” az V. században.
- ▶ Híres matematikai és filozófiai iskolák.
 - ▶ Ion Iskola, Pithagoreusok, Eleaták, Archytasz iskolája, Szofisták, Akadémia (Platon), Lyceum (Arisztotelesz), Eudoxos iskolája.
 - ▶ Az iskolák jellege.
 - ▶ Platon filozófiai művei, Arisztotelesz logikája.
- ▶ **A matematika deduktív tudománnyá válik.**
 - ▶ **Vita: mi a kiváltó ok?**
- ▶ Két enciklopédikus összegző matematikai munka: **EUKLIDESZ**, **ELEMEK**, **APOLLONIUSZ**, **KÚPSZELETEK**, Eudemosz geometria története, sok töredék.
- ▶ Ezek egy része a klasszikus kor után íródott. DE

Hellenizmus.

A Hellenizmus Kora: I.e.. 300 - I.sz. 600.

Kezdet: **A makedon hódítások.**

- ▶ II. Fülöp hódításai I.e. 352-től, Athen eleste 338-ban, keleti hadjárata
- ▶ 336-tól fia **(Nagy) Sándor** az uralkodó, a hódítások folytatása: keleten az Indus völgyéig, nyugaton — a Földközi tenger partvidékén haladva Egyiptomon át — az Atlanti óceánig.
- ▶ 332: Alexandria megalapítása a Nilus torkolatánál → **új főváros**,
- ▶ új hódítási és berendezkedési technikák: házasságok, katonák és népcsoportok cseréje, a I.e. 325: a „**Szuzai mennyegző**”: felesége Statira Dareiosz perzsa király lánya, 20.000 frigy.
- ▶ 323: Nagy Sándor halála.

A hellenizmus virágkora.

A Ptolemaioszok Egyiptoma

- ▶ A birodalom 3 részre szakadása: Mezopotámia (Szeleukosz), Egyiptom (a Ptolemaioszok), Európai területek (Antigonosz).
- ▶ A klasszikus görög kultúra továbbélése és jelentős fejlődése: a HELLENIZMUS.
- ▶ 323-222: Ptolemaiosz Szoter, ~ Phyladelphusz, ~ Euergetesz uralkodása Alexandriában.
- ▶ MYSZEION megalapítása 290-ben, 4 osztály: matematika, csillagászat, orvoslás és irodalom. Továbbá: fizika → matematika, csillagjóslás → csillagászat, filozófia → irodalom, geográfia → matematika.

A hellenizmus virágkora.

Az ókori világ csúcsteljesítményei.

- ▶ A KÖNYVTÁR, csúcs: 750.000 egység, i.sz. 670-680-ig működött a Myszeion mellett.
- ▶ Technikai vívmányok: vízszivattyúk, fogaskerekes szerkezetek, távolságmérő eszközök, gőzzel hajtott járművek, vízzel működő orgona, a sűrített levegő alkalmazásai, stb.
- ▶ Fizika: geometriai optika (lencsék és tükrök), hidrosztatika.
- ▶ Kémia: metallurgia.

Írott emlékek.

A rendelkezésre álló források.

- ▶ Homerosz és Hesziadosz művei.
 - ▶ Ilias és Odyszeia, Munkák és napok.
- ▶ Görög nyelvű töredékek, zömmel összefoglalások, történeti művek, kommentárok: Eudemosz és Proklosz művei.
- ▶ Bizánci keresztény kódexek.
- ▶ Arab fordítások és kommentárok, szerkesztett változatok.
- ▶ Latin nyelvű kéziratok (fordítások): zömmel szerkesztett, erősen egyszerűsített változatok.

A Klasszikus Kor Matematikája.

A legfontosabb iskolák.

- ▶ Ion iskola (Thalesz),
- ▶ Pithagoreusok (Pithagorasz),
- ▶ Eleaták (Parmenidesz),
- ▶ Szofisták (khioszi Hippokratesz),
- ▶ Akadémia (Platon),
- ▶ Lyceum (Arisztotelesz).

Ion Iskola Miletoszban.

- ▶ A milétoszi **THALESZ** (kb. 640 - 546) alapította.
- ▶ Véltetően a filozófiai — és egyúttal — a tudományos gondolkodás alapjainak megteremtője.
- ▶ VII-VI.sz.: a világszemlélet szekularizálódott; a **hét (legfőbb) bölcs**, akik 22-en voltak.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Ion Iskola

- ▶ Minden listán szerepel: Thalesz, Biasz, Pittakosz, Szolon.
- ▶ További gyakori nevek: rhodoszi Kleobulosz, spártai Khilon, korintoszi Periandrosz, a mitikus Orpheosz, a vígjátékíró Epikharmosz.
- ▶ Miért tekintették őket bölcseknek? Nem a tudomány, a filozófia megalapozói, művelői voltak, „csodálták erkölcsi kiválóságukat, pozitív társadalmi tevékenységüket,...” (Pais István)
- ▶ Plutarchosz: „*Úgy látszik, Thales volt annak a kornak egyetlen bölcselője, aki a hétköznapi szinten felülemelkedve szemlélte a világot, a többiek politikai érdemeikért nyerték el a bölcselő nevet.*”

A Klasszikus Kor Matematikája.

Ion Iskola

- ▶ Thalesz tanítványának tekintik Anaximeneszt (610 - 547), és iskolájához szokás kapcsolni még Anaximandroszt (550 - 480) és Anaxagoraszt (500 - 428). Anaxagoraszt már nagyrészt Athenben élt.
- ▶ Mindannyiukra leginkább a **természetfilozófus** meghatározás illik.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Thalesz mint csillagász.

- ▶ Herodosz írta, hogy *a halúsi csata alatt a nappal egyszer csak éjszakává változott, és hogy Thalesz ezt éppen erre az évre jósolta a délosziaknak.*
- ▶ Ezt egy korább drámaíró Xenophanes is megemlítette.
- ▶ Ma általánosan elfogadott, hogy az I.e. 585-ös napfogyatkozásról lehet szó.
- ▶ Thalesz nyilvánvalóan az asszír udvari csillagjósok I.e. 700 körüli levelezéseire támaszkodhatott.
- ▶ Ezekben több-kevesebb pontossággal/sikerrel nap- és holdfogyatkozásokat jósoltak meg.

A Klasszikus Kor Matematikája.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Thalesznek tulajdonított eredmények (Eudemosz).

- ▶ A kört bármely átmérője felezi (Proklosz szerint bizonyította is).
- ▶ Fölmerte, hogy az egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők.
- ▶ Fölfedezte, hogy ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők.
- ▶ Két háromszög egybevágó, ha megegyezik egy oldaluk és (a rajta fekvő) két szög.
 - ▶ Ezt arra alapozta (Eudemosz), hogy vélhetően így határozta meg meg hajók távolságát a nyílt tengeren.
 - ▶ Hieronimosz szerint Thalesz így határozta meg Egyiptomban a piramisok magasságát.

A Klasszikus Kor Matematikája.

A Klasszikus Kor Matematikája.

Proklosz kérdése Eudemoszra alapozva.

1. Thalesz volt-e az antik matematika kezdete, mivel ő volt az első, aki az empirikusan fölfedezett tételeit be is bizonyította.
2. De az empirikus matematika már jóval korábban létezett Mezopotámiában és Egyiptomban.

A mai álláspont.

- ▶ Thalesz szép eredményei ellenére nem tekinthető a modern (deduktív) matematika megteremtőjének, legföljebb egy korai előfutárának.
- ▶ Állítjuk ezt annak ellenére, hogy néhány ókori kommentátor (pl. Eudemosz és Proklosz) másként vélekedett.

Thalesznek tulajdonított eredmények: a TÉTEL

Pamphilé (Néró idejében élt): Ő fedezte föl azt a tételt, hogy a félkörbe írt háromszög derékszögű.

Kérdések, kételyek.

1. Bizonyította-e deduktívan ezen állításokat?
2. Így ő volt-e a deduktív matematika megteremtője,
3. vagy a korábbi egyiptomi babyloniai eredményekre támaszkodva empirikusan jutott ezekre az eredményekre.
4. Minden esetre a deduktívítás alapjaiul szolgáló logikai rendszereket jóval később dolgozták ki, és nem volt semmi kényszer ebben az irányban.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. i.e. 585-400

1. A szamoszi Pithagorasz életéről.
 - 1.1 Legenda szerint Thalesz tanítványa (is) volt.
 - 1.2 Utazásai: Egyiptom, Mezopotámia, India (?), Kína (???)
 - 1.3 Iskolát alapított Crotonban (Dél-Itália),
 - 1.4 Logisztika, aritmetika, geometria.
2. Az iskoláról:
 - 2.1 A legendák szerint Pithagorasznak sok tanítványa volt, DE
 - 2.2 a név szerint ismert tagok: Philolaosz (V. sz.) és ARCHYTASZ (428-347)
 - 2.3 Proklosz (I.sz. V. sz.) szerint: *... Pithagorasz a matematikát szabad előadásokban ismertette, ... ő volt (Pithagorasz), aki megteremtette a „tisztá matematikát”, s ezzel e tudományt a „szabad művészetek” részévé tette.*
 - 2.4 Ez azt (is) jelentette, hogy csak aritmetikával és geometriával foglalkoztak (a domináns az előbbi).

A Klasszikus Kor Matematikája.

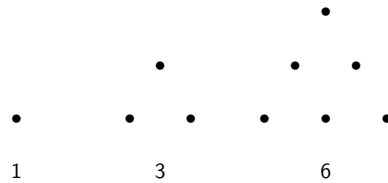
A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

- ▶ **Nagy kérdés:** **valóban ők voltak-e a deduktív matematika megteremtői**, vagy csak — tiszteletre méltó — előfutárai.
- ▶ **Konkrétabban:** **a szám absztrakt fogalma tőlük ered-e?**
- ▶ Kezdetben a szám fogalma még náluk sem különült el a fizikai valóságtól (pl. kövek), erre utalnak a figurális számokkal kapcsolatos eredmények, DE ebben is benne van az absztrakció csírája.
- ▶ Proklosz és Eudemosz $\longleftrightarrow$ Arisztotelész.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

Aritmetika - logisztika: figurális számok.

A háromszögszámok.



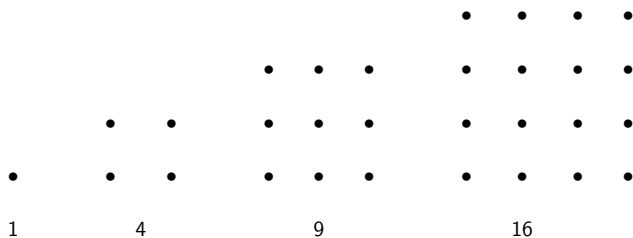
Háromszögszámok.

Általában:

$$h_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400.

Négyzetszámok.



A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400

Négyzetszámok.

- ▶ Összefüggés a négyzetszámok és a háromszögszámok között:

$$n_k = h_k + h_{k+1} = \frac{k}{2}(k+1) + \frac{k+1}{2}(k+2) = (k+1)^2$$

- ▶ További észrevételeik a négyzetszámokkal kapcsolatban:

$$k^2 + (2k+1) = (k+1)^2,$$

$$1 + 3 + \dots + (2k+1) = k^2.$$

A Pithagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400.

Ötszögszámok.

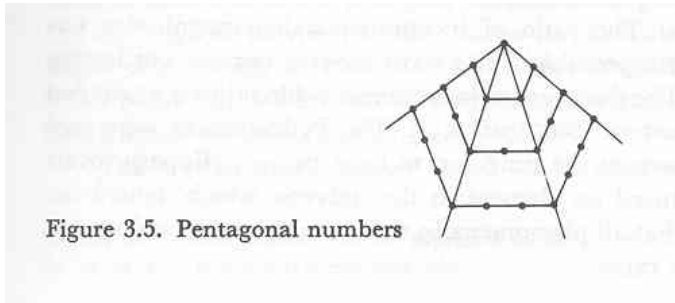


Figure 3.5. Pentagonal numbers

Görög I.

TTIK Bolyai Intézet

1, 5, 10, 15, ...

A Pithagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Logisztika.

Hatszögszámok.

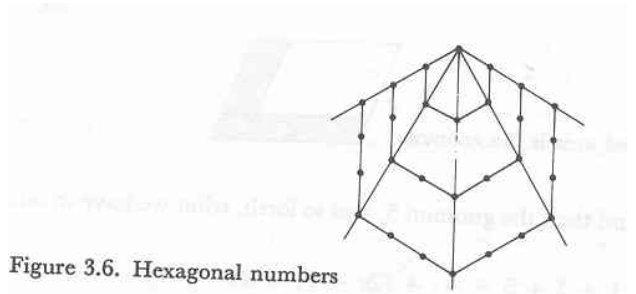


Figure 3.6. Hexagonal numbers

Görög I.

TTIK Bolyai Intézet

1, 6, 15, 28, ...

A Pithagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Aritmetika (számelmélet).

Általuk bevezetett fogalmak.

- ▶ A szám fogalma, páros- és páratlan szám, arány;
- ▶ prímszám, összetett szám,
- ▶ osztó (rész),
- ▶ tökéletes szám, pl. 6, 28, 496, 8128. Nichomachos sejtése.
- ▶ A számtani-, a mértani- és a harmónikus közép fogalma.
- ▶ Zenei arány:

$$p : \frac{p+q}{2} = \frac{2pq}{p+q} : q$$

- ▶ Összemérhetőség: a és b (számok, szakaszok) összemérhetők, ha van olyan c , hogy $a = mc$, $b = nc$ valamely m, n számra.

▶ Nem összemérhető = irracionális.

TTIK Bolyai Intézet

A Pithagoreusok Iskolája, kb. i.e 585-400. Aritmetika (számelmélet).

Nekik tulajdonított (Eudemosz és mások) összefüggés (tétel).

- ▶ Ha m páratlan szám, akkor

▶

$$\left(m, \frac{m^2 - 1}{2}, \frac{m^2 + 1}{2} \right)$$

ún. pithagoraszai számhármassal, azaz az ilyen oldalhosszúságú háromszögek derékszögűek.

- ▶ A „párosról és a páratlanról szóló tanítás,” Euklidész, Elemek IX./21-33. Tétel.
- ▶ Arisztotelész szerint: az, hogy a négyzet oldala és átlója nem összemérhető az ő fölfedezésük.

Görög I.

TTIK Bolyai Intézet

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Aritmetika.

Nekik tulajdonított (Eudemosz és mások) eredmény (folytatás).

- ▶ Az, hogy $\sqrt{2}$ összemérhetetlen az 1 egységgel, először ők igazolták, módszerük a „reductio ad absurdum” volt. → Szabó Árpád elmélete.
- ▶ Az összemérhetetlen arányok → irracionális mennyiségek (számok) elméletének kezdete → Elemek X. könyve.
- ▶ Végtelen sok prímszám van.
- ▶ Elegendő föltétel valamely páros szám tökéletes szám voltára.
- ▶ Két szám legnagyobb közös osztójának (közös részének) létezése, kiszámítása.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Geometria.

- ▶ Minden bizonyítással a „tétel” első bizonyítása (talán az, ami az Elemekben szerepel)
- ▶ Lényegében mindazt tudták, amit mi a háromszögekkel, a párhuzamosokkal, sokszögekkel és a körökkel kapcsolatos „elemi ismereteknek” tartunk, beleértve hogy a háromszög (belső) szögeinek összege 2 derékszög.
- ▶ A sík kitölthető szabályos háromszögekkel, négyzetekkel, hatszögekkel.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Összegzés 1.

1. Náluk jelennek meg először
 - 1.1 pontontosnak tekinthető fogalmak → **definíciók**,
 - 1.2 kiinduló állítások → **posztulátumok**,
 - 1.3 pontosan megfogalmazott további állítások → **tételek**,
 - 1.4 az előbbieket logikai eszközökkel való **bizonyítása**.
2. Átalakult-e teljesen a matematika, empirikus tudományból deduktív tudománnyá vált-e, egyáltalán tudománynak nevezhetjük-e?
3. Általánosan nem adható pozitív válasz, de nagyon sok rész kérdésre igen.
 - 3.1 A szám fogalma még nem tekinthető teljesen absztraktnak: nem különült el tisztán a fizikai realizációtól: figurális számok ↔ prímszámok, tökéletes számok, stb.
 - 3.2 Megjelenik az igény a deduktív gondolatmenetekre → a párosról és a páratlanról szóló tanítás.

A Pithagoreusok Iskolája, kb. I.e 585-400. Összegzés 2.

1. Vitatott kérdés, hogy ezt mi váltotta ki. Két rivális elmélet: az eleai filozófia, vagy az összemérhetetlenek fölfedezése.
2. Nem lehet egyértelműen kijelenteni, hogy eredményeik mindegyikét deduktíve, posztulátumokra alapozva igazolták, DE számos esetben ezt megtették.

Működésük nem eredményezte MÉG a matematika teljesen deduktív tudománnyá válását, de ŐK TETTÉK MEG A DÖNTŐ LÉPÉST AZ ODA VEZETŐ ÚTON.

Eleai Iskola.

Eleai Iskola.

Parmenidesz tankölteményéből.

- ▶ Az iskola alapítója I.e. 480 körül írta, benne összefoglalta nézeteit.
- ▶ Ez sok töredékben maradt fenn, így viszonylag jól rekonstruálható volt.
- ▶ Parmenidesz szerint a realitás vizsgálatának két útja van.
 1. Az **érzékelés**, amin a hétköznapi halandók és bizonyos bölcselek haladnak. Ez csupán hamis vélekedést (doxát) eredményezhet. Azt sugallja, hogy van sok egyedi dolog (sokaság), mozgás, és valami módon létezik a nemlétező is. Ezt az utat Parmenidesz teljesen elveti.
 2. Az egyedül üdvözítő út a **gondolkodás**. Ez az egyetlen út az igazsághoz. Ráébreszti a bölcset, a kutatót arra, hogy csupán a „létező” az, ami van, a „nemlétező” pedig nincsen.

1. Ismert tagok: Parmenidesz (az alapító), Zenon, Leukipposz, Demokritosz (tanítványok sora).
2. Zenon apóriái a mozgásról $\Rightarrow$ az empirikus és a deduktív megismerés ellentéte.
 - 2.1 Achilleus és a teknősbéka, a mozgás lehetetlensége, ha az „folytonos”.
 - 2.2 A „stadion paradoxon”, a repülő nyíl „áll” minden pillanatban, azaz a mozgás akkor is lehetetlen, ha azt „diszkrét” folyamatnak tekintjük.
3. Hatásuk a matematika deduktív tudománnyá válására: a **váltás fő oka**. (Szabó Árpád)

Az Athen-i iskolák 1.

Áttekintés.

1. A „görög demokrácia virágkora”.
2. A 480-ban kezdődő perzsa háború:
 - 2.1 Xerxes kezdeti sikerei: Thermopyla, Athen;
 - 2.2 görög ellentámadás: Szalamisz (Themisztoklesz), Plataia.
3. 478-ban létrejött a **Deloszi-szövetség** a perzsák ellen:
 - 3.1 adófizetés a közös háborúkra, a „kassza őrzése”,
 - 3.2 a „klasszikus görög kultúra virágkora”, Athén dominanciája a kultúra minden területén.
4. A fontosabb iskolák:
 - 4.1 Szofisták.
 - 4.2 Akadémia.
 - 4.3 Lyceum.

Szofisták.

- ▶ Az oktatott (művelt) diszciplínák: filozófia, grammatika, retorika, dialektika (= a vitatkozás tudománya), erkölctan, geometria (matematika), csillagászat (+csillagjósolás).
- ▶ Egyik fő cél: a geometria (a matematika) segítségével a világ (az univerzum) megismerése.
- ▶ A 3 nevezetes szerkesztési probléma: kockakettőzés (a „Deloszi probléma”), szögharmadolás, a kör „négyszögesítése”.
- ▶ Anaxagorasz fölvetései, problémái.
 - ▶ a Nap nem istenség, hanem egy izzó gömb; majdnem akkora, mint a Peloponesszosz félsziget;
 - ▶ a Holdnak nincs saját fénye, hideg földgolyó, emberek is élhetnek rajta.
- ▶ Ezen és más hasonló tanításáért — Periklész népszerűsége hanyatlásakor — bebörtönözték istentelenség vádjával.

Szofisták.

A legendák szerint Anaxagorasz a börtönben foglalkozott a kör négyszögesítésével, amely a kor egyik népszerű problémája volt, még az írók/költők érdeklődését is fölkelte.

Arisztophanész: Madarak

S megmérem az egyenes rúddal, hogy a
Kör négyyszögű legyen, tudod; s középen
Piac — feléje, mint központba, sok
Egyenes út vigyen s mint sugarak,
Lövelljenek szét a kerek piacról
Mindenfelé. (Arany J. fordítása)

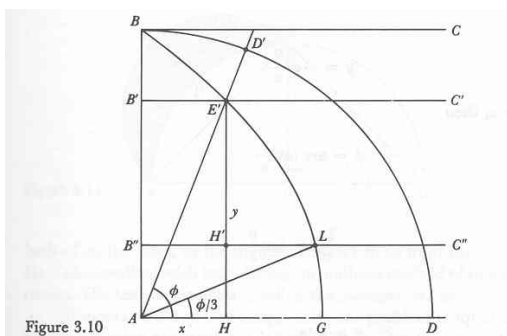
Szofisták.

Erőfeszítések szerkesztési problémák megoldására.

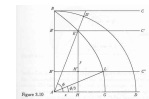
1. Szögharmadolás: az eliszi Hippiasz quadratrixe.
2. A kör négyszögesítése: Anaxagorasz próbálkozásai, a khioszi Hippokratesz holdacskái.
3. Kockakettőzés: Archytasz, Hippokratesz, Eudoxos és sokan mások.

Szögharmadolás.

Az eliszi Hippiasz quadratrixe.



Quadratrix.



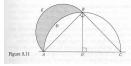
Konstrukció

1. Az AB szakaszt állandó sebességgel derékszöggel elforgatjuk: AD .
2. A B pontbeli érintőt állandó sebességgel eltoljuk az AD helyzetig.
3. A sebességek aránya olyan, hogy egyszerre indítva egyszerre érik el a véghelyzetet.
4. Egy adott időpontban AB AD' -be, BC $B'C'$ helyzetbe jut, metszéspontjuk E' . Ezen pontok összessége a **QUADRATRIX**.

Körnégyszögesítés.

A khioszi Hippokratesz 2.

A bizonyítás.

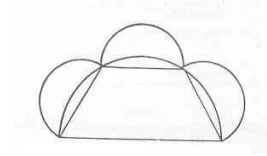


1. A háromszög köré írt körének fele kétszerese a befogó fölé írt félkörnek.
2. Így a „nagy negyedkör” egyenlő egy „kis félkörrel”.
3. Vonjuk ki mindkettőből a befogó fölötti körszeletet, az egyenlőség továbbra is fennáll.
4. Kaptuk, a „holdacska” egyenlő a háromszög felével, azaz egy egyenesekkel határolt alakzattal.

Körnégyszögesítés.

A khioszi Hippokratesz 3.

Egy további négyszögesítés:



Állítása.

A szimmetrikus trapéz, amely egy szabályos hatszög fele, egyik oldalára emelt félkör és az oldalakon levő holdacsák együtt megadják a trapéz területét.

Bizonyította-e állításait?

Eudemosz véleménye.

- ▶ A holdacsák kvadraturáját, amely a körrel való rokonságuk miatt különleges alakzatoknak tűnnek, először HIPPOKRATESZ írta le, s kifejtése helyesnek találtatott. ...
 - ▶ Először az alapokat vezette be, s az ehhez szükséges tételeket állította föl, pl. azt, hogy
 - ▶ **A hasonló körszeletek úgy aránylanak egymáshoz, mint alapjuk négyzetei.**
 - ▶ Ezt úgy bizonyította be, hogy megmutatta,
 - ▶ **az átmérők négyzetének aránya ugyanaz, mint a köröké.**
- ▶ Mert amilyen a körök aránya, olyan a hasonló szeleteké is. Hasonló szeletek azok, amelyek a körnek ugyanakkora részét képezik.

Bizonyította-e állításait?

Kétségek 1.

A pirossal szedett kijelentés (a körökre vonatkozó) éppen Euklidesz XII.2. Tétele, de azt először Eudoxos bizonyította, az általa bevezetett eszközök, módszerek nélkül — a mennyiségek általános elmélete nélkül — az lehetetlen.

Kétségek 2.

A pithagoreusok arányelméletét biztosan ismerte, de az csak összemérhető mennyiségekre vonatkozott. A nem összemérhető (az irracionális) esethez szükség van Eudoxos (legalább 50 évvel későbbi) elméletére.

Bizonyította-e állításait?

Hippokratesz bizonyítási technikája.

1.

Nem elégszik meg a „vizuális” bizonyítékokkal:

1.1

nem elégszik meg szerkesztésekkel,

1.2

bizonyítani igyekszik, hogy a „külső ív hosszabb a belsőnél”.

1.3

Ezt nem tudta korrekten elvégezni, de nem is az a legfontosabb, hanem

1.4

az igény az ilyen állítások bizonyítására.
2.

Ő számolt először korrekten egyenlőtlenségekkel, aminek igazi jelentősége később jelentkezik.

2.1

Eudoxos: a körbe és a kör köré írt sokszögek különbsége tetszőlegesen kicsivé tehető.

2.2

Euler „kezdetleges” gondolatmenetei.

Akadémia

A leghosszabb ideig fennálló ókori görög iskola. I.e. 387 körül alapította **PLATON**, és I.sz. 529-ben záratta be II. Jusztinianusz.

Előfutárok.

Kürénei Theodorosz és a tarrentumi Archytasz (két pitagoreus), akik megismertették a matematikával Platont, megalapozták a pithagoreus dominanciát az iskolában matematikából.

Ismertebb tagok még ...

Menaechmosz, Dinosztratosz, (IV. sz), **THEAITETOSZ** (415-369).

Akadémia

A tagok.

- DE a klasszikus kor minden „valamirevaló” matematikusa hosszabb-rövidebb időt töltött itt, mielőtt saját iskolát alapított volna.
- Így például **EUDOXOS**, aki az antikvitás 3 legnagyobb matematikusának egyike (Theaitetosz és Archimedesz mellett).

Akadémia

A kürenei Theodorosz.

1.

Platon Theaitetosz című dialógusában beszélget az agg Theodorosz az ifjú Theaitetosszal.
2.

Theaitetosz rövid összefoglalója a hallottakról.

2.1

A mi Theodorusunk itt fölrajzolt (írt?) valamit, ami négyzetek oldalaira vonatkozik.

2.2

Megmutatta, hogy a három és az öt lábnyi esetben, hogy azok hosszukat tekintve nem nem mérhetők az egy lábnnyival.

2.3

Így elővett minden egyes esetet egészen tizenhét lábíg. Ennél valami megakasztotta.
3.

Az „összemérhetőség” fogalma szakaszokra vonatkozik (Euklidesz X.), ezért a „három-, öt lábnyi” azon négyzetek oldalát jelenti, amelyek területe három-, öt négyzetláb.

Theodorosz.

Kérdések.

- ▶ Hogyan szerkesztett Theodorosz?
- ▶ Miért 17-ig haladt?

Válaszok.

1. Mivel a görögöknél az, amit nekünk pl. a $\sqrt{3}$ jelent, nem szám, hanem CSAK egy hosszúság (egy mennyiség), ezért inkább $w_3, w_5, \dots, w_{17}$ -et írunk.
2. Vélhetően 3, 5, $\dots$, 17 egységnyi területű téglalapokat alakított azonos területű négyzetekké (Elemek I.14.)

Theodorosz.

Az igazi kérdés:

Hogyan derítette ki, hogy $w_3, w_5, \dots, w_{17}$ -nek nincs közös mértéke w_1 -gyel.

1. Ugyanazon aritmetikai (számelméleti) módszerrel, ahogy korábban Archytasz igazolta w_2 összemérhetetlenségét az egységgel (irrationalitását).
2. Ha pl. w_q összemérhető w_1 -gyel, akkor valamely m, n számokra
- 3.

$$m^2 = qn^2,$$

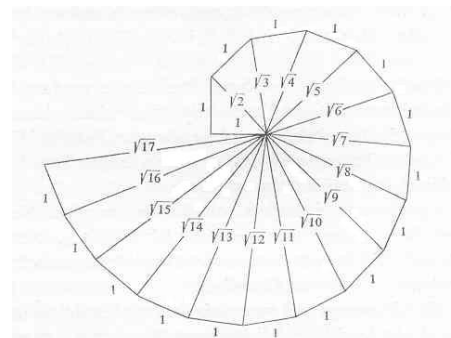
4. és az Elemek VII. könyve alapján ebből q négyzetszám volta adódna ugyan, de ez nem valószínű, mert Theodorosz geométer volt.

Theodorosz geometriai bizonyítása.

- ▶ Az alap: **Elemek X.2.** *Ha két nem egyenlő mennyiség esetén a kisebbiket a nagyobbikból való váltakozó kivonásánál a maradék sohasem lesz mérhető az előzővel, akkor e mennyiségek összemérhetetlenek.*
- ▶ Ennek alkalmazását valószínűsíti az is, hogy az eseteket egyenként vizsgálta. Az aritmetikai út — korábban láttuk is — egyszerre intézte volna el az összeset.
- ▶ A geometriai utat követve minden egyes esetet külön kell vizsgálni, mert mások a kivonások.
- ▶ **Megjegyzés.** Vélhetően a folyamat végtelen voltát nem bizonyította Theodorosz, csak utalhatott rá, hogy a maradék „soha sem tűnik el”.

Theodorosz.

Anderhub egy érdekes ábrája (1941).



A deduktív matematika kiteljesedése.

Platon

1. Szívesen hivatkozik a matematikára mint az egzakt következtetések mintapéldájára.
2. A matematikában egzakt következtetések lehetségesek annak ellenére, hogy
 - 2.1 nem látható, hallható (megfogható) dolgokról szól, hanem **ideális objektumokról**,
 - 2.2 olyanokról, amelyek **csak a gondolkodásunkban léteznek**.
3. Ezek megfogalmazásakor vélhetően a négyzet átlója és oldala kölcsönös összemérhetetlenségének bizonyítására gondolhatott.

A deduktív matematika kiteljesedése.

Platon, Állam 510 D - E

- ▶ Bizonyára azt is [tudod], hogy mindig csak látható alakokkal dolgoznak, s beszédekben is ezzel foglalkoznak, holott pedig gondolataik igazi tárgyai nem ezek az alakok,
- ▶ hanem azok, amikhez ezek hasonlítanak: magának a négyszögletű testnek [helyesen: négyzetnek!] s magának az átmérőnek [helyesen: átlónak!] a kedvéért folytatják elmélkedéseiket,
- ▶ nem pedig azért az átmérőért [átlóért], amelyet lerajzolnak...
- ▶ Közben azokat a fogalmakat keresik, amelyeket másképpen, mint ésszel, senki meg nem látott.
- ▶ Szabó Miklós fordítása Pollák György korrekciójával.

A deduktív matematika kiteljesedése.

Megjegyzés.

- ▶ Platon biztos abban, hogy a matematikusok egyetértenek vele: a látható szakaszokra értelmetlen az a kérdés, hogy **van-e közös mértékük**: egy „hajszál vastagsága” mindkét megrajzolt szakaszra egész számszor mérhető föl.
- ▶ Az összemérhetőség kérdésének kizárólag **képzelt** tehát **absztrakt szakaszok esetén van értelme**.
- ▶ Tehát Theodorosz sem hivatkozhatott a szemléletre négyzet oldalai összemérhetetlenségének bizonyításánál.