

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az Európai Matematika Kezdetek.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. április 8.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az európai civilizáció kezdete (a nem-görög területeken).

A folyamamenti kultúrák kora.

- ▶ Kevés kivétellel primitív törzsek lakják, zömmel gót és germán törzsek.
- ▶ TACITUS: ... nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek.

Az ókor vége, a korai középkor.

- ▶ 253-tól a Római Birodalom erjedése (a galliai légiók saját császárt választanak), lassú fölbomlása, erősödő keresztényüldözések. Fokozatosan kialakul a két császárság, a két birodalom.
- ▶ Népvándorlás a I.sz. IV. századtól: hunok, avarok; folyamatos támadások Róma ellen.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az ókor vége, a korai középkor.

- ▶ 381: II. Egyetemes Konstantinápolyi Zsinat, a keresztény hitvallás végleges megfogalmazása.
- ▶ 391: A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.
- ▶ 434-452: Attila hódításai, a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, a központ a Kárpát medencében.
- ▶ 451: a Catalaunum-i csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához, a „döntetlen” csata után Attila Róma alá vonul (452).
- ▶ 451-511: Klodvig király: a Frank Állam megalapítása.
- ▶ 529: A nyugati szerzetesség megalapítása, Nursiai Benedek kolostort alapít Monte Cassinon, Benedek rend (bencések).
- ▶ További rendek, kolostorok, bennük **ISKOLÁK**.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Iskolák.

Kezdet.

A VIII. századtól az egyes (világi) uralkodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. Nagy Károly meghívja iskolájába a yorki **ALCUIN**-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

a yorki Alcuin kb. 735-804

- ▶ kezdőknek szánt aritmetikai és geometriai traktátusokat írt,
- ▶ kb. 200 évig iránytmutatók voltak a francia és a brit iskolákban,
- ▶ Elhíresült tanítása: a világ teremtéséről (Noé bárkája).

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Egyetemek.

- ▶ Bologna 1088,
- ▶ Párizs 1150,
- ▶ Oxford 1167, Cambridge 1209,
- ▶ Salamanca 1239 (III. Ferdinánd Kasztília királya),
- ▶ Krakkó 1364 (III. Kázmér),
- ▶ továbbiak a XII-XV. században: Bázél, Bécs, Heidelberg, Lipcse, Prága és Salerno.
- ▶ Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai:
 - ▶ Egyik sem független az egyháztól.
 - ▶ Az oktatás nyelve a **latin**, mivel ez a katolikus egyház hivatalos nyelve. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az első egyetemek.

Az elérhető ismeretanyag.

- ▶ Kezdetben csak latin (római) forrásokra támaszkodik.
- ▶ A római matematika igen kezdetleges (számírás!), egyszerű és praktikus aritmetika csupán.
- ▶ Elérhető néhány görög mű, de nem autentikus, alacsony színvonalú latin fordításban.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

A továbbblépés kezdete.

- ▶ **SEVERINUS BOETIUS** (480-524, ősi római család sarja), az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján **traktátusokat** állít össze elemi aritmetikából és geometriából: Euklidész I. és II. könyvét lefordította, de a bizonyításokat — mint szerinte fölöslegesekeket — elhagyta.
- ▶ Mellékelt néhány (részben hibás) geometriai számítást. Pl. nem utalt azok közelítő jellegére. Számolások abakuszon.
- ▶ Nikomachosz Aritmetikáját, Arisztotelész, K. Ptolemaiosz egyes műveit is fordította.
- ▶ Keveset érthetett meg a lefordított művekből, matematikája tisztán empirikus.
- ▶ Leghíresebb műve: Consolitiones Philosophicae, amit gyaníthatóan fogsága (hítségés) alatt írt.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az egyetemek.

Iszlám kapcsolatok: mecsetiskolák.

- ▶ **GERBER** (kb. 940-1003, francia)
- ▶ Itáliában és Hispániában nevelkedett, előbb németföldi szolgálat után Reims, majd Ravenna püspöke, 999-ben pápává választották: II. Szilveszter.
- ▶ Vélhetően az első európai, aki a hindu-arab számokat használta.
- ▶ Természetesen a 0 még nem szám nála.
- ▶ Boetius tradícióinak folytatója, de nem haladta meg azt. *Könyvecske a számok osztásáról*, $\sqrt{3} \approx \frac{12}{7}$.
- ▶ Gerber-szabály: $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$ (gömbi derékszögű háromszögben, a befogó, β a rajta levő hegyesszög).

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az egyetemek: Iszlám kapcsolatok: mecsetiskolák.

- ▶ Nagy Károly udvarába hívta a **ALCUIN**-t (735-804 a „yorki”), aki szintén írt matematikai traktátusokat, de rejtvényes tanító traktátusokat is.
- ▶ Egy elhíresült mondása: *A mai emberiség a vízözönt Noé bárkájában túlélte 8 lélek leszármazottja, ezért kevésbé tökéletes, mint a teremtés eredeti emberisége.* (a 8 ugyanis nem tökéletes szám)
- ▶ Egy rejtvénye: *100 kosár gabonát osztunk szét úgy, hogy minden férfi 3 kosárral, minden nő 2 kosárral és minden gyerek 1/2 kosárral kap. Hány férfi, nő és gyerek között osztottuk szét a gabonát?*
- ▶ Megjegyzés. Ez, illetve az ilyen típusú feladatok igen népszerűek voltak e korban, főleg a keleti kultúrákban, pl. a „100 madár probléma”, de a pisai Leonardonál is.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

A megoldás.

Megoldandó a természetes számok fölött az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 100 \end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszer.

- ▶ A rejtvénynek 6 pozitív megoldása van:
- ▶ ezek (2, 30, 68), (5, 25, 70), (8, 20, 72), (11, 15, 74), (14, 10, 76), és (17, 5, 78).

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az egyetemek.

A matematika szerepe a korai középkorban.

- ▶ **Boetius**: **QUADRIVIVM**: aritmetika, geometria, csillagászat, zene; hosszú ideig ezt oktatták a teológia mellett.
- ▶ Később **TRIVIVM**: quadrivium, retorika, dialektika (a vitatkozás művészete → hitviták).
- ▶ A matematika (aritmetika, geometria) fontos az egyháznak, mert
- ▶ „ez készít föl a legjobban a hitvitákban való eredményes szereplésre”,
- ▶ alapvető a változó idejű ünnepnapok (pl. a húsvét) meghatározásában.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az egyetemek.

A matematika szerepe a korai középkorban.

- ▶ Az udvari asztrológusok kivételezett helyzetben voltak, mert
 - ▶ ők határozták meg a fontos döntések meghozatalának legkedvezőbb időpontját,
 - ▶ ideértve még az orvosi beavatkozásokét is.
- ▶ Az asztrológia fölébe kerekedett az asztronómiának (a csillagászatnak), sőt olykor a matematikának is:
 - ▶ az egyetemeken több helyen az asztrológia keretében oktatták a matematikát, a csillagászatot, sőt,
 - ▶ az orvoslást is:
 - ▶ még Gallilei is az orvoslást is tanító asztrológia részleg tagja volt.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az egyetemek.

A görög tudományosság első föléledése.

- ▶ Az európai (feudális alapú) civilizáció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- ▶ Az első manufaktúrák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.
- ▶ Az „ülő kereskedők” megjelenése, „kereskedelmi kirendeltségek” létrejötte. Hitelezések.
- ▶ Kapcsolat a „hispaniai mór államokkal”: tudomány, mecsetiskolák.
- ▶ **ROGER BACON** (1214-94): az első tudós, akit „eltitottak az írástól”, de pápai megbízásból filozófiával foglalkozhatott. Ő — ellentétben legtöbb kortársával — előnyben részesítette a kísérleteket a spekulációval (skolasztika) szemben.

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Az első „igazi” európai matematikus.

A **PISAI LEONARDO** (1170-1250)

- ▶ Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- ▶ Művei: Liber abaci (1202, 1228), Practica geometrie (1220), Flos (1225) és Liber quadratorum (1225).
- ▶ A könyvek címeiről:
- ▶ Liber abaci → Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve (abacus vagy abare az abaci eredete?),
- ▶ Flos „Virágocska”, zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is.
- ▶ Liber quadratorum → Négyzetszámok könyve (Sain M.??? sic!)

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Leonardo: Liber abaci

Aritmetika.

- ▶ A „hindu-arab” számjegyek előnyben részesítését szorgalmazta.
- ▶ a mai értelemben vett törtek és az egységtörtek (az 1 számlálójú törtek) közötti konverzió:

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

- ▶ Egy érdekes jelölésrendszere:

$$\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}.$$

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Történelmi mérföldkövek.	A felsőoktatás kezdetei.	A pisai Leonardo.	Flos	Liber quadratorum.
--------------------------	--------------------------	-------------------	------	--------------------

Leonardo: Liber abaci

Egy érdekes feladat a XII. fejezetből.

7 anyóka mendegél Róma felé, minden anyókéval mendegél 7 öszvér, minden öszvéren 7 zsák van, minden zsákban 7 kenyér van, minden kenyér mellett 7 kés van, minden kés 7 tokban van. Mennyi mindezek összege?

Egy régebbi változat: RHIND 79. feladat.

- ▶ Van 7 ház, 49 macska, 343 egér, 2401 kalász, 16807 búzaszem.
- ▶ Vélhetően a következő feladatról van szó:
- ▶ Ha van 7 ház, minden házban 7 macska, minden macska megeszik 7 egeret, minden egér elpusztítana 7 kalászt, és minden kalászban 7 mag van, akkor hány szem gabona menekül meg?

Európai kezdet.	TTIK Bolyai Intézet
-----------------	---------------------

Leonardo: Liber abaci

Középkori orosz kézirat.
Mendegél 7 anyóka, minden anyókánál 7 bot van, minden boton 7 ágacska, minden ágacsán 7 tarisznya, minden tarisznyában 7 lepény, minden lepényben 7 veréb, minden verébben 7 zúza. Mennyi ez összesen?

XIX. századi angol nonszensz-vers (nursery rhyme).

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits,
Kits, cats, sacks, and wiwes,
How many were going to St. Ives?

Leonardo: Liber abaci

A probléma, amelyet mindenki ismer.
Hány pár nyúl jön a világra egy év alatt, ha kezdetben egyetlen páruk van, és minden egyes hónapban minden pártól egy újabb pár születik föltéve, hogy a párok a második hónaptól kezdődően produktívak.

Fibonacci sorozatok

- ▶ Az „eredeti”: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
- ▶ Általában: $a_0, a_1, a_2, \dots$, ahol

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad \text{ha } n > 1.$$

Leonardo: Liber abaci, határozatlan egyenletek 1.

A 30 madár probléma:
Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonként 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké $\frac{1}{2}$. Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtákból?

A megoldás.
A feladat az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 30 \end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszerre vezet, amelynek egyetlen pozitív megoldása az $x = 3, y = 5, z = 22$.

Leonardo: Liber abaci: határozatlan egyenletek 2.

Megjegyzés. E feladat egy variánsa az ókori kínai, hindu, valamint a kora-középkori arab forrásokból is ismert *100 madár problémának*.

Első lépés az általánosság felé: a lóvásárlási problémák.
1. Lóvásárlási probléma. *Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.*

Leonardo: Liber abaci, határozatlan egyenletek 3.

- ▶ Ha s a ló ára, akkor megoldandó az:

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}y &= s \\ y + \frac{1}{4}x &= s\end{aligned}$$

egyenletrendszer, x és y a „kupeczek” pénze.

- ▶ A legkisebb egész megoldás:

$$\begin{aligned}x &= (3 - 1) \cdot 4 = 8 \\ y &= (4 - 1) \cdot 3 = 9 \\ s &= 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11\end{aligned}$$

Leonardo: Liber abaci, határozatlan egyenletek 4.

Általánosítás 3 szereplőre.

2. Lóvásárlási probléma. A megoldandó egyenletrendszer most

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}(y + z) &= s \\ y + \frac{1}{4}(x + z) &= s \\ z + \frac{1}{5}(x + y) &= s\end{aligned}$$

Megoldás 1.

- ▶ Általános jegyeket tartalmaz a **szöveges** megoldás.
- ▶ Új határozatlant vezet be: $x + y + z = t$,
- ▶ Kivonja belőle mindhárom korábbi egyenletét:

$$\frac{2}{3}(y + z) = \frac{3}{4}(x + z) = \frac{4}{5}(x + y) = t - s = D,$$

- ▶ A megoldandó egyenletrendszere így

$$\begin{aligned}y + z &= \frac{3}{2}D \\ x + z &= \frac{4}{3}D \\ x + y &= \frac{5}{4}D\end{aligned}$$

Megoldás 2.

- ▶ x, y, z -re egész értéket akar kapni, ezért D -t 24-nek választja,
- ▶ így egyenletrendszere

$$\begin{aligned}y + z &= 36 \\ x + z &= 32 \\ x + y &= 30\end{aligned}$$

- ▶ amiből $x = 13, y = 17, z = 19$.
- ▶ **Megjegyzés.** Határozatlan egyenletrendszer esetén megoldása szerepel Diophantos Arithmetica c. könyvében, pl az I. 24 feladat megoldása.

Leonardo: Flos.

Palermoi János első problémája.

- ▶ Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.
- ▶ Mai jelölésekkel a következő egyenletrendszert kell megoldani.
- ▶

$$\begin{aligned}x^2 + 5 &= y^2 \\ x^2 - 5 &= z^2\end{aligned}$$

- ▶ Leonardo megoldása $x = 3 + \frac{5}{12}$, $y = 4 + \frac{1}{12}$, $z = 2 + \frac{7}{12}$.
- ▶ A Liber quadratorumban több fejezetet szentelt e probléma általánosításainak.

Leonardo: Liber quadratorum.

Palermoi János első problémája általánosítása.

- ▶ A következő egyenletrendszert vizsgálja

$$\begin{aligned}x^2 + C &= y^2 \\ x^2 - C &= z^2\end{aligned}$$

- ▶ Speciális terminológiája: Ha x^2 és C megoldása e problémának, akkor C számot *CONGRUUM*-nak, míg az x^2 négyzetet *QUADRATUS CONGRUENTUS*-nak nevezi.
- ▶ A műben részletesen, nagy gonddal foglalkozik a congruus-congruentus párok keresésével.

Leonardo: Flos.

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo elemzése.

1. $x \notin \mathbb{N}$, mert $x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$, amiből egyrészt $x < 2$, másrészt $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$.
2. $x \notin \mathbb{Q}^+$, sőt racionális szám négyzetgyöke sem lehet, mert az egyenlet $x = \frac{20-20x^2}{10+x^2}$ alakban is írható, és a jobb oldalon ez esetben racionális, míg a bal oldalon irracionális szám állna.
3. Megmutatta (nem korrekten), hogy x nem lehet kvadratikus irracionális, például $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ alakú szám sem ($a, b \in \mathbb{Q}^+$).

Leonardo: Flos.

Palermoi János második problémája.

- ▶ Egy közelítő megoldás hatvanados törtekkel:
- ▶

$$\begin{aligned}x &= 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40 \\ &= 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} \\ &\quad + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}.\end{aligned}$$

- ▶ Ez $3 \cdot 10^{-11}$ pontosságú, csak a hatodik hatvanados jegy nagyobb a korrektnél kb. másfélszer.
- ▶ Decimálisan: 1,36883102451989026063100137174211

Leonardo: Flos.

Palermoi János második problémája.

Megjegyzések.

- 1. Pontatlansága ellenére kijelenthetjük, hogy ez volt az első komoly kísérlet a harmadfokú egyenletek gyökjelekkel való, tehát algebrai megoldására.
- 2. Más írásaiból azonban az tűnt ki, hogy osztotta az iszlám tudósok, így Omar Khajjam, azon véleményét, hogy a harmad- és magasabb fokú egyenletek csak geometriailag oldhatók meg egzaktan.
- 3. Előbbi eljárásában impliciten az is benne van, hogy Euklidész X. könyve nem írja le az összes algebrai irracionálist, hiszen egyenletének nincs megoldása az ott tárgyalt $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, illetve $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ alakú irracionálisok körében.

Leonardo: Liber quadratorum.

A mű első könyve — amely zömmel pitagoraszai számhármassal foglalkozik — a következő bejelentéssel kezdődik.
Az első n páratlan szám összege n^2 .
Itt csak illusztrálja állítását, a bizonyítás a könyv végén van.

Az illusztráció

$$\begin{aligned}1 &= 1^2 \\1 + 3 &= 4 = 2^2 \\1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2\end{aligned}$$

Leonardo: Liber quadratorum.

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

A feladat pontosabb megfogalmazása.

Keressünk két olyan négyzetszámot, amelyek összege is négyzetszám.

Tehát (mai szóhasználat): Pithagoraszai számhármassokat keres.

Leonardo: Liber quadratorum.

Megjegyzés.

NEM AD MEG ELJÁRÁST, KONKRÉT SZÁMOKKAL DOLGOZIK, DE...

Leonardo: Liber quadratorum.

1. módszer.

- ▶ Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk.
- ▶ Legyen $y^2 = 9 = 3^2$.
- ▶ Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat,
 $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$,
- ▶ tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.

Elemzés 1.

- ▶ Tekintsük a kiindulási páratlan négyzetszámnál kisebb összes páratlan számot. Ezek összege a keresett másik négyzetszám. A kettő összege pedig nyilván megint négyzetszám hiszen 1-gyel kezdődő egymást követő páratlan számok összege.
- ▶ Világos, hogy e módszer — a kirótt föltétel mellett — teljesen általános, hiszen ha d páratlan négyzetszám, akkor

$$\begin{aligned} y^2 &= d \\ x^2 &= 1 + 3 + \dots + (d - 2) = \left(\frac{d - 1}{2}\right)^2 \\ z^2 &= x^2 + y^2 = 1 + 3 + \dots + (d - 2) + d = \left(\frac{d + 1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

Elemzés 2.

- ▶ ugyanis

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) = \left(\frac{(2n - 1) + 1}{2}\right)^2 = n^2.$$

- ▶ Ezután bizonyítást (illusztrációt) is ad Euklidesz Elemek II. könyve stílusában geometriai eljárással: egy egyenesszakasz alkalmas fölosztásával.

Leonardo: Liber quadratorum.

2. módszer: négygyel osztható négyzetszámok.

Kiindulási észrevétele a következő fölbontás (amit szóvegesen ad meg):

$$y^2 = 4k = 2(2k) = (2k - 1) + (2k + 1).$$

Leonardo számolása:

- ▶ $y^2 = 36 = 6^2 = 17 + 19$,
- ▶ $x^2 = 1 + \dots + 15 = 64 = 8^2$,
- ▶ $z^2 = x^2 + y^2 = 1 + \dots + 15 + 17 + 19 = 100 = 10^2$.

Leonardo: Liber quadratorum.

Általánosan.

$$y^2 = 4k = 2(2k) = (2k - 1) + (2k + 1)$$
$$x^2 = 1 + \dots + (2k - 3) = (k - 1)^2$$
$$z^2 = 1 + \dots + (2k - 3) + ((2k - 1) + (2k + 1)) = (k + 1)^2$$

Leonardo: Liber quadratorum.

3. módszer: 3-mal osztható páratlan négyzetszámok.

- ▶ Csak számokkal adjuk meg.
- ▶ Az alap: $y^2 = 9k = 3(3k) = (3k - 2) + 3k + (3k + 2)$.
- ▶ Leonardo példája:

$$y^2 = 81 = 3 \cdot 27 = 25 + 27 + 29 = 9^2,$$
$$x^2 = 1 + \dots + 23 = 144 = 12^2,$$
$$z^2 = 1 + \dots + 23 + (25 + 27 + 29) = 144 + 81 = 225 = 15^2.$$

Leonardo: Liber quadratorum.

4. módszer: 6-tal osztható négyzetszámok.

- ▶ A legkisebb ilyen a 36, de a 144-et választja.
- ▶ A számpélda

$$y^2 = 144 = 6 \cdot 24 = (19 + 21) + (23 + 25) + (27 + 29)$$
$$x^2 = 1 + 3 + \dots + 17 = 81 = 9^2$$
$$z^2 = (1 + 3 + \dots + 17) + (19 + 21 + \dots + 29)$$
$$= 81 + 144 = 225 = 15^2.$$

Leonardo: Liber quadratorum.

4. módszer: 6-tal osztható négyzetszámok.

- ▶ Általánosan a probléma:
- ▶

$$y^2 = 36k = (6k - 5) + \dots + (6k + 5)$$
$$x^2 = 1 + \dots + (6k - 7) = (3k - 3)^2$$
$$x^2 + y^2 = 1 + \dots + (6k - 7) + (6k - 5) + \dots + (6k + 5)$$
$$= 36k + (3k - 3)^2 = (3k + 3)^2$$