

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
-------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Az Egyiptomi Középbirodalom matematikája.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2019. február 4.-11.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
-------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Természeti viszonyok.

Földrajzi és éghajlati viszonyok 1.

- ▶ Szinte minden oldalról természetes, nehezen áthatolható határok: északon és keleten tenger, délen az Etióp magasságok, nyugaton a Nubiai sivatag; „bejárat” csak a Sínai félsziget felől.
- ▶ A (sokhelyütt keskeny) folyóvölgy védett a hódítóktól, külső hatásoktól.
- ▶ Nincsenek pusztító esők, de a Nilus rendszeresen árad,
 - ▶ ez víz + szerves anyag utánpótlást jelent,
 - ▶ lehetőség nagy mennyiségű gabona termelésére.
 - ▶ Ezért e vidék számos ókori birodalom „éléskamrájaként” funkcionált.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
-------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Természeti viszonyok.

Földrajzi és éghajlati viszonyok 2.

- ▶ A Nilus rendszeres áradása csillagászati megfigyelésekre támaszkodva naptárrendszerük alapja lett.
- ▶ Megfigyelték, hogy két áradás között 365 nap telik el.
- ▶ Ez lett 1 év, a naptárunk alapja.
- ▶ Ez az áradások miatti földmérések is szükségesek voltak, ami az itt élő népek matematikájának kialakulására és fejlődésére is hatott.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérőföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
-------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Az egyiptomi civilizáció kezdete.

Az egyiptomi mitológia: a legfőbb istenek.

- ▶ Kezdet: a Napisten,
- ▶ **RA** vagy **RÉ**, **Amonra**, **Amonré**.
- ▶ Gyemekeik az első „isten pár”: **SU** és **TEFNUT**,
- ▶ a „szárazság” és a „nedvesség” isteni párja.
- ▶ Gyemekeik az „isten pár”: **NUT** az Ég és **GEB** a Föld istene.
- ▶ Gyemekeik a két „isten pár”: **OZIRISZ** és **IZISZ** valamint **SET** és **NEFTISZ**.
- ▶ A két pár férfi tagjainak, Ozirisznek és Setnek állandó harca.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Az egyiptomi civilizáció kezdete.

Predinasztikus kor: a két királyság.

- ▶ Alsó- ill. Felső Egyiptom, eltérő temetkezési szokások.
- ▶ Kapcsolat Mezopotámiával a 4. évezred vége felé.
- ▶ Az első írás, a **hieroglifikus** még a 4. évezred legvégén, a 3. elején alakult ki: szóírás volt.
- ▶ majd még az évezred elején (a kurzívabb) a második, a **hieratikus**. Ez is szóírás.
- ▶ A két írás használatának eltérő vonásai.

Első egyesítés.

A predinasztikus kor vége

Narmer (Narmer Aha) Felső-Egyiptom uralkodója a IV. évezred végén meghódítja Alsó-Egyiptomot.

Narmer paletta



Első egyesítés.

Narmer paletta: előlap



- ▶ Narmer neve a tetején olvasható (korai hieroglif írás) a Hathor-fejek közt,
- ▶ az uralkodó Felső-Egyiptom fehér koronáját viseli,
- ▶ az Alsó-Egyiptomot szimbolizáló fejedelemre sújt,
- ▶ Alsó-Egyiptom jelképét Hórusz isten megköttözi.

Első egyesítés.

Narmer paletta: hátlap



- ▶ Narmer Alsó-Egyiptom vörös koronáját viseli,
- ▶ körülvette lefejezett ellenségek.

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

A három birodalom.

A dinasztiák.

- ▶ Az i.e. 280 körül uralkodott (hellén korbeli) II. Ptolemaiosz (Philadelphusz) utasítására egy Manetho nevű pap
- ▶ listát készített az uralkodókról (uralkodó családokról), 31 **dinasztiát** sorolt föl.
- ▶ Ezeket 3 nagy csoportba — **BIRODALMAK** osztotta.
- ▶ Közéjük ún. átmeneti korokat illesztett, ekkor a birodalom egysége átmenetileg megszűnt.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Óbirodalom

- ▶ Az első egyesítés i.e. 3100 körül (3200 és 2800 közötti időpontok olvashatók), Narmer utóda: Menész (Hórusz Aha néven is szerepel) stabilizálja a hódítást.
- ▶ Kezdetét veszi az **Óbirodalom** kora.
- ▶ Piramisépítések: a Királyok völgye. Abu Simbel sziklatemploma.
- ▶ Szobrászati emlékek: a guggoló írnok, Nofretete.
- ▶ Irodalmi alkotások: Imhotep (Ptahhoptep) intelmei.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Középbirodalom

- ▶ i.e. 2200-tól hanyatlás, majd az első átmeneti kor: a birodalom kettészakadt.
- ▶ i.e. 2040 körül **II. Mentuhotep** (XI. dinasztia, Felső Egyiptom) ismét egyesíti a két királyságot: kezdetét veszi a **Középbirodalom** kora.
- ▶ Építészet: a Fajjumi víztározó.
- ▶ Irodalom: Színuhe története,
- ▶ Fontos matematikai papirusztekercsek: **Rhind** (British Museum), **Moszkvai (Golenisev)** (Puskin Múzeum).

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Második átmeneti kor

- i.e. 1750 körül a XII. dinasztia végén, részben külső (hikszosz) támadás következtében, megbukik az egységes birodalom, ismét két királyság.
- ▶ Elkészül a Rhind papirusz egy másolata, sok további matematikai tekercs.
 - ▶ Kerekas járművek, fazekaskorong.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Újbirodalom

- ▶ 1600 körül a XVIII. dinasztia uralkodói ismét egyesítik a birodalmat: létrejön az **Újbirodalom**.
- ▶ A XXV. dinasztia idején, a 8-7. században megjelenik a harmadik írás, a **demotikus**,

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Az egyiptomi írások és megfejtésük.

A hieroglifikus írás.

- ▶ A **hieroglifikus** írás egyfajta képírás, hasonló a másutt, pl. Mezopotámiában használthoz. Eredete nem világos.
- ▶ Első változata vélhetően még az Óbirodalom előtti időből származik.

A hieratikus írás.

- ▶ Első változata szintén a predinasztikus korból származik, a hieroglifikust egyszerűbbé, „kurzívabbá” tették.
- ▶ I.e. 2500 körülre alakult ki a végsőnek tekinthető változata.
- ▶ Ez időtől a hieroglifikus írás használata szakrális célokra korlátozódott, a **hieratikus** írás vált átlánossá.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Az egyiptomi írások és megfejtésük.

A démotikus írás.

Az Újbirodalom vége felé, kb. a I.e. 8.-7. században további egyszerűsítés, kurziválás révén létrejött a **démotikus** írás.

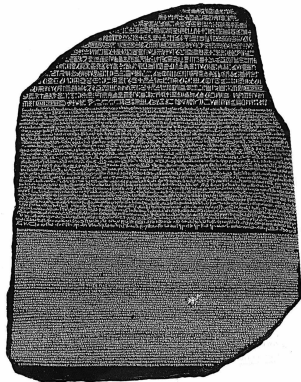
Az írások megfejtése.

- ▶ 1799, a **Rosetta kő** megtalálása. A British Museumban őrzik.
- ▶ A I.e. II. század elejéről származik. Kétféle egyiptomi (hieroglifikus valamint démotikus) írással, és görög nyelven szerepel ugyanaz a szöveg:
- ▶ Memphis főpapja istenek fiaként köszönti V. Ptolemaioszt.
- ▶ 1820-tól Champolion (francia) és T. Young (angol) előbb megfejtették a két egyiptomi írást (a görög alapján), majd interpolációval a hieratikus írást is.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Rosetta kő.



Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Csillagászat.

A Nílus áradásai.

- ▶ Megfigyelték, hogy a a Nilus évenkénti, rendszeres áradása röviddel az után következik be, hogy a Szíriusz csillag közvetlenül a Nap fölkelte előtt jelenik meg a horizonton.
- ▶ Az ezt követő napokon a csillag hosszabb ideig látható a napkelte előtt egészen addig, amíg a Nap fénye elhomályosítja.
- ▶ Azt a napot, amelyen a csillag megjelent választották az év kezdőnapjának,
- ▶ ugyanis e naphoz volt köthető a Nilus rendszeres áradásának kezdete, és
- ▶ A Nílus áradásai alapvető fontosságúak voltak mezőgazdaságukban.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Csillagászat.

A tanulságok.

- ▶ Azt tapasztalták, hogy két áradás, a Szíriusz két megjelenése között 365 nap telik el. Ezt tekintették egy évnek.
- ▶ Pontosabb számítások szerint kb. $365\frac{1}{4}$ nap telik el.
- ▶ Ezen eltérés sok probléma forrása.
- ▶ Naptárreformok sora következett.

Az első naptár.

- ▶ Az „évet” 12 30 napos hónapra osztották, és volt még 5 „extra nap”.
- ▶ Az $\frac{1}{4}$ napos eltérés miatt a rendszer 1460 évenként került összhangba a valósággal.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Csillagászat.

A naptár bevezetése.

- ▶ Egyes források szerint az egyiptomiak e naptárukat I.e. 4241-ben vezették be,
- ▶ E dátum Censorinus római csillagász I.sz. 238-as számításain alapul,
- ▶ szerinte az egyiptomi naptár legutóbb I.sz. 139-ben volt összhangban a csillagászatival.
- ▶ Extrapolációs számításai eredményezték az I.e. 4241-es bevezetést.
- ▶ Három ciklussal számolt, de ez vitatható, túl korai dátum.
- ▶ Valószínűbb a két ciklussal korábbi, azaz I.e. 2773-as bevezetés.

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Történeti mérföldkövek	Írásos emlékek.	Csillagászat.	Aritmetika	A Rhind-papirusz	Egy meglepő eredmény.
------------------------	-----------------	---------------	------------	------------------	-----------------------

Hieroglifikus számok.

1	I	IIII	6
2	II	IIII	7
3	III	IIII	8
4	IIII	IIII	9
5	IIII		
10	∩		
100	9		
1 000	Lotus		
10 000			
100 000	Tadpole or bird		
1 000 000	Not in later use		

Mat. Kultúrtört.	TTIK Bolyai Intézet
------------------	---------------------

Hieratikus és démotikus számok

x	10 ⁰	10 ¹	10 ²	10 ³	x	10 ⁰	10 ¹	10 ²	10 ³
1		∧	∩	⋈	1		∧	∩	⋈
2		∧	∩	⋈	2	4	∩	∩	⋈
3		∧	∩	⋈	3	6	∩	∩	⋈
4	—	∩	∩	⋈	4	∩	∩	∩	⋈
5	∩	∩	∩	⋈	5	∩	∩	∩	⋈
6		∩	∩	⋈	6	∩	∩	∩	⋈
7	∩	∩	∩	⋈	7	—	∩	∩	⋈
8	—	∩	∩	⋈	8	∩	∩	∩	⋈
9	∩	∩	∩	⋈	9	∩	∩	∩	⋈

FIGURE 40 Egyptian ciphered numerals, hieratic and demotic forms

Az egyiptomi aritmetika.

Számírásuk.

- ▶ 10-es alapú és nem helyiértékes,
- ▶ a 10 hatványainak különböző jele volt.
- ▶ Törteket is használtak, DE ...

Aritmetika: összeadás.

- ▶ Additív jellegű,
- ▶ kezdetben minden műveletet a kettőzésre vezettek vissza,
- ▶ később tízszereztek és feleztek is.
- ▶ Ebben a rendszerben egyszerű összeadni.

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás kettőzésekkel (hieroglifikusan).

$$12 \cdot 12$$

	∩		1	12
	∩		2	24
	∩		/4	48
	∩		/8	96 sum 144

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás kettőzésekkel (mai jelölésekkel).

- ▶ Ismételt összeadásként végezték: kettőzések után.
- ▶ A $12 \cdot 13$ kiszámítása (mai számírással):

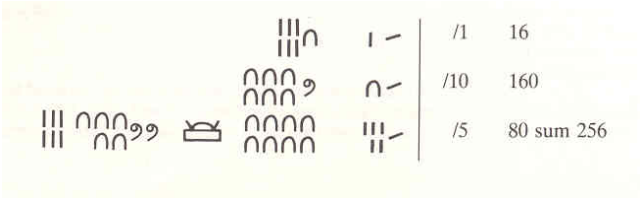
1	13
2	26
4	52
8	104

- ▶ Az első oszlopban a 4-mal jelzett sorokban $4 + 8 = 12$ áll, így a második oszlop alapján
- ▶

$$12 \cdot 13 = 52 + 104 = 156.$$

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás tízszerézéssel és felezéssel (hieroglifikusan).
 $16 \cdot 16$



Az egyiptomi aritmetika.

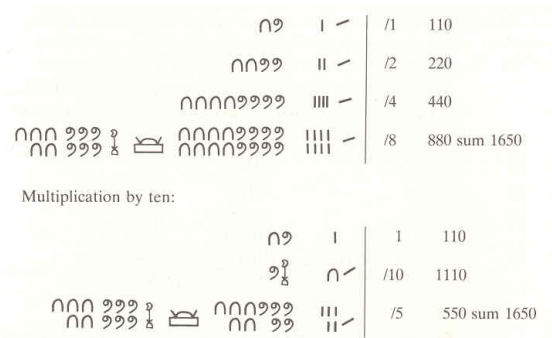
Szorzás tízszerézéssel és felezéssel (mai jelölésekkel)
A $17 \cdot 13$ kiszámítása tízszerézéssel és felezéssel: a

- ▶

1	13
2	26
10	130
5	65
- ▶ számolás alapján a $17 \cdot 13$ szorzat, lévén $17 = 2 + 10 + 5$, nem más, mint $26 + 130 + 65$, azaz **221**.

Az egyiptomi aritmetika.

Szorzás mindkét úton (hieroglifikusan): $15 \cdot 110$



Az egyiptomi aritmetika.

- Osztás.
- ▶ Az előbbi szorzás alapján az osztás is elvégezhető akkor, ha a hányados egész, ugyanis
 - ▶ additív aritmetikájukban az $a : b$ azt jelentette, hogy
 - ▶ számolj b -vel addig, amíg a -t kapsz.

Az egyiptomi aritmetika.

Osztás.

- ▶ Bonyolultabb azonban a helyzet akkor, ha a hányados nem egész.
- ▶ Meg kell vizsgálni: hogyan számoltak törtekkel,
- ▶ egyáltalán milyen törtekkel tudtak számolni.

Törtek.

A korabeli egyiptomiak számára általában nem léteztek az $\frac{m}{n}$ alakú törtek, csak az $\frac{1}{n}$ alakúak.

Törtek: jelölések.

Saját jele csak az $\frac{1}{n}$ alakú törteknek, valamint a $\frac{2}{3}$ -nak volt. Ezeket $\overline{n}$ és $\overline{3}$ fogja jelölni.

Az egyiptomi aritmetika.

Osztás.

Tekintsük a $21 : 8$ osztást, azaz számoljunk nyolcasával addig, amíg 21-et kapunk.

▶	1	8
	$\overline{2}$	16
	$\overline{2}$	4
	$\overline{4}$	2
	$\overline{8}$	1

- ▶ tehát, $21 : 8 = 2 + \overline{2} + \overline{8} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.
- ▶ A Rhind-papirusz 21. problémájának megoldása alapján: az osztásnál — a szorzásnál használt tízszerezés analogonjaként — tizedrészt is vettek a számolás rövidítésére.

Az egyiptomi aritmetika.

Londoni bőrtekercs.

- ▶ Elolvasásának nehézsége.
- ▶

$$\begin{aligned}\overline{6} + \overline{6} &= \overline{3} \\ \overline{6} + \overline{6} + \overline{6} &= \overline{2} \\ \overline{3} + \overline{3} &= \overline{3}\end{aligned}$$

- ▶ Ezekből könnyen kaphatók a Rhind-papiruszon gyakran alkalmazott

$$\begin{aligned}\overline{3} + \overline{6} &= \overline{2} \\ \overline{2} + \overline{3} + \overline{6} &= 1 \\ \overline{3} &= \overline{2} + \overline{6}\end{aligned}$$

Az egyiptomi aritmetika.

Számolás törtekkel.

▶	$\overline{2} + \overline{3} = \overline{3} + \overline{6}$
	$\overline{3} + \overline{2} = 1 + \overline{6}$
▶	egyenlőségek.

A Rhind-papirusz.

Megtalálása

- ▶ A két darabból álló, összesen kb. 5 méter hosszú és 30 cm széles papirusztekercet a XIX. század végén vásárolta Alexandriában H. Rhind régész és a British Museum-nak ajándékozta.
- ▶ Vélhetően újkori sírablók vágták ketté, de miért???
- ▶ Néhány töredékét a Columbia Egyetemen őrzik.

Kiknek írták? A kezdő sor

Hozzáértő bevezetést minden dolgokba, minden létező, minden titok megismerését ígéri. DE...

A Rhind-papirusz.

A tényleges tartalom:

- ▶ Számolások egészekkel és törtekkel,
- ▶ ezek alkalmazása gyakorlati problémák megoldására,
- ▶ pl. a bér fölosztása, élelmezési számítások, felület és térfogat kiszámítása, ...

Kiknek írhatták?

- ▶ Arisztotelesz szerint a papságnak, mert ők voltak akkor a tudás hordozói.
- ▶ Herodotosz és Demokritosz véleménye: gyakorlati szakembereknek.
- ▶ De kik voltak azok?

A királyi írnokok rendje.

Anastasi I papirusz, egy írnok korholja társát:

Megmagyarázom, mit tesz az, mikor azt mondod: én írom a hadseregnek a parancsokat. Megbíznak téged azzal, hogy ássál egy tavat. Ekkor hozzám jössz, tőlem kérdezősködsz a katonák élelmezéséről, és így szólsz: számítsd ki nekem. Nem tudsz megbirkózni a feladatoddal, és az az én nyakamba szakad... Zavarba hozlak, amikor átadom urad parancsát, neked, az ő királyi írnokának... a nagy tudású írnoknak, a sereg előljárójának. Töltést kell készíteni 730 könyök hosszút és 55 könyök széleset, amely 120 rekeszből áll, s náddal és gerendákkal van lefedve; ... A tábornokoktól érdeklődnek, hogy mennyi téglát kell ehhez, és valamennyi írnok összegyűlik, és egy sem tud semmit, mind benned bíznak: te nagy tudású írnok vagy, oldd meg nekünk hamar, Lásd, a te híred nagy ...

Az elemi törtek kétszerezése.

Két sor a Rhind-papirusz 2: n táblázatából.

- ▶ Első **2: 31**
- ▶ A papiruszon ez áll:

$$1 + \overline{2} + \overline{20} \text{ az } \overline{20}, \quad \overline{4} \text{ az, } \overline{124} \quad \overline{5} \text{ az } \overline{155}.$$

- ▶ Így

$$\frac{2}{31} = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}.$$

Az elemi törtek kétszerezése.

A mögöttes számolás:

▶

$$\begin{array}{r} 1 \quad 31 \\ /4 \quad \overline{124} \quad 1 + \overline{2} + \overline{20} \\ /5 \quad \overline{155} \quad \quad \overline{4} \quad \overline{5} \end{array}$$

▶

ugyanis

▶

$$(1 + \overline{2} + \overline{20}) + \overline{4} + \overline{5} = 2.$$

Az elemi törtek kétszerezése.

Interpretáció.

A számolás tömör, csak sejthető hogyan jött rá. Valószínű, hogy az első sor után — amit a tizedrész felezésével kap — az eredményt kiegészíti 2-re, és közben használja az ugyancsak a börtkekercsen található $\overline{20} + \overline{5} = \overline{4}$ egyenlőséget.

A második sor.

2: 35

- ▶ A papiruszon ez áll:
- ▶

$$\begin{array}{r} 1 + \overline{6} \text{ az } \overline{30} \quad \quad \overline{3} + \overline{6} \text{ az } \overline{42} \\ \textcolor{red}{6} \quad \quad \quad \textcolor{red}{7} \quad \quad \quad \textcolor{red}{5} \end{array}$$

Az elemi törtek kétszerezése.

Az előbbi számolás.

$$\begin{array}{r} 1 + \overline{6} \text{ az } \overline{30} \quad \quad \overline{3} + \overline{6} \text{ az } \overline{42} \\ \textcolor{red}{6} \quad \quad \quad \textcolor{red}{7} \quad \quad \quad \textcolor{red}{5} \end{array}$$

▶ Így

▶

$$\frac{2}{35} = \overline{30} + \overline{42}.$$

Az elemi törtek kétszerezése.

Interpretáció: a piros számok.

- ▶ 1. lehetőség: a 7 és az 5 nem más, mint a hatodok száma az első sorbeli $1 + \overline{6}$ és $\overline{3} + \overline{6}$ -ban, s ekkor az elől álló 6-os szerepe is világos, hatodokról van szó.
- ▶ 2. lehetőség: a 6, 7, 5 fordítotan arányos a 35, 30, 42-vel, s így egyenesen arányos $\overline{35}$, $\overline{30}$, $\overline{42}$ -vel.
- ▶ Az utóbbit támasztja alá, hogy a papiruszon levő két sor a következő számolást rejtheti:
- ▶

$$\begin{array}{r} 1 \quad 35 \\ /30 \quad 1 + \overline{6} \\ /42 \quad \overline{3} + \overline{6} \end{array}$$

Az elemi törtek kétszerezése.

Interpretáció

- Amiből
$$\frac{2}{35} = \overline{30} + \overline{42}.$$
- Egy mai számolás.
- $$\frac{2}{35} = \frac{12}{210} = \frac{7}{210} + \frac{5}{210} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42},$$
- azaz, törtek számlálóiként funkcionálnak.
- Ezt más számolásaik is alátámasztják.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Kiegészítés 1-re.

- Emlékezzünk: a 2: 31 kiszámításánál $\overline{2} + \overline{20}$ -at kellett kiegészíteni 1-re.
- Kiegészítésként $\overline{4} + \overline{5}$ adódott, de a probléma nem triviális.
- Egy kiegészítési technikát ad a Rhind 21. feladata.

A 21. feladat.
Mi egészíti ki a $\overline{3} + \overline{15}$ -öt 1-re?

Kiegészítés 1-re.

Az eredmény.

10 1 összesen: 10 a maradék 4.

A megoldás.

- Számolj 15-tel, míg 4-et kapsz.
- $$\begin{array}{r} 1 \quad 15 \\ \overline{10} \quad 1 + \overline{2} \\ \overline{5} \quad 3 \\ \overline{15} \quad 1 \end{array}$$
- A jelzett sorok jobb oldalán $3 + 1 = 4$ található, így $\overline{5} + \overline{15}$ az, amit hozzá kell adni.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Interpretáció.

A vörös kisegítő számok ismét tekinthetők számlálóknak közös nevezőre hozáskor. Ugyanis

- $$\overline{3} + \overline{15} = \frac{10}{15} + \frac{1}{15}$$
- Összegük 11, tehát még $\frac{4}{15}$ -öd hiányzik.

Tekintsünk egy nehezebb kiegészítést, a Rhind 23. problémáját. Ebben a vörös kisegítő számok számlálóként való interpretálása első látásra problematikus.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A Rhind 23. problémája.

Egészítsük ki $\overline{4} + \overline{8} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{45}$ -öt $\overline{\overline{3}}$ -ra.

A (hiányos) számolás.

$$\overline{4} + \overline{8} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{45}$$

$11 + \overline{4} \quad 5 + \overline{2} + \overline{8} \quad 4 + \overline{2} \quad 1 + \overline{2} \quad 1$

Az eredmény.

Tehát $\overline{9} + \overline{40}$ -et kell hozzáadni, hogy $\overline{\overline{3}}$ -at kapjunk.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Ellenőrzés.

$$\overline{4} + \overline{8} + \overline{9} + \overline{10} + \overline{30} + \overline{40} + \overline{45} + \overline{3}$$

$11 + \overline{4} \quad 5 + \overline{2} + \overline{8} \quad 5 \quad 4 + \overline{2} \quad 1 + \overline{8} \quad 1 + \overline{2} \quad 1 \quad 15$

Az összeg 1.

- ▶ A további részletek hiányoznak a papiruszról, de megadható egy lehetséges rekonstrukció.
- ▶ **Hangsúlyozzuk**, hogy ez csak egy **lehetséges** eljárás, semmi biztosat nem tudunk az eredeti gondolatmenetről.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Rekonstrukció.

- ▶ Ha a törtek közös nevezőjének a 45-öt választjuk, akkor a „számlálók” összege
- ▶

$$(11 + \overline{4}) + (5 + \overline{2} + \overline{8}) + (4 + \overline{2}) + (1 + \overline{2}) + 1 = 23 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{8}$$

- ▶ lenne.
- ▶ A 30-hoz még hiányzik $6 + \overline{8}$.
- ▶ Ezt 45-tel osztva kapjuk a $\overline{9} + \overline{40}$ kiegészítést.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Az osztás.

▶

$$\begin{array}{r} 1 \quad 45 \\ / \overline{9} \quad 5 \\ / \overline{40} \quad 1 + \overline{8} \end{array}$$

- ▶ Tehát a hányados, vagyis a kiegészítés

$$\overline{9} + \overline{40}.$$

Feladatok a Rhind-papiruszról.

Vegyük észre.

- ▶ A korabeli egyiptomi közös nevező a legkisebb tört nevezője, de a számláló így már nem értelmezhető mai módon, hiszen gyakran nem egész. Ez őket nem zavarta.
- ▶ Igazolásul még egy feladat.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A 33. feladat.
Egy mennyiséghez hozzáadva kétharmadát, felét és hetedét 37-et kapunk.

A számolás 1.

▶

1	$1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7}$	
2	$4 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28}$	$(2 \cdot \overline{7} = \overline{4} + \overline{28})$
4	$9 + \overline{6} + \overline{14}$	$(\overline{3} = \overline{2} + \overline{6})$
8	$18 + \overline{3} + \overline{7}$	
16	$36 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28}$	
	28	10 + 2
		1 + 2

- ▶ A $36 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28}$ már „nagyon közel” van a 37-hez.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A számolás 2.

- ▶ Ami hiányzik, az $\overline{3} + \overline{4} + \overline{28}$ kiegészítője 1-re.
- ▶ A kiegészítés a vörös kisegítő számokon alapul.
- ▶ A közös nevező azonban nem 28, hanem 42. Miért?
- ▶ Láttuk: a számlálóknak nem kell egészeknek lenniük, DE összegük már mindig egész.
- ▶ Ez 28-cal még nem, de 42-vel már teljesül.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A vörös számok eredete.
A szöveg alapján:

▶

1	42
$\overline{3}$	28
$\overline{2}$	21
$\overline{4}$	$10 + \overline{2}$
$\overline{28}$	$1 + \overline{2}$

- ▶ A folytatás: az összeg 40, a maradék 2.
- ▶ A 40 kisegítő számok összege, és az egység 42 „kisegítő egységet” tartalmaz, tehát 2 még hiányzik.
- ▶ E 2-t úgy kapjuk, hogy az osztót, $1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7}$ -et, kisegítő egységekben fejezzük ki.

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A számolás 3.



$\frac{1}{2}$	42
$\frac{1}{3}$	28
$\frac{1}{4}$	7
$\frac{1}{7}$	6
az összeg	97

- ▶ Azaz az osztó 97 kiegészítő egységet tartalmaz, 97-ed része egyenlő $\frac{1}{42}$ -del.
- ▶ Már csak egy kétszerezés kell, ami a táblázatból:



$\frac{97}{56 + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}}$	$\frac{42}{21}$	$\frac{1}{2}$
---	-----------------	---------------

Feladatok a Rhind-papiruszról.

A végeredmény.

$37 : (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}) = 16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$

A Moszkvai papirusz.

A 14. probléma.

Az a alapélű, b fedőélű és h magasságú csonkagúla térfogata

$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}.$