

Az Ókori Meopotámia matematikája.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. szeptember 15.-22.

A kezdetek.

Neolitikum

- Már a i.e. VIII. évezred elején is lakott volt a kellemetlen ökológiai viszonyok ellenére.
- Kevés ásványi nyersanyag, pusztító árvizek: özönvizek.
- Speciális házipítési technika, tellek (település-halmok).
- Az első városok (falvak) kultikus helyeken 7000-től:
 - ▶ Dzsarmo (Kurdisztán) kb. 150 lakos,
 - ▶ Jerico (Palesztina) kb. 2000 lakos 6000 körül,
 - ▶ Ur (Dél-Mezopotámia) kb. 34.000 (!) lakos 2800 körül.

Az itt élő népek

Az őslakók ismeretlenek.

IV.-III. évezred.

Az itt élő népek

- Az első ismert bevándorlók a **SUMEROK**.
- Nem tudjuk merről jöttek, biztosan nem tartoztak a semi-, ill. az indoeurópai népek családjába,
- városállamokat alapítottak,
- a IV. évezred végén összeolvadtak az őslakókkal.
- Megbízható régészeti (írással) források kb. 2750-től vannak, zömmel a városállamok harcairól a hegemoniáért.
- Uruk ↔ Kis, és Ur ↔ Lagas.
- 2800 körül **GILGAMES** Uruk királya falat épít városa köré.
- 2600 körül: a *Gilgames eposz*, az első irodalmi alkotás.

A III. évezred.

Részlet a Gilgamesből.

Gilgámes barátjával Enkiduval elindul, hogy hőstetteket hajtson végre. Enkidu megöli Huwawát, a cédruserdő védelmezőjét és az égi bikát, akit Innin (Istar) istennő uszított a két hősrre. Enkidunak e lázadásért halállal kell bünhődnie. Gilgámes kétségbeesetten indul útnak, hogy fölkeresse ősapját Utnapistit, és megtudja tőle a halhatatlanság titkát. Utnapisti azt tanácsolja neki, hogy 6 nap és 7 éjjel virrasszon, de Gilgámes nem állja ki a próbát, elalszik. Újabb hiábavaló próbálkozás után Gilgámes belátja, hogy a halhatatlanság az emberek számára elérhetetlen, de tettei mégis halhatatlan dicsőséget szereztek számára.

A III. évezred.

Özönvíz legendák.

- Mintegy 250 ilyen legenda ismert.
- Görögök: Zeusz bosszúja az emberi romlottság miatt.
- Maják: A gyékényen ülő bölcsek könyve.
- A „klasszikus” bibliai történet.

Fontos találmányaik.

- fazekaskorong,
- lovak használata,
- ló vontatta kerek járművek.

A III. évezred.

A III. évezred 2. fele.

- 2500-tól Ur, a kor legnagyobb lakosságú városa hegemoniája.
 - kb. 34.000 lakos ↔ I.sz. XIII. sz-i Párizs, London.
- 2400 körül Lagas a vezető hatalom, az első társadalmi reform: Urukagina a kistermelők érdekében, majd az első kísérlet egységes birodalom létrehozására.
- 2370 körül Sarrukin (Szargon) vezetésével **AKKÁD** hódítók, az első sémi nép e tájon. Átvesszik és terjesztik a sumér kultúrát.
- 2200 körül: az akkád uralom időlegesen megszűnik, „sumér másodvirágzása” Lagas vezetésével.
- Az irodalom másodvirágzása,
- az első kezdetleges helyiértékes számírás.

A II. évezred.

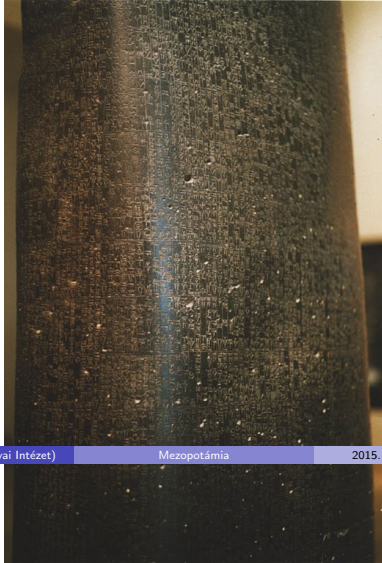
A II. évezred utolsó harmada.

- 2000 körül több hullámban újabb, nomád, hódító sémi népek jönnek: **akkádok** (ismét), **elámiak**, **amurok/amoriták**, **médek** és mások.
- Letelepdednek, újabb városokat alapítanak, köztük **BABILONT** (akkádok). Gyors „lakosságcsere”, a sumer holt nyelv lesz, az akkád válik általánosan használttá.
- A XVIII. század elején **HAMMURAPI** megalapítja az **ÓBABLONI BIRODALMAT**.
- Hammurapi törvényei, I.sz. 1801, Susa.
- Ma is érvényes és használt matematikai eredmények.

Hammurapi törvényoszlopa 1.



Hammurapi törvényoszlopa 2.



A II. évezred.

A II. évezred második felétől.

- 1600 körül a hettita hódítók megdöntik a birodalmat. Rövidesen a kassuk is jönnek, elterjesztik a lótenyésztést.
- 1500 körül alakul ki északon Föniciában az első, ékírásos ábécé, ami az eddigi szóírás helyett a betűírás kezdetét jelenti. A legrégebbi ismert ilyen szöveg kb 1250-ből való
- Ahiram bübloszi király szarkofágján olvasható.
- A XII. század elején asszír hódítók (Takulti-Ninurta).
- Takulti-apil-Ésara 1100 körül a történelem folyamán először:
 - népcsoportok áttelepítése.
- Rövidesen Damaszkusz megalapítása.

Ahiram bübloszi király szarkofágja

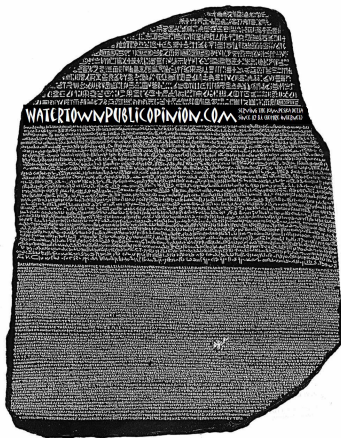


II. évezred.

Írásos emlékek.

- Az első számottevő leletegyüttes: Assurbanipal asszír uralkodó Ninive-i könyvtára.
- 1870. A Behistum kőtábla megtalálása.
- A XX. század első harmadában nagy számú matematikai tartalmú tábla került elő az ásatásokkor.

A Behistum kőtábla.



A Behistum kőtábla.

- perzsa, asszír és méd nyelven tudósít I. Dareiosz perzsa uralkodó Kambüzesz fölötti győzelméről
- A XIX. században a perzsa ismeretében megfejtették a másik kettőt, majd az asszír alapján az akkádót.

A mezopotámiai számírás.

60-as alapú helyiértékes számírást alkalmaztak. Mindössze két jelet használtak.

A számjegyek írása.

- Az 1 jele, az „ék”: 
- Nemcsak az 1-et, hanem a 60 bármely egész kitevős hatványát jelölhette.
- A 10 jele, a „sarokpánt”: 
- Ez szolgált a 60 bármely egész kitevős hatványa tízszeresének jelölésére is.

A mezopotámiai számírás.

Egy példa.



- Ha egész szám, akkor lehet például
- $1 \times 60^3 + 10 \times 60^2 + 20 \times 60 + 5 = 253.205,$
- vagy $1 \times 60^2 + 30 \times 60 + 5 = 5.405,$
- vagy akár $60 + 35 = 95$ is.

A mezopotámiai számírás.

DE ők hatvanados törtekkel is számoltak, így a lehetséges jelentések száma növekszik.

Törtek.

Néhány lehetséges jelentés:

•

$$1 + 10 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-3} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{43.200},$$

•

$$60 + \frac{35}{60} = 60\frac{7}{12}.$$

A mezopotámiai számírás.

Neugebauer és Sachs kb. 1930-tól.

- A 60-as számrendszerben megadott számok decimális jegyekkel való fölírására Neugebauer adott meg egy módszert: a 60-ados jegyeket decimálisan írjuk, és vesszővel választjuk el egymástól.
- Az akkor nem létező „hatvanados-vesszőt” pontosvesszővel jelöljük. Így az előbbi számok a következőképp írhatjuk:

•

$$\begin{aligned} 1 \times 60^3 + 10 \times 60^2 + 20 \times 60 + 5 &= 1,10,20,5 = 253.205, \\ 1 \times 60^2 + 30 \times 60 + 5 &= 1,30,5 = 5.405, \\ 1 + 10 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-3} &= 1;10,20,5 \\ &= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{43.200} \end{aligned}$$

Egyenletek megoldása.

Megvizsgálunk néhány olyan problémát, amely — mai szóhasználatlaltal — másodfokú egyenletre vezet.

1. Probléma (Szenkerek).

Hosszúság és szélesség. A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, és így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadtam a területhez, és 3,3 [-at kaptam]. Hosszúság és szélesség összeadva pedig 27. Mi a hosszúság, szélesség, terület?

Az eredmény közlése.

27	3,3	az összegek
15		a hosszúság
12		a szélesség
3,0		a terület

Másodfokú egyenletek.

Az eredeti szöveges megoldás.

- 27-et, a hosszúság és a szélesség összegét 3,3-hoz add hozzá; 3,30 [az eredmény]. 2-t a 27-hez add hozzá; 29 [az eredmény].
- 29-ből letöröd a felét; 14; 30-szor 14; 30 [az] 3,30; 15. Levonsz 3,30-at 3,30; 15-ből; 0; 15 a különbség.
- 0; 15 négyzetgyöke 0; 30. Az első 14; 30-hoz add hozzá a 0; 30-at: a hosszúság 15. 0; 30-at a második 14; 30-ból kivonsz: a szélesség 14.
- Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál, 14-ből, a szélességből levonod: 12 a végleges szélesség. A 15 hosszúságot és a 12 szélességet összeszoroztam. 15-ször 12 [az] 3,0 [ennyi a] terület.
- A 15 hosszúság a 12 szélességen mennyivel nyúlik túl? 3[-mal] haladja meg. 3-at a 3,0-hoz, a területhez adj hozzá: 3,3[-at kapsz].

Másodfokú egyenletek.

Elemzés 1.

Mai jelölésekkel: ha x a hosszúság, y a szélesség, akkor az

-

$$xy + x - y = 3,3$$

$$x + y = 27$$

egyenletrendszert kapjuk.

- A számolás második lépéséből látszik, hogy az y szélesség helyett egy új $y' = y + 2$ szélesség bevezetésével kapjuk, hogy

-

$$xy' = 3,30$$

$$x + y' = 29.$$

Másodfokú egyenletek.

Megjegyzés.

Vegyük észre, hogy — mai terminológiával — az történt, hogy

- összeadta a két egyenletet

$$(xy + x - y) + (x + y) = 3,3 + 27 = 3,30$$

$$xy + 2x = x(y + 2) = 3,30$$

$$xy' = 3,30$$

- majd második egyenletként az

$$x + y + 2 = 27 + 2 = 29$$

$$x + y' = 29$$

egyenletet tekintette.

Másodfokú egyenletek.

Elemzés 2.

Az eredeti megoldás lépései és következményei ezen egyenletrendszer alakításában.

Párhuzamos számolás 1.

$$27 + 3,3 = 3,30$$

$$2 + 27 = 29$$

$$29 : 2 = 14;30$$

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$

$$3,30;15 - 3,30 = 0;15$$

$$xy' = 3,30$$

$$x + y' = 29$$

$$\frac{x + y'}{2} = 14;30$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 = 3,30;15$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy' = 0;15$$

Másodfokú egyenletek.

Párhuzamos számolás 2.

$$\sqrt{0;15} = 0;30 \quad \sqrt{\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy'} = \frac{x - y'}{2} = 0;30$$

$$14;30 + 0;30 = 15$$

$$14;30 - 0;30 = 14$$

$$14 - 2 = 12$$

$$\frac{x + y'}{2} + \frac{x - y'}{2} = x = 15$$

$$\frac{x + y'}{2} - \frac{x - y'}{2} = y' = 14$$

$$y' - 2 = y = 12$$

Másodfokú egyenletek.

Összegzés.

Mai szimbolikával a szöveges probléma egy

-

$$\begin{aligned} xy &= P \\ x + y &= a \end{aligned}$$

- alakú egyenletrendszerre vezet.
- Ennek megoldásakor bevezettek egy új w határozatlant (a két eredeti határozatlan számtani közepétől való eltérést), amelynek révén egyhatározatlanossá vált a probléma:
- E módszer később még hivatkozunk.

Másodfokú egyenletek.

Összegzés.

-

$$x = \frac{1}{2}a + w$$

$$y = \frac{1}{2}a - w, \quad w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P}.$$

- A bemutatott számolás ezen w meghatározása
- De mit kellene ehhez tudni? Egyrészt **ismerniük kellett az alábbi azonosságokat:**
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- másrészt **tudniuk kellett négyzetgyököket vonni.**

Másodfokú egyenletek.

Összegzés.

- **Hangsúlyozni kell**, hogy formulákat kizárólag a mai olvasó könnyebbségére írtunk és írunk föl.
- **A MEZOPOTÁMIAI ÍRNOK MINDEN PROBLÉMA MEGOLDÁSÁT SZÖVEGESEN ÍRTA LE.**

Vegyünk sorba néhány további korabeli problémát, amelyek megoldása alátámasztja föltételezésünket. A problémákat zömmel csak mai szimbolikával fogjuk tárgyalni.

Másodfokú egyenletek.

VAT 6598.

Megoldandó az

-

$$\begin{aligned} xy &= P \\ x - y &= d \end{aligned}$$

egyenletrendszer.

Megoldás.

- Most a határozatlanok számtani közepére vezettek be új határozatlant, mi w -vel jelöljük.

-

$$x = w + \frac{d}{2}, \quad y = w - \frac{d}{2}, \quad \text{ahol } w = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + P}.$$

Másodfokú egyenletek.

Az előbbi két feladat megoldási módszere szerepel I. sz. 250 körül élt alexandriai Diophantos Arithmetikájában, mint az **összeg és különbség módszere**.

További problémák: BM 13901.

- 8. Probléma: Megoldandó az

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= S = 21, 40 \\ x + y &= a = 50\end{aligned}$$

egyenletrendszer.

- A számolás az mutatja, hogy a második egyenlet négyzetéből kivonták az első egyenletet, és ezzel ugyanolyan egyenletrendszert kaptak, mint az első problémában szereplő, és a

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/8.

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \\ x &= \frac{a}{2} + w, \\ y &= \frac{a}{2} - w,\end{aligned}$$

formulák által leírt úton haladtak.

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/9.

A második egyenlet most $x - y = d = 10$ alakú, s a megoldás az előbbiekhöz hasonlóan az

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}, \\ x &= w + \frac{d}{2}, \\ y &= w - \frac{d}{2}.\end{aligned}$$

formulákkal adható meg.

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/2.

Kivontam a négyzetet a területéből és az 14, 30.

Az eredeti megoldás.

- Vedd az 1-et [az együtthatót] és osszd két részre.
- A 0; 30-at szorozd önmagával, az 0; 15.
- Ezt add hozzá a 14, 30-hoz.
- A 14, 30; 15 [négyzet]gyöke 29; 30.
- Ezt add hozzá a 0; 30-hoz, amit önmagával szoroztál.
- Ez 30, ami a négyzet [oldala].

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/2. Elemzés.

- A probléma az $x^2 - x = 14,30$ egyenlet, egy $x^2 - ax = b$ alakú egyenlet, megoldását kívánja.
- Látható, a bal oldalt teljes négyzetté alakították (az említett azonosság alkalmazásával), és
- a ma „mérlegelvnek” nevezett módszert alkalmazták.
- Az utóbbi első alkalmazását az 1930-as évekig az I.sz. VIII. században élt bagdadi al-Khwarizminek tulajdonították.

A számolás eredménye.

Az $x^2 - ax = b$ alakú egyenlet megoldása:

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b}$$

Másodfokú egyenletek.

BM 13901/7.

A négyzet hétszereséhez hozzáadtam a terület tizenegyszeresét és ez 6; 15.

A megoldás elve.

- A

$$11x^2 + 7x = 6; 15$$

egyenletet kell megoldanunk.

- Ismét négyzetté alakították az egyenlet bal oldalát, de
- ehhez előbb 11-gyel megszorozták az egyenlet, azaz a

$$2, 1x^2 + 1, 17x = 1, 8; 45$$

egyenlettel dolgoztak.

Másodfokú egyenletek.

A megoldás mai jelölésekkel.

- A megoldandó egyenlet

$$ax^2 + bx = c$$

alakú.

- Átalakítás után kaphatta, hogy

$$a^2x^2 + abx = ac$$

- Számolásuk az

$$x = \frac{1}{a} \left(\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \right)$$

formulával írható le.

Észrevétel.

- Az előbbi két megoldás azt tanúsítja, hogy tulajdonképpen ismerték a „másodfokú egyenletek gyökképletét”, hiszen aszerint számoltak.
- Világos azonban, hogy NEM a KÉPLETET ismerték, hanem azt az eljárást, amivel az megkapható.

Másodfokú egyenletrendszerek.

Még három feladat módszereik erejének demonstrálására.

BM 13901/14.

Két négyzetem területét összeadtam, [az] 25,25. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.

A megoldás 1.

- Ha x, y jelöli a két négyzet oldalát, akkor az
-

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25,25 \\ y &= 0;40x + 5\end{aligned}$$

- egyenletrendszert kell megoldani.

Másodfokú egyenletrendszerek.

- A második egyenletből y -t az elsőbe helyettesítve,

$$a_1x^2 + a_2x = a_3$$

alakú másodfokú egyenletet kapunk.

- DE, e módszer — a behelyettesítés — bevezetését szintén al-Khwarizminek tulajdonították.

Másodfokú egyenletrendszerek.

A megoldás 2.

- Az agyagtáblán található számolás ezt a vélekedést is cáfolja, ugyanis a következőképp számoltak:
-

$$\begin{aligned}1 + 0;40 \cdot 0;40 &= 1;26,40, \\ 5 \cdot 0;40 &= 3;20, \\ 25,25 - 5 \cdot 5 &= 25,0\end{aligned}$$

- Ez pedig nem más, mint azon egyenlet együtthatói kiszámítása, amit az említett behelyettesítéssel kapunk, azaz

$$x^2 + (0;40x + 5)^2 = 25,25.$$

Másodfokú egyenletrendszerek.

A megoldás 3.

- Rendezve

$$(1 + 0;40^2)x^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0;40x = 25,25 - 5^2 = 25,0.$$

- Ezen egyenlet megoldását az alábbi számolásokkal végezték el:
-

$$\begin{aligned}1;26,40 \cdot 25,0 &= 36,6;40, \\ 3;20 \cdot 3;20 &= 11;6,40, \\ 36,6;40 - 11;6,40 &= 36,17;46,40.\end{aligned}$$

- Ezután megadták a 36,17;46,40 négyzetgyökét, ami 46;40, majd így folytatták.

Másodfokú egyenletrendszerek.

A megoldás 4. (eredeti)

- A gyöknek és annak, amit önmagával szoroztál a különbsége 43; 40.
- Ha ezt megszorod 1; 26, 40 reciprokával, megkapod az egyik négyzetet [a négyzet oldalát], ami 30. A másik négyzet [oldala] pedig 25.

Megjegyzés.

Hasznos lehet az érdeklődők számára a reciprok meghatározása hatvanados tört alakban, mi nem részletezzük. Az azonban világos, hogy korrekt megoldást kaptak.

Másodfokú egyenletrendszerek.

Elemzés.

- Világos, hogy a behelyettesítés után kapott

$$ax^2 + 2bx = c$$

alakú egyenletet előbb a -val megszorozták,

- olyan lépések, amelyek első alkalmazását al-Khwarizminek szokás tulajdonítani,
- majd az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították,

$$(ax + b)^2 = ac + b^2.$$

- ezután gyökvonással kapták a megoldást:

$$x = \frac{\sqrt{ac + b^2} - b}{a}.$$

Tanulságok.

- Az Óbabiloni Birodalom írnokai ismerték az összeg és a különbség négyzetére vonatkozó azonosságokat.
- Ismereték már az al Khwarizminek tulajdonított al-muqabala és al-jabr módszert.
- Minden olyan (pozitív együtthatós) másodfokú egyenletet meg tudtak oldani, amelyeknek volt pozitív gyöke (két pozitív gyök esetén csak a nagyobbikat adták meg).
- Így az egyenletek 3 típusával kellett foglalkozniuk:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 + q = px$$

Egy megmaradt kérdés.

Hogyan számolták ki (pozitív) számok négyzetgyökét?

A Yale Egyetem gyűjteményének YBC 7289-es agyagtábláján szerepel a $\sqrt{2}$ kiszámítása 3 hatvanados tört helyiértékre:

1; 24, 51, 10.

- E szám decimálisan közelítőleg $1,41421\overline{296}$, ami csak kb. $6 \cdot 10^{-7}$ -nel tér el a helyes értéktől.
- Ezt a pontosságot a reneszánsz kor vége felé tudták újra elérni az európai, valamint az iszlám matematikusok.

A mezopotámiai algebra.

Iterációs eljárásuk.

$\sqrt{a}$ -t akarjuk meghatározni.

- 1. lépés: Válasszunk egy a_1 közelítést,
- a második legyen a $b_1 = \frac{a}{a_1}$. $\sqrt{a}$ a két érték között van.
- 2 lépés: Legyen $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, és $b_2 = \frac{a}{a_2}$.
- Világos, hogy

$$\sqrt{a} \quad a_2 \quad \text{és} \quad b_2 \quad \text{között van,}$$

valamint

$$|a_1 - b_1| > |a_2 - b_2|$$

- Az eljárást a kívánt pontosság eléréséig kell folytatni, de hány lépés kell.

A mezopotámiai algebra.

Konvergencia.

Az eljárás nyilván konvergens, gyorsaságát mutatja, hogy ha $\sqrt{2}$ értékét az előbbi módon az $a_1 = 1$ kezdő értékkel számoljuk, akkor az a_5 értéke megegyezik azzal a számmal amit a mai általánosan használt zsebkalculatorok szolgáltatnak. A pontosság kb. $6 \cdot 10^{-7}$.

Utóélet.

Ezen algoritmust a későbbi korok számos tudósna tulajdonították. Olvashatunk róla úgy, mint a l.e. 426-365 között élt tarrentumi Archytas (az „utolsó nagy pitagoreus”), a l.sz. 100 körül élt alexandriai Heron eljárása, de úgy is, mint Newton algoritmusa.

Az YBC 7289-es tábla száma.

- A szereplő érték egyszerűen és gyorsan megkapható ezen eljárással.
- Legyen $a_1 = 1; 30$, ekkor $b_1 = 1; 20$.
- $a_2 = 0; 30(1; 30 + 1; 20) = 0; 30 \cdot 2; 50 = 1; 25$,
- $b_2 = \frac{2}{1; 25} = 1; 24, 42, 21$.
- Folytatva:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0; 30(1; 25 + 1; 24, 42, 21) = 0; 30 \cdot 2; 49, 42, 21 \\ &= 1; 24, 51, 10, 30. \end{aligned}$$

- Ebből az utolsó jegyet elhagyva, vagy a 21 felét egyszerűen 10-nek véve, adódik a tábla 1; 24, 51, 10-es értéke.

Még egy gyökvonási eljárás.

- Számos feladatban alkalmazták a

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

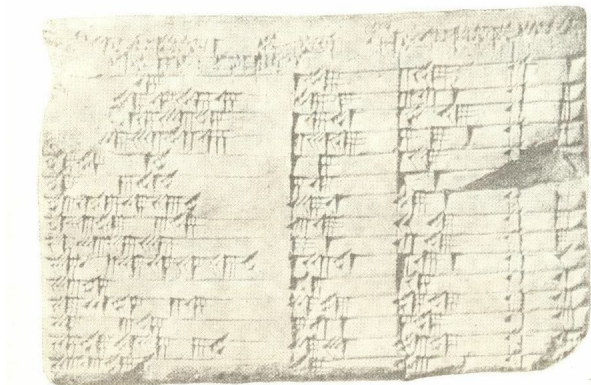
közelítést.

- Ez első látásra (mai szemmel!) a binomiális sorral való — két tagot figyelembe vevő — közelítés, de ők ezt nyilván nem tudták alkalmazni.
- Azonnal adódik azonban az előbbi eljárásból: legyen $a_1 = a$, és az a_2 -t kell meghatározni mindössze:

$$\begin{aligned} a_1 &= a & b_1 &= \frac{a^2 + b}{a} = a + \frac{b}{a} \\ a_2 &= \frac{a + (a + \frac{b}{a})}{2} = a + \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

- Ezen egyszerű közelítést még ma is használjuk.

A Plimpton 322. agyagtábla.



Plimpton 322 Neugebauer átírásában

I	II(= b)	III(= d)	IV
[1, 59, 0,]15	1, 59	2, 49	1
[1, 56, 56,]58, 14, 50, 6, 15	56, 7	3, 12, 1	2
[1, 55, 7,]41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1, 50, 49	3
[1,]5[3, 1,]0, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	4
[1,]48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
[1,]47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
[1,]43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
[1,]41, 33, 59, 3, 45	13, 19	20, 49	8
[1,]38, 33, 36, 36	9, 1	12, 49	9
1, 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
1, 33, 45	45	1, 15	11
1, 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
[1,]27, 0, 3, 45	7, 12, 1	4, 49	13
1, 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 31	53, 49	14
[1,]23, 13, 46, 40	56	53	15

A Plimpton 322 agyagtábla.

Neugebauer elemzése 1.

- A II. és a III. oszlopban álló b, d számok ún **pitagoraszi számok**, ugyanis

$$d^2 = l^2 + b^2,$$

- Az l szám ugyan nem található meg a (jelenlegi) táblázaton, de könnyen kiszámítható b és d ismeretében.
- Vélhetően egy időközben letörött (és vissza nem ragasztott) oszlopban szerepeltek.
- Itt a Pitagorasz-tétel?**,
- sőt **itt kezdődött a pitagoraszi-számhármasok vizsgálata?**

A Plimpton 322 agyagtábla.

Az előbbi / értékek.

sor	/	sor	/	sor	/
1	2, 0	6	6, 0	11	1, 0
2	57, 36	7	45, 0	12	40, 0
3	1, 20, 0	8	16, 0	13	4, 0
4	3, 45, 0	9	10, 0	14	45, 0
5	1, 12	10	1, 48, 0	15	1, 30

Három megválaszolandó kérdés.

- Milyen elv szerint rendezték el a számhármasokat?
- Hogyan számolták ki a táblázaton szereplő számokat? Hogyan határoztak meg olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám?
- Milyen „szinten”, milyen „mélységben” ismerték a Pitagorasz-tételt?

A válaszok.

1. Kérdés.

- Az első sorból

$$\frac{b}{l} = \frac{1,59}{2,0} = 0;59,30 \approx 1$$

- azaz a háromszög egyenlőszárú, egy négyzet fele.
- Egyszerűen kapható, hogy a 15. sornak megfelelő derékszögű háromszög két hegyesszöge közelítőleg 30° és 60° .
- A közbülső értékek pedig olyanok, hogy az I. oszlopbeli $\frac{d^2}{l^2}$ értékek közelítőleg lineárisan csökkennek, ami még inkább teljesül a $\frac{d}{l}$ értékekre.

3. Kérdés.

A válasz egyszerű: empirikus eredményként.

A válaszok.

2. Kérdés.

- Ennek megválaszolása messze vezetne, nem részletezzük.
- Egy másik előadásban az érdeklődők részletes választ kaphaznak rá.
- Csak annyit, hogy egyenletmegoldási módszereiket kell alkalmazni.