

A kora középkori iszlám kultúrák matematikája.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. október 27.

Történelmi mérföldkövek

Az iszlám kialakulása 1.

- Az Arab félsziget nagy részén a sémi népekhez tartozó nomád (beduin) törzsek éltek az I.sz. I. évezred kezdetén (őseik közel 2000 éve). Politeisták, minden törzsnek „saját” istenei voltak.
- A VII. sz. elején **Mohamed** gazdag mekkai kereskedő új monoteista vallást alapít — az **iszlámot** —, a zsidó és a keresztény hagyományokra építve.
- A „iszlám” szó jelentése: **ODAADÁS**, azaz a hívőknek Allah iránti odaadása.
- 622-ben menekülni kényszerül: **HIDZSRA**, Medinába fut. Az iszlám időszámítás kezdete.
- Létrehozza az az iszlámot magukévá tevő arab törzsek szövetségét. Mohamedet **ALLAH PRÓFÉTÁJÁVÁ** nyilvánítják.

Történelmi mérföldkövek

Az iszlám kialakulása 2.

- 630-ban seregek élén visszatért Mekkába, az ott uralkodó pogány Kába-kultuszt beolvasztja az iszlámba, szent helyé nyilvánítja.
- A mai napig Mekkába, a Kába-kőhöz zarándokolnak a hívek.
- Mohamed 632-ben meghalt.
- A Próféta (Mohamed) utódai a **KALIFÁK**, az első, Abu Bekr. Utóda **OMAR** (634-640) megindítja a hódító (szent) háborúkat, a **DZSIHÁDOT** a „hitetlenek” ellen minden irányba.
- Cél: az iszlám terjesztése.
- A más vallásúakat, a **hitetleneket** üldözték, de
- jó ideig kivétel tettek a zsidókkal és a keresztényekkel.

Történelmi mérföldkövek

Hódító háborúk, kalifátusok 1.

- A hódításokat segítette a bizánci uralkodókkal szembeni általános ellenszenv.
- A korábbi rabszolgatartó társadalom széthullott, kialakult a keleti típusú feudalizmus. Öntözéses földművelés.
- Kialakult a „városi kultúra”: építészet, kézműipar, kereskedelem. A birtokadományozások miatt fokozatosan gyöngült a központi hatalom.
- Gyorsan átvették a meghódított területek magasabb szintű kultúráját, kezdetben igen türelmesek voltak még vallási téren is. Hispánia példája.

Történelmi mérföldkövek

Hódító háborúk, kalifátusok 2.

- 637-ben Szíria, 638 Jeruzsálem, 640-42 Egyiptom, 641 Perzsia.
- A 3. kalifa, **OSZMÁN** (644-656) hódításai: Ciprus, Rhodosz, Örményország. Megindult az „arabizálás”, kivétel Perzsia. A főváros Damaszkusz.
- Súlyos belharcok: Oszmán kalifát **Ali**, a későbbi 4. kalifa meggyilkoltatta. Ez a háború azóta is tart Ali hívei a **síiták** és Oszmán hívei a **szunniták** között.
- Alapvető ellentétük: ki a legfőbb vallási vezető? Ali utódai az **imámok** (síiták), vagy a **kalifa** (szunniták)

Történelmi mérföldkövek

Hódító háborúk, kalifátusok 3.

- 661-ben meggyilkolták Alit, és Oszmán utódai az **OMAJJADOK** jutnak uralomra. 680-ban megölik Ali egyik fiát, **végleges szakítás** a síita kisebbség és a szunnita többség között.
- 697 Karthago, 709-ben elérik az Atlanti óceánt, 711-ben a nyugati gótok legyőzésével a Pireneusi félszigetet is meghódítják.
- dzsabal al Tarik, azaz Tárik ibn Zijád hadvezér sziklája ⇒ Gibraltár.
- 705-15, **I. VALID** alatt a legnagyobb a birodalom, az Aral tótól és az Indus völgyétől a Pireneusokig.
- 732: vereség Poitiersnél (Martell Károly), vége az európai előnyomulásnak.
- 750-ben **ABU'L-ABBÁSZ** megdönti az Omajjad kalifátust, megalapítja az **ABBASZIDÁK** dinasztiáját (750-1258).

A tudományok fölvirágzása.

Bagdad, mint az új tudományos központ.

- **AL-MANSZÚR** (a 2. abbaszida kalifa) 762-ben Bagdadba teszi át a birodalom székhelyét.
- Utódai, **AL-MAHDI**, **HÁRUN-AR-RASID** és **AL-MAMUN** alatt a bagdadi kalifátus évszázados „**aranykora**” kezdődik, az arab (iszlám) irodalom, építészet és tudomány fölvirágzása.
- **MANSZUR** (754-775), **HÁRUN AR-RASÍD** (786-809), **AL-MAMUN** (813-833) idején — alexandriai mintára — létrejött a **Bölcseiségek Háza**. 830-ban lett teljesen kész.
- Otthont adott tudósoknak, egy könyvtárnak. Mellette fordítók és könyvmásolók hada dolgozott.

A tudományok fölvirágzása.

Bagdad, mint az új tudományos központ.

- Összegyűjtötték az Akadémia 529-es bezárása (II. Jusztiniánusz) után keletre menekült tudósok tanítványait, akik nagy számú görög művet hoztak magukkal. Ezeket sorra arabra fordították.
- Nekik köszönhető igen sok ókori görög mű fennmaradása autentikus arab fordításban (az eredetiek általában már nem fellelhetők).
- A kezdet legismertebb tudósai: **AL-HVÁRIZMI**, **AL-FERGANI**, **AL-KINDI**.

A tudományok fölvirágzása.

Bagdad, mint az új tudományos központ.

Néhány legenda:

- A horezmi kultúra,
- az alexandriai könyvtár elpusztítása,
- DE mind a horezmi, mind az alexandriai kultúra hanyatló korban volt,
- a tudósok délre, ill. keletre menekültek, a könyveket/műszereket is magukkal vitték.

A korai iszlám kultúrkör matematikája.

Az első időszak híres matematikusai.

- Abu Abdallah Muhammad ibn Músza **al-Hvárizmi** al-Mándzsúsi (780-850) algebrai értekezése.
- **Abu Kámil** Sudzsa ibn Muhammad al-Hászib al-Miszri (egyiptomi születésű, X. sz.) algebrai munkái, amelyek XV. századi itáliai héber fordításban maradtak fenn.
- **Szabit ibn Kurra** al-Harrani (Thabit Qurra) (IX. sz.) algebraja és számelmélete.
- Abul-Fath **Umar** ibn Ibrahim al-**Hajjam**, azaz **OMAR KHAJJAM** perzsa matematikus, csillagász és költő: harmadfokú egyenletek geometriai kezelése, naptárreform.

A korai iszlám kultúrkör matematikája.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

- Eredeti címe (röviden): Al-kitáb al-muktaszir fi-hiszáb al-dzsabr val-mukábala, azaz Rövid könyv a dzsabr és a mukábala számolásról. Megtévesztő, mert a könyvnek csak egy kisebb része foglalkozik ezzel.
- A legnagyobb rész a hagyatéknek az iszlám örökösödési jog szerinti fölosztásával foglalkozik.
- A fennmaradt legteljesebb és leginkább autentikus arab kéziratát Oxfordban őrzik, ez 1362-ben készült.
- A két alapvető és sokáig újnak hitt módszere:
- **al-jabr** = kiegészít, visszaad, helyreállít (csontkovács!),
- matematikailag a **mérlegelv** alkalmazása.
- **al-muqabala** = egyszerűsítés, összevonás,
- matematikailag: **az egyenmű tagok összevonása** az egyenlet azonos oldalán.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

Egy illusztráló feladat.

- A 10-et két részre osztottam. Az egyiket megszoroztam a másikkal. Ezután az egyiket megszoroztam önmagával, s az a szorzat, amelyben az egyiket önmagával szoroztam négyszer akkora mint a két rész szorzata.
- A szöveges megoldás szóhasználata:
- *dolog* és *tíz mínusz dolog* a két mennyiség, a négyzet pedig *bőség*, a két rész szorzata: *tíz dolog mínusz a bőség*.
- Mai jelölésekkel: megoldandó a

$$4x(10 - x) = x^2$$

egyenlet.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

A szöveg szerinti megoldás lépései.

$$\begin{aligned}
 4x(10 - x) &= x^2 \\
 40x - 4x^2 &= x^2 \\
 40x &= x^2 + 4x^2 \\
 40x &= 5x^2 \\
 x^2 &= 8x \\
 x &= 8.
 \end{aligned}$$

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

A tárgyalta egyenlet-típusok.

$$\begin{aligned}
 ax^2 &= bx & (1) \\
 ax^2 &= b & (2) \\
 ax &= b & (3) \\
 ax^2 + bx &= c & (4) \\
 ax^2 + c &= bx & (5) \\
 ax^2 &= bx + c. & (6)
 \end{aligned}$$

Természetesen minden együttható pozitív.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

Számírásuk

- Hindu tradíciók alapján 10-es helyiértékes számrendszerük volt.
- Átvették a számjegyek írását is, lényegében náluk alakult ki a mai is használt kalligrafika.
- Átvették a számjegy hiányának jelölését is,
- al-Hvarizmi alkalmazta először a mai zéróra emlékeztető jelet:
- ... a hiányzó számjegy helyére írjal köröcskét.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

Egy (4) típusú feladat.

Egy négyzet és tíz gyöke ugyanazon mennyiségnek harminckilenc dirhem, azaz mi legyen az a négyzet, amelyet saját gyökének tízszeresével növelve harminckilenc?

Az eredeti szöveges megoldás.

- Megfelezed a gyökök számát, amely most ötöt ad. Ezt megszorozd önmagával; a szorzat huszonöt.
- Add ezt hozzá a harminckilenchez; az összeg hatvannégy. Vedd most ennek gyökét, ami nyolc, vond ki belőle a gyök felét, ami most öt.
- A maradék három. Ez a gyöke a keresett négyzetnek; a négyzet maga kilenc.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

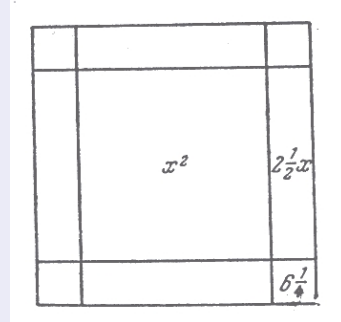
- Mai szimbolikával, majd szóvegesen a megoldás geometriai indoklása.
-

$$\begin{aligned}
 x^2 + 10x &= 39 \\
 x^2 + 10x + 25 &= 39 + 25 \\
 (x + 5)^2 &= 39 + 25 = 64 \\
 x + 5 &= \sqrt{64} = 8 \\
 x &= 8 - 5 = 3
 \end{aligned}$$

- Rajzoljunk egy négyzetet, és mindegyik oldalához illesszünk egy-egy $\frac{10}{4}$ magasságú téglalapot.
- Egészítsük ki négyzetté, ami négy $\frac{10}{4}$ oldalú négyzet hozzávételét jelenti.
- A kapott négyzet területe $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$.
- Ennek oldala 8 hosszúságú, így a „belső négyzet” oldala $8 - 2 \cdot \frac{10}{4} = 3$.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

Az ábra.



al-Hvárizmi algebrai értekezése.

Megoldás mai jelölésekkel.

- Megoldandó egy $x^2 + px = q$ alakú egyenlet.
- A szóveges megoldás mai formulákba öltve:
-

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)x + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 &= q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2, \\
 \left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 &= q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2, \\
 x + 2 \cdot \frac{p}{4} &= \sqrt{q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2}, \\
 x &= \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.
 \end{aligned}$$

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

Egy (5) típusú egyenletre vezető feladat.

- A szóveges probléma az

$$x^2 + 21 = 10x$$

egyenletre megoldását kéri.

- **Megjegyzés.** Egy ilyen típusú egyenletnek két pozitív gyöke is lehet.
- al-Hvárizmi itt meg is adta mindkettőt.

al-Hvárizmi algebrai értekezése.

A szöveges megoldás.

- Felezd meg a gyököt, ez öt lesz, és szorozd meg önmagával,
- lesz huszonöt, és vonj le belőle huszonegyet, amennyivel a négyzet ki van bővítve, marad négy,
- vonj ebből gyököt, ez kettő lesz, és vond ki ezt a gyök feléből, azaz ötből, marad három;
- és ez lesz a négyzet gyöke, amelyet keresel, a négyzet pedig kilenc.
- Ha pedig akarod, add ezt (a kettőt!) a gyökök feléhez, ez hét lesz,
- és ez a négyzet gyöke, amelyet keresel, a négyzet pedig negyvenkilenc.

Megjegyzés.

A matematika deduktív tárgyalása valamikor Diophantos idején fokozatosan visszaszorul, újra teret nyer az empirikusság. Al-Hvárizmivel kezdődően az iszlám matematikusok egy lépést tesznek a deduktivitás felé: még nem jönnek elő szigorú bizonyítások, DE valamiféle „indoklásokat”, főleg geometriaiakat, vezetnek be.

Abu Kamil egy feladata.

Osszuk föl a tízet két részre úgy, hogy a részek hányadosai összege önmagával szorozva öt.

Mai jelölésekkel.

Ha a két rész x és $10 - x$, akkor megoldandó az

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}$$

egyenlet.

Abu Kamil egy feladata.

Megoldás 1: al-Hvárizmi eljárását követve.

- 1 Mindkét oldalt szorozzuk meg a két nevező szorzatával:

$$(2 + \sqrt{5})x^2 + 100 = (20 + \sqrt{500})x,$$

- 2 szorozzuk meg a két oldalt $\sqrt{5} - 2$ -vel (!!!)

$$x^2 + \sqrt{50000} - 200 = 10x,$$

- 3 amiből már kapjuk, hogy

$$x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50000}}.$$

Abu Kamil egy feladata.

Megoldás 2: Abu-Kamil egy ötlete.

- A végeredmény nyilván nem tetszett neki ezért újabb módszert keresett: „dolognak” azaz a határozatlannak most a két rész hányadosát tekintette:
- ami mai jelöléssel $\frac{10-x}{x} = y$.
- Így megoldandó az $y^2 + 1 = \sqrt{5}y$ egyenlet, ami egyszerűbb alakú.
- Ennek megoldása

$$y = \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

- Ebből x -re az $x^2 + 10x = 100$ egyenlet adódik, amit könnyű megoldani (al-Hvárizmi):
- $x = \sqrt{125} - 5$.

Harmadfokú egyenletek.

Ókori előzmények.

- Mezopotámiában a I. e. XVIII. századtól speciális alakú harmadfokú egyenletekre vezető feladatok is voltak, pl.

•

$$\begin{aligned}x^2(x+1) &= A \\ x^3 &= B.\end{aligned}$$

- A megoldásokat speciális táblázatokból olvasták le.

Islám.

A bagdadi iskola matematikusai csak másodfokú egyenletekre vezető problémákat tárgyaltak.

Harmadfokú egyenletek.

Új tudományos központok.

- Bagdad csak a X. század végéig volt a legfőbb tudományos központ.
- A XI. - XII. századtól fokozatosan egyre északabbra kerültek a tudományos központok, először a mai Irán területére.
- Az utolsó jelentős olyan iszlám tudományos központok, amelyek színvonala meghaladta a korabeli európaiakat, a mai Üzbegisztán területén voltak: Szamarkand és Buchara (XV. sz.).

Omar Khajjam

- Majdnem teljes neve: **GHIJJASZU-D-DIN ABU-L-FATH OMAR IBN IBRAHIM AL-KHAJJAM**, 1048 körül született Nisapur (Khorasszan) városában.

Harmadfokú egyenletek.

Omar Khajjam

- 1074-ig sokfelé járt, sok helyen tanult sokféle tudományt: az irodalomtól a csillagászatot át a matematikáig.
- 1074-ben Maliksáh szultán udvarában fontos tisztséget és feladatokat kapott.
- Matematikai traktátusokat (A jabr és a mukabala számítások bizonyítása, Kommentárok Euklidesz műveihez, stb.)
- Csillagászati táblázatokat készített egy bevezetendő naptárrendszerhez, és a javaslatát el is készítette a 80-as évek végére. Obszervatóriumot vezetett.
- A kor legnagyobb perzsa költője is volt: Rubáijjátok (kb. száz gyönyörű négysoros vers a élet szépségéről).
- A szultán erőszakos halála után kegyvesztett lett, elhagyatottan halt meg 1131 körül.

Omar Khajjam a költő.

V.

A rózsás Irám bizony elveszett.
S Dsemshyd hétgyűrűs Kelyhe hova lett?
Mindegy, ma is rubint-láng a Bor, és
Virág tömi a parti Kerteket.

XII.

Egy jó Verskötet a Pálmák alatt,
s Kenyér, kancsó Bor, és ha kobzodat
megzendíted itt a Vadonban, — óh
Paradicsom rögtön Sivatag!

XIV.

Nézd, hogy nevet a nyíló Rózsa rád!
„Sietek élni” — mondja — „szép Világ,
mert selyem erszényem fölhasad és
a kert Sarába ölti Aranyát!”

Omar Khajjam a költő.

LV.

Barátaim, jókedvem van nagyon,
egész Házam megint Lakodalom:
elhagytam az Észt, a meddő Banyát,
s a Szőlő Lánya az új Asszonyom.

LVIII.

Az esti Kocsma-Kapunál, ahol
ültem, nemrég egy sugárzó, komoly
Angyal jött; vállán Korsó; fogta és
felém nyújtotta. S mi volt benne? — Bor.

LVII.

„Sokat számoltál, s így lett végre jobb Naptárod, Éveid?” — kérdik, — Ah dehogy! csak töröltem a meg-nem-született Holnapot és a halott Tegnapot.

Harmadfokú egyenletek.

Omar Khajjam egyik legszebb eredménye.

- A következő problémára (és több hasonlóra) szellemes és korrekt geometriai megoldást adott.
- *Egy köb meg egy oldal és valamely szám együtt egyenlő egy négyzettel.*
- A következő geometriai problémát kell megoldani: Adott egy egységnyi szakasz, továbbá az a, b, c szakaszok. Konstruáljunk meg egy olyan x szakaszt, amelyre

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2.$$

- Az egyenlet együtthatóinak alakja a görögök által bevezetett ún. *homogenitás elvére* utal, mely szerint egy hosszúság csak hosszúsággal, egy terület csak egy területtel, s egy térfogat csak egy másik térfogattal adható össze.

Omar megoldása 1.

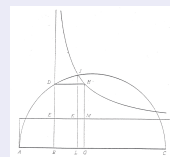
Előkészületek.

A konstrukció alapja a párhuzamos szelők tétele.

- 1 Keressünk egy olyan z szakaszt, amelyre $b : a = a : z$.
- 2 Határozzunk meg egy olyan m szakaszt, amelyre $b : z = a : m$.
- 3 Világos, hogy $m = a^3/b^2$.

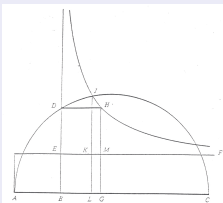
A szerkesztés.

A megszerkesztendő alakzat a következő:



Omar megoldása 2.

Ábra.

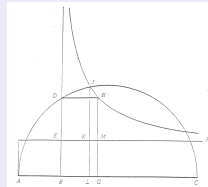


Szerkesztés 1.

1. Vegyük föl az $AB = m = a^3/b^2$ és a $BC = c$ szakaszokat egymás után.
2. Rajzoljunk egy félkört az AC szakasz mint átmérő fölé, és állítsunk rá merőlegest B -ben. Ez a félkört D -ben metszi.

Omar megoldása 3.

Ábra.

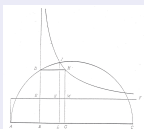


Szerkesztés 2.

3. A BD szakaszra mérjük föl a $BE = b$ távolságot, s húzzunk E -n keresztül egy EF párhuzamost az AC egyenessel.
4. A BC szakaszon szerkesszük meg azt a G pontot, amelyre $ED : BE = AB : BG$ (ismét a párhuzamos szelők tétele), majd rajzoljuk meg a $DBGH$ téglalapot.

Omar megoldása 4.

Ábra.

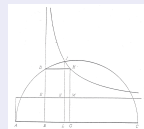


Szerkesztés 3.

5. A H ponton át rajzoljunk egy olyan derékszögű hiperbolát (egyenlete $xy = \text{const.}$), amelynek aszimptotái az EF és ED egyenesek. Messe a hiperbola a félkört J -ben.
6. Húzzunk J -n keresztül párhuzamost DE -vel, s messe ez EF -et K -ban, BC -t L -ben. Messe a GH az EF -et M -ben.
7. Állítsuk, hogy BL a keresett x hosszúságú szakasz.

Omar megoldása 5.

Ábra.



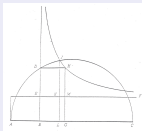
A bizonyítás 1.

1. Mivel J, H a hiperbola pontjai, $(EK)(KJ) = (EM)(MH)$.
2. $ED : BE = AB : BG$ maga után vonja, hogy $(BG)(ED) = (BE)(AB)$.
3. Az előző két egyenlőségéből:

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) = (BG)(ED) = (BE)(AB).$$

Omar megoldása 6.

Ábra.

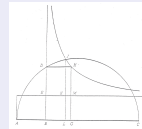


A bizonyítás 2.

4. Mivel $(BL)(LJ) = (EK)(BE + KJ) = (EK)(BE) + (EK)(KJ) = (EK)(BE) + (AB)(BE)$
5. a 3. pont alapján $= (BE)(EK + AB) = (BE)(AL)$,
6. és így kapjuk, hogy $(BL)^2(LJ)^2 = (BE)^2(AL)^2$.
7. A magasságtétel alkalmazva $(LJ)^2 = (AL)(LC)$.

Omar megoldása 7.

Ábra.



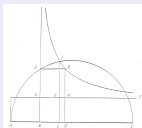
A bizonyítás 3.

8. Az előző két pont alapján $(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$, vagyis $(BE)^2(BL + AB) = (BL)^2(BC - BL)$.
9. Beírva a $BE = b$, $AB = a^3/b^2$, $BC = c$ értékeket az előző egyenlőségből

$$b^2(BL + a^3/b^2) = (BL)^2(c - BL).$$

Omar megoldása 8.

Ábra.



A bizonyítás 4.

10. Rendezve az utóbbi egyenletet

$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2$$

adódik,

11. tehát a $BL = x$ valóban megoldása a harmadfokú egyenletnek.

A végső tanulság.

XXVII. Rubaijjat

HALLGATTAM ÉN IS, IFJAN, ÉS SOKAT,
VITÁZÓ SZENTEKET S DOKTOROKAT:
KÖRÜLMAGYARÁZTÁK A SEMMIT IS,
DE SOSE LETTEM TŐLÜK OKOSABB.

Az ábra.

