

## A XIX. Század matematikájának főbb vonásai 1.

IGAZ-E AMI BIZONYÍTHATÓ, BIZONYÍTHATÓ-E AMI  
IGAZ.

AZ IGAZSÁG ELVESZTÉSE, MAJD KERESÉSE A XIX-XX. SZÁZADBAN.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. december 1.

## Algebra.

- 1 Megjelennek a nem-kommutatív műveletek,

- 1 mátrixok,
- 2 kvaterniók.

**Definíció.**  $Q = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ , ahol

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$xy = -yx, x \neq y, x, y \in \{i, j, k\}.$$

ferdetest (nem kommutatív test).

## A XIX. Század matematikájának főbb vonásai 2.

## Algebra

- 1  $n$  dimenziós lineáris terek.
- 2 Galois: az egyenletek megoldhatóságának vizsgálata,
  - 1 testbővítések,
  - 2 permutációcsoportok, a „helyettesítések” csoportja,
  - 3 véges testek.
- 3 A geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete.
  - 1 Gauss: a szabályos  $n$ -szög pontosan akkor szerkeszthető meg, ha  $n = 2^k p_1 \dots p_m$ , ahol  $k \geq 0$ ,  $p_1, \dots, p_m$  különböző Fermat-prímek. Ha  $m = 0$ , akkor  $k \geq 2$ .
  - 2 Minden szerkeszthető komplex szám algebrai.
- 4 A csoport absztrakt fogalma. Az első struktúratétel.
- 5 Test fölötti algebra: Frobenius lezárja a számfogalom bővítését.

## A XIX. Század matematikájának főbb vonásai 3.

## Analitikus számelmélet.

- 1 Vizsgálták a prímszámok eloszlását, empirikus becslések.
- 2 Legyen  $\pi(x) = k$ , ha az  $x \in \mathbb{R}$ -nél nem nagyobb prímszámok száma  $k$ .
  - 1 Gauss sejtése:  $\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$ ,
  - 2 Csebisev tétele (1854): léteznek olyan  $a, b$  pozitív konstansok, hogy

$$a \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq b \frac{x}{\log x}.$$

minden elég nagy  $x \in \mathbb{R}$ -re

- 1 Hadamard és de la Vallée-Poussin (1896): a „Nagy Prímszámtétel”.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 0$$

## A XIX. Század matematikájának főbb vonásai 4.

## Analitikus számelmélet.

- ❶ Létezik transzcendens szám, azaz olyan komplex szám, amely nem lehet gyöke egyetlen nemzéró  $f \in \mathbb{Q}[x]$  polinomnak sem.
- ❷ Euler sejtése:  $e, \pi$ , valamint a logaritmus- és a trigonometrikus függvények értékei a legtöbb helyen transzcendensek.
- ❸ Liouville (1844): a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

szám transzcendens.

- ❹ Hermite (1873): Az  $e$  szám transzcendens.
- ❺ Lindemann (1882): A  $\pi$  szám transzcendens.
- ❻ Következmény: A „körnégyszögesítés” problémája nem oldható meg.
- ❼ Nyitott kérdés, hogy  $e + \pi$  algebrai, vagy transzcendens, míg az  $e + i\pi$  esete triviális.

## A XIX. Század matematikájának főbb vonásai 5.

## Geometria.

- ❶ Fölfedezik a nem-euklideszi geometriákat:
  - ❶ hiperbolikus geometria: Bolyai és Lobacsevszkij,
  - ❷ elliptikus geometriák és egységes elmélet: B. Riemann.
- ❷ Megjelenik az ábrázoló geometria,
- ❸ újra fölfedezik a projektív geometriát.
- ❹  $n$ -dimenziós analitikus geometria.

## A XIX. Század matematikájának főbb vonásai 6.

## Függvénytan.

- ❶ Vizsgálatok végtelen sorokkal kapcsolatban: konvergencia-problémák.
  - ❶ Hatványsorok,
  - ❷ trigonometrikus sorok (Fourier- sorok).
- ❷ Jelentősen bővült a differenciálegyenletek elmélete,
  - ❶ közönséges differenciálegyenletek  $\rightarrow$  mechanikai alkalmazások,
  - ❷ parciális differenciálegyenletek  $\rightarrow$  elektrodinamika.
- ❸ Teljesen új diszciplínaként megjelenik a komplex függvénytan, amely az alkalmazások szempontjából szinte azonnal jelentős lesz.

## Súlyos elvi kérdések.

## A bizonyítás, az igazság.

- ❶ I.e. 100 körülől fokozatosan megszűnik az axiómatikus tárgyalás, eltűnnek a szigorú bizonyítások.
- ❷ A matematika szinte teljesen empirikus tudománnyá alakul.
- ❸ **A XIX. SZÁZAD ELSŐ HARMADÁTÓL SÚLYOS MEGOLDATLAN PROBLÉMÁK.**
  - ❶ Mit jelent az „igazsága” egy nem-kommutatív művelettel kapcsolatos állításnak?
  - ❷ Egy állításnak pl. az 5 dimenziós térre vonatkozóan?
  - ❸ Melyik geometria írja le a fizikai teret?
  - ❹ A derivált és az integrál valami komoly matematikai fogalom, vagy egyszerűen rövidített írásmód?
- ❹ Valójában mi a „konvergencia”?
- ❺ A Fourier-sorok problémája.

## Súlyos elvi kérdések.

### Gauss egy véleménye

Az a legmélyebb meggyőződése, hogy a tér fogalma egy teljesen egyedi helyet foglal el a priori ismereteink között, lényegesen különbözik például az aritmetika által elfoglalttól.

... a szám fogalma gondolkodásunkból ered, míg a téré azon kívül van. Így annak törvényeit nem tudjuk a priori teljesen előhívni.

### Néhány „zűrös” fogalom.

- Transzcendens szám, valós szám,
- folytonosság, a Bolzano-Darboux tulajdonság,
- konvergencia, sorfejtések.

Mit jelent az, hogy egy állítást bebizonyítottunk? Egyáltalán: **igaz-e ami bizonyítható, bizonyítható-e ami igaz?**

## Az első megoldási kísérletek.

### Mi a probléma gyökere.

- Függvény általunk kiszámított Fourier-sora miért nem állítja elő az eredeti függvényt?
- A konvergencia Cauchy-féle definíciója ezen nem segít, és
- a Bolzano-Darboux tulajdonság bizonyítását sem segíti elő.
- Sőt baj van a definícióval is: a Cauchy féle konvergencia-kritérium elegendőségét nem tudják igazolni.

### Egy „bűnbak”.

**Tisztázatlan a valós szám fogalma:** az egész analízis „homoklábakon” áll???

## A bizonyítás kérdése.

- 1 A két fő kérdés:
  - 1 **Mi az, hogy bizonyítás?**, és egyáltalán
  - 2 **Mi a matematika?**
- 2 Térjünk-e vissza a klasszikus görög matematika hagyományaihoz, vagy keressünk új utakat?
- 3 Világos, hogy újra kell éleszteni az arisztotelészi logikát, de **mi az elsődleges: a matematika vagy a logika.**

## További jelentős változások a XIX. században.

- Egyre több folyóirat közölt matematikai cikkeket, a század végére kb. 500. A legtöbb megszűnt, de az 1826-ban L. Crelle által alapított *Journal für Rheine und Angewandte Mathematik* a mai napig létezik.
- Egy nem csak öröndetes: a matematikai diszciplínák annyira szétváltak, hogy már kevesen tudták már az egészet, sőt annak nagyobb részét áttekinteni. A közlemények egyre inkább egy szűk csoportnak szóltak.
- Sok új tudományos központ alakult A hagyományos angol, francia és német egyetemek mellett.
- Az európai akadémiák „tudós társaságok” voltak, üléseknek adtak helyet, ahol a tudósok beszámoltak egymásnak eredményeikről, megvitaták azokat (Royal Society, a francia és a német akadémia).
- Az 1863-ban alapított National Academy of Sciences (USA) már „tudományos műhely” volt, amely folyóiratot adott ki, kutatásokat támogatott, intézeteket alapított.

## Az igazság keresése 1.

## 1. kísérlet: G. Cantor halmazelmélete.

- ➊ Részleges visszatérés a görögök axiómatikus módszeréhez.
  - ➋ Az alap a „halmaz” fogalma, amely egy ún. **definiálatlan fogalom**, alapfogalom..
  - ➌ Axiómatikus alapozás kell, de kérdés, hogy ellentmondásmentes-e az adott axiómarendszer.
- ➍ A fogadtatás: teljes elutasítás, „antinómiák” tömege.
  - ➎ J. Richard: „A 100, vagy kevesebb betűvel meg nem adható számok halmaza.”
  - ➏ B. Russel: „A tartalmazkodó, és a nem-tartalmazkodó halmazok.” „A falu borbélyja.”
- ➐ Cantor válasza.
- ➑ Az, hogy a matematika és a logika viszonya milyen, még nem merül föl, egyszerűen visszanyúlnak Arisztotelészhez.

## Az igazság keresése 2.

2. kísérlet: G. Frege **logicizmusa**.

- ➊ A logika elsődlegességét hirdeti a matematikával szemben: a matematika a logika egy fejezete.
- ➋ Frege: Logika, matematika, szemantika.
- ➌ Whitehead-Russel: Principia Mathematica.
- ➍ Eltűnik az alkalmazott matematika, az alkalmazások korrekt lehetősége.
- ➎ Zsákutca.

## Az igazság keresése 3.

3. kísérlet: **konstruktivizmus (intuicionizmus)**.

- ➊ A matematika az elsődleges a logikával szemben.
- ➋ A megalapító: Kronecker német matematikus az 1870-es években.
- ➌ Főbb érvei a halmazelméleti megalapozás ellen (Weierstrass, az egzisztencia bizonyítások, irracionálisok).
- ➍ Modern intuicionizmus: Brouwer
- ➎ A. Weyl véleménye: „Ha a logika a matematika higiéniája, akkor nem lehet táplálékforrása.” (1950)
- ➏ A N. Bourbaki csoport tevékenysége a 20-as évektől.
- ➐ Magát számolta föl a XX. század második felében: saját nekrológ 1976-ban.

## Az igazság keresése 4.

4. kísérlet: Hilbert axiómatikus módszere, a **bizonyításelmélet**, ill. a **metamatematika**.

- ➊ Az axiómatikus módszer a követendő.
- ➋ meg kell különböztetni a matematikai elméleteken belüli állításokat azoktól, amelyek valamely matematikai elméletéről szólnak.
- ➌ Például.
  - ➍ Az, hogy „az egyszerű Abel-csoportok prímrendűek” matematikai állítás,
  - ➎ míg az, hogy „az elemi aritmetika ellentmondás-mentes” egy állítás valamely matematikai elméletéről.
  - ➏ Az utóbbiak ún. **metamatematikai állítások**.
- ➐ A metamatematikai állítások bizonyításában csak olyan elvek, eljárások engedhetők meg, amelyekben „mindenki egyetért”, tehát pl. a véges jellegű módszerek.

## Az igazság keresése 5. Axiomatikus elméletek.

## Nem formális axiomatikus elméletek.

- Hasonlóak ahhoz, amit Euklidesz könyvében olvashatunk.
- Az ilyen elmélet definiálatlan (alap-) és definiált fogalmakat használ.
- Kiindulási állításokat fogalmaz meg, amelyeket nem bizonyít, zömmel az alapfogalmakra vonatkozóak. Ezek az elmélet **axiómái**.
- Az elmélet **tételei** olyan állítások, amelyekben az alap- és a definiált fogalmakról mondanak valamit.
- A tételek formalizálhatók, ez az alapja a következményfogalom használatának.
- Ezeket akkor fogadja el, ha az axiómák következményei valamely — az elméleten kívül megfogalmazott — következmény-fogalom értelmében.

## Az igazság keresése 5. Axiomatikus elméletek.

## Formális axiomatikus elméletek.

- A formalizálás magasabb szintű.
- A következményfogalom is része az elméletnek: levezethetőség.
- Eldönthetőség.

## Metamatematika 1.

- Axiómarendszer (axiomatikus elmélet) ellentmondás-mentessége, konzisztenciája.
- Axiomatikus elmélet teljessége.
- A konzisztencia „általánosan elfogadott” kritériuma: a véges modell létezése.
- Relatív konzisztencia.

## Az igazság keresése 6. Metamatika 2.

## Néhány pozitív eredmény.

- 1 Konzisztens elméletek.
  - 1 Ítéletkalkulus.
  - 2 Az elsőrendű függvénykalkulus.
  - 3 Boole-algebrák.
- 2 Bizonytalan: az elemi aritmetika.

## Egy relatív konzisztencia sorozat.

Hiperbolikus geometria  $\rightarrow$  euklideszi geometria  $\rightarrow$  a valós számok aritmetikája  $\rightarrow$  némi halmazelmélet (ez „biztonságos”) és az elemi aritmetika.

Eldöntésprobléma, eldönthető elméletek.

## Az igazság keresése 7. Metamatika 3.

## Két negatív eredmény.

- 1 **K. Gödel 1. tétele:** *Ha valamely elsőrendű elmélet elegendően gazdag, axiómáinak halmaza eldönthető (azaz axiomatikus elmélet) akkor bővítésével nem konstruálható olyan elegendően gazdag konzisztens elsőrendű elmélet amelyben az eredeti elmélet minden igaz állítása bizonyítható.*
- 2 **K. Gödel 2. tétele:** *Egy elegendően gazdag konzisztens elsőrendű elmélet konzisztenciája és teljessége nem bizonyítható olyan módszerekkel, amelyek tükröztethetők az adott elméletben.*