

Az ÓKORI GÖRÖG MATEMATIKA 2.

A klasszikus kor iskolái

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. október 6.

A klasszikus kor iskolái.

Eleai Iskola.

- ❶ Parmenidesz, Zenon, Leukipposz, Demokritosz (tanítványok sora).
- ❷ Zenon apóriái a mozgásról $\Rightarrow$ az empirikus és a deduktív megismerés ellentéte.
 - ❶ Achilles és a teknősbéka, a mozgás lehetetlensége, ha az „folytonos”.
 - ❷ A „stadion paradoxon”, a repülő nyíl „áll” minden pillanatban, azaz a mozgás akkor is lehetetlen, ha azt „diszkrét” folyamatnak tekintjük.
- ❸ Hatásuk a matematika deduktív tudománnyá válására: a **váltás fő oka**. (Szabó Árpád)

Az Athen-i iskolák 1.

Áttekintés.

- ❶ A „görög demokrácia virágkora”.
- ❷ A 480-ban kezdődő perzsa háború:
 - ❶ Xerxesz kezdeti sikerei: Thermopyla, Athen;
 - ❷ görög ellentámadás: Szalamisz (Themisztoklesz), Plataia.
- ❸ 478-ban létrejött a **Deloszi-szövetség** a perzsák ellen:
 - ❶ adófizetés a közös háborúkra, a „kassza őrzése”,
 - ❷ a „klasszikus görög kultúra virágkora”, Athén dominanciája a kultúra minden területén.
- ❹ A fontosabb iskolák:
 - ❶ Szofisták.
 - ❷ Akadémia.
 - ❸ Lyceum.

Szofisták.

- ❶ Az oktatott (művelt) diszciplínák: filozófia, grammatika, retorika, dialektika (= a vitatkozás tudománya), erkölcsstan, geometria (matematika), csillagászat (+csillagjósolás).
- ❷ Egyik fő cél: a geometria (a matematika) segítségével a világ (az univerzum) megismerése.
- ❸ A 3 nevezetes szerkesztési probléma: kockakettőzés (a „Delosz-i probléma”), szögharmadolás, a kör „négyszögesítése”.
- ❹ Anaxagorasz fölvetései, problémái.
 - ❶ a Nap nem istenség, hanem egy izzó gömb; majdnem akkora, mint a Peloponesszosz félsziget;
 - ❷ a Holdnak nincs saját fénye, hideg földgolyó, emberek is élhetnek rajta.
- ❺ Ezen és más hasonló tanításáért — Periklész népszerűsége hanyatlásakor — bebörtönözték istentelenség vádjával.
- ❻ A legendák szerint a börtönben foglalkozott a kör négyszögesítésével, amely a kor egyik népszerű problémája volt.

Szofisták.

Arisztophanész: Madarak

S megmértem az egyenes rúddal, hogy a
Kör négyszögű legyen, tudod; s középen
Piac — feléje, mint központba, sok
Egyenes út vigyen s mint sugarak,
Lövelljenek szét a kerek piacról
Mindenfelé. (Arany J. fordítása)

Szofisták.

Erőfeszítések szerkesztési problémák megoldására.

- ❶ Szögharmadolás: az elisi Hippiasz quadratrixe.
- ❷ A kör négyszögesítése: Anaxagoras próbálkozásai, a khioszi Hippokratesz holdacskaí.
- ❸ Kockakettőzés: Archytasz, Hippokratesz, Eudoxos és sokan mások.

Szögharmadolás

Szögharmadolás.

Az eliszi Hippiasz quadratrixe.

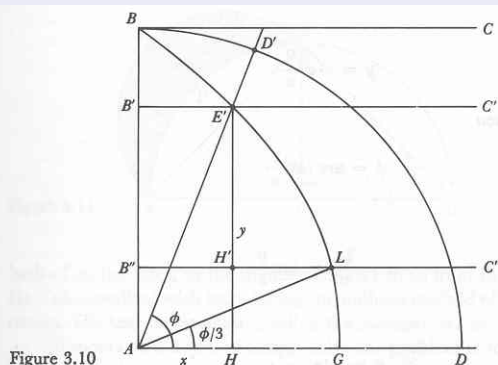


Figure 3.10

Szögharmadolás.

Szögharmadolás.

Quadratrix

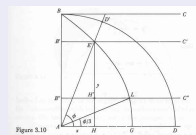


Figure 3.1

Konstrukció

- 1 Az AB szakaszt állandó sebességgel derékszöggel elforgatjuk: AD .
- 2 A B pontbeli érintőt állandó sebességgel eltoljuk az AD helyzetig.
- 3 A sebességek aránya olyan, hogy egyszerre indítva egyszerre érik el a véghelyezetet.
- 4 Egy adott időpontban AB AD' -be, BC $B'C'$ helyzetbe jut, metszéspontjuk E' . Ezen pontok összessége a **QUADRATRIX**.

Szögharmadolás.

A quadratrix egyenlete.

- 1 A definiáló mozgások egyenletes volta miatt:

- 2

$$\frac{\Phi}{\pi/2} = \frac{E'H}{BA}.$$

- 3 Az $y = E'H$ és $a = BA$ jelölésekkel

- 4

$$\frac{\Phi}{\pi/2} = \frac{y}{a} \implies y = a\Phi \frac{2}{\pi}$$

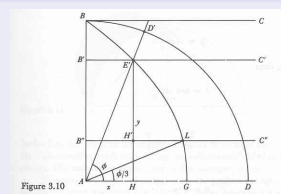
- 5 Ha $x = AH$, akkor az egyenlet

- 6

$$y = \frac{2a}{\pi} \arctan \frac{y}{x}, \text{ vagy } y = x \tan \frac{\pi y}{2a}.$$

Szögharmadolás.

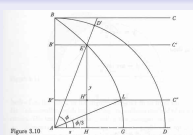
Az eljárás.



- 1 Legyen $E'H' = 2H'H$, H' az y harmadolópontja.
- 2 A $B''H'C''$ egyenes párhuzamos AD -vel, L -ben metszi a görbét.
- 3 Állítjuk, hogy $\angle LAD = \Phi/3$.

Szögharmadolás.

Az eljárás.



- 1 Ugyanis

$$\frac{\angle LAD}{\pi/2} = \frac{H'H}{a} = \frac{y}{3a}.$$

- 2 Mivel

$$\frac{\Phi}{\pi/2} = \frac{y}{a} \implies y = \frac{2a}{\pi} \Phi \implies \frac{\angle LAD}{\pi/2} = \frac{2a\Phi}{3a\pi} = \frac{2\Phi}{3\pi},$$

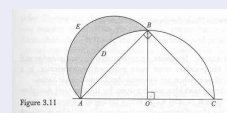
- 3 tehát

$$\angle LAD = \frac{\Phi}{3}.$$

Körnégyszögesítés.

A khioszi Hippokratesz 1.

- 1 Inkább pitagoreus, mint szofista, de Athenben élt az V. század második felében. „Elemeket” írt, amely elveszett.
- 2 Egyesek szerint a deduktív matematika egyik előfutára volt, de ez erősen kétséges.
- 3 Elsősorban a két körív által határolt alakzatok, az ún. **holdacskák** négyszögesítésével foglalkozott.
- 4 Legegyszerűbb eredménye:

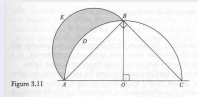


A befogók fölötti holdacskák összege egyenlő a háromszöggel.

Körnégyszögesítés.

A khioszi Hippokratesz 2.

A bizonyítás.

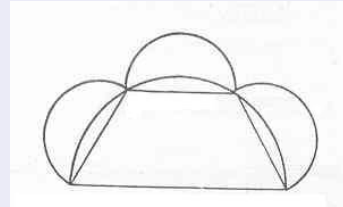


- 1 A háromszög köré írt körének fele kétszerese a befogó fölé írt félkörnek.
- 2 Így a „nagy negyedkör” egyenlő egy „kis félkörrel”.
- 3 Vonjuk ki mindkettőből a befogó fölötti körszeletet, az egyenlőség továbbra is fennáll.
- 4 Kaptuk, a „holdacska” egyenlő a háromszög felével, azaz egy egyenesekkel határolt alakzattal.

Körnégyszögesítés.

A khioszi Hippokratesz 3.

Egy további négyszögesítés:



Állítása.

A szimmetrikus trapéz, amely egy szabályos hatszög fele, egyik oldalára emelt félkör és az oldalakon levő holdacska együtt megadják a trapéz területét.

Bizonyította-e állításait?

Eudemosz véleménye.

- A holdacska kvadratúráját, amely a körrel való rokonságuk miatt különleges alakzatoknak tűnnek, először HIPPOKRATESZ írta le, s kifejtése helyesnek találtatott. ...
 - ▶ Először az alapokat vezette meg, s az ehhez szükséges tételeket állította föl, pl. azt, hogy
 - ▶ A hasonló körszeletek úgy aránylanak egymáshoz, mint alapjuk négyzetei.
 - ▶ Ezt úgy bizonyította be, hogy megmutatta,
 - ▶ az átmérők négyzetének aránya ugyanaz, mint a köröké.
- Mert amilyen a körök aránya, olyan a hasonló szeleteké is. hasonló szeletek azok, amelyek a körnek ugyanakkora részét képezik.

Bizonyította-e állításait?

Kétségek 1.

A pirossal szedett kijelentés (a körökre vonatkozó) éppen Euklidesz XII.2. Tétele, de azt először Eudoxos bizonyította, az általa bevezetett eszközök, módszerek nélkül — a mennyiségek általános elmélete nélkül — az lehetetlen.

Kétségek 2.

A pitagoreusok arányelméletét biztosan ismerte, de az csak összemérhető mennyiségekre vonatkozott. A nem összemérhető (az irracionális) esethez szükség van Eudoxos (legalább 50 évvel későbbi) elméletére.

Bizonyította-e állításait?

Hippokratesz bizonyítási technikája.

- ❶ Nem elégszik meg a „vizuális” bizonyítékokkal:
 - ❶ nem elégszik meg szerkesztésekkel,
 - ❷ bizonyítani igyekszik, hogy a „külső ív hosszabb a belsőnél”.
 - ❸ Ezt nem tudta korrekten elvégezni, de nem is az a legfontosabb, hanem
 - ❹ az igény az ilyen állítások bizonyítására.
- ❷ Ő számolt először korrekten egyenlőtlenségekkel, aminek igazi jelentősége később jelentkezik.
 - ❶ Eudoxos: a körbe és a kör köré írt sokszögek különbsége tetszőlegesen kicsivé tehető.
 - ❷ Euler „kezdetleges” gondolatmenetei.

Akadémia

A leghosszabb ideig fennálló ókori görög iskola. I.e. 387 körül alapította **PLATON**, és I.sz. 529-ben záratta be II. Jusztinianusz.

Előfutárok.

Kürénei Theodorosz és a tarrentumi Archytasz (két pitagoreus), akik megismertették a matematikával Platont, megalapozták a pitagoreus dominanciát az iskolában matematikából.

Ismertebb tagok még ...

Menaechmosz, Dinosztratosz, (IV. sz), **THEAITETOSZ** (415-369).

Akadémia

A tagok.

- DE a klasszikus kor minden „valamirevaló” matematikusa hosszabb-rövidebb időt töltött itt, mielőtt saját iskolát alapított volna
- Így például **EUDOXOS**, aki az antikvitás 3 legnagyobb matematikusának egyike (Theaitetosz és Archimedesz mellett).

Akadémia

A kürenei Theodorosz.

- ❶ Platon Theaitetosz című dialógusában beszélget az agg Theodorosz az ifjú Theaitetosszal.
- ❷ Theaitetosz rövid összefoglalója a hallottakról.
 - ❶ A mi Theodoruszunk itt fölrajzolt (írt?) valamit, ami négyzetek oldalaira vonatkozik.
 - ❷ Megmutatta, hogy a három és az öt lábnyi esetben, hogy azok hosszukat tekintve nem mérhetők az egy lábnyival.
 - ❸ Így elővett minden egyes esetet egészen tizenhét lábíg. Ennél valami megakasztotta.
- ❸ Az „összemérhetőség” fogalma szakaszokra vonatkozik (Euklidesz X.), ezért a „három-, öt lábnyi” azon négyzetek oldalát jelenti, amelyek területe három-, öt négyzetláb.

Theodorosz.

Kérdések.

- Hogyan szerkesztett Theodorosz?
- Miért 17-ig haladt?

Válaszok.

- 1 Mivel a görögöknél az, amit nekünk pl. a $\sqrt{3}$ jelent nem szám, hanem CSAK egy hosszúság (egy mennyiség), ezért inkább $w_3, w_5, \dots, w_{17}$ -et írunk.
- 2 Vélhetően 3, 5, $\dots$, 17 egységnyi területű téglalapokat alakított azonos területű négyzetekké (Elemek I.14.)

Theodorosz.

Az igazi kérdés:

hogyan derítette ki, hogy $w_3, w_5, \dots, w_{17}$ -nek nincs közös mértéke w_1 -gyel.

- 1 Ugyanazon aritmetikai (számelméleti) módszerrel, ahogy korábban Archytasz igazolta w_2 összemérhetetlenségét az egységgel (irrationalitását).
- 2 Ha pl. w_q összemérhető w_1 -gyel, akkor valamely m, n számokra

$$m^2 = qn^2,$$

- 3 és az Elemek VII. könyve alapján ebből q négyzetszám volta adódna ugyan, de ez nem valószínű, mert Theodorosz geométer volt.

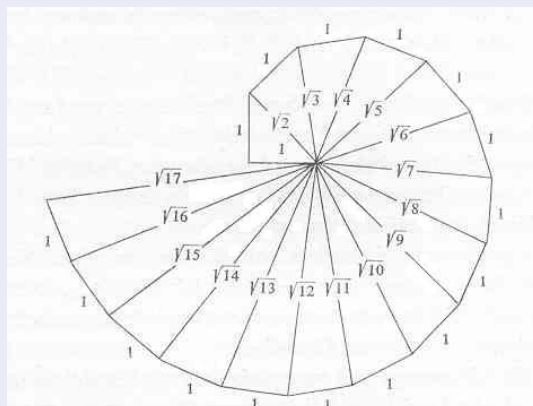
Theodorosz.

Geometriai bizonyítás.

- Az alap:
- **Elemek X.2.** *Ha két nem egyenlő mennyiség esetén a kisebbiket a nagyobbikból való váltakozó kivonásánál a maradék sohasem lesz mérhető az előzővel, akkor e mennyiségek összemérhetetlenek.*
- Ennek alkalmazását valószínűsíti az is, hogy az eseteket egyenként vizsgálta. Az aritmetikai út — korábban láttuk is — egyszerre intézte volna el az összeset.
- A geometriai utat követve minden egyes esetet külön kell vizsgálni, mert mások a kivonások.
- **Megjegyzés.** Vélhetően a folyamat végtelen voltát nem bizonyította Theodorosz, csak utalhatott rá, hogy a maradék „soha sem tűnik el”.

Theodorosz.

Anderhub egy érdekes ábrája (1941).



A deduktív matematika kiteljesedése.

Platon

- ❶ Szívesen hivatkozik a matematikára mint az egzakt következtetések mintapéldájára.
- ❷ A matematikában egzakt következtetések lehetségesek annak ellenére, hogy
 - ❶ nem látható, hallható (megfogható) dolgokról szól, hanem **ideális objektumokról**,
 - ❷ olyanokról, amelyek **csak a gondolkodásunkban léteznek**.
- ❸ Ezek megfogalmazásakor vélhetően a négyzet átlója és oldala kölcsönös összemérhetetlenségének bizonyítására gondolhatott.

A deduktív matematika kiteljesedése.

Platon, Állam 510 D - E

- Bizonyára azt is [tudod], hogy mindig csak látható alakokkal dolgoznak, s beszédekben is ezzel foglalkoznak, holott pedig gondolataik igazi tárgyai nem ezek az alakok,
- hanem azok, amikhez ezek hasonlítanak: magának a négyszögletű testnek [helyesen: négyzetnek!] s magának az átmérőnek [helyesen: átlónak!] a kedvéért folytatják elmékedéseiket,
- nem pedig azért az átmérőért [átlóért], amelyet lerajzolnak...
- Közben azokat a fogalmakat keresik, amelyeket másképpen, mint ésszel, senki meg nem látott.
- Szabó Miklós fordítása Pollák György korrekciójával.

A deduktív matematika kiteljesedése.

Megjegyzés.

- Platon biztos abban, hogy a matematikusok egyetértenek vele: a látható szakaszokra értelmetlen az a kérdés, hogy **van-e közös mértékük**: egy „hajszál vastagsága” mindkét megrajzolt szakaszra egész számszor mérhető föl.
- Az összemérhetőség kérdésének kizárólag **képzelt** tehát **absztrakt szakaszok esetén van értelme**.
- Tehát Theodorosz sem hivatkozhatott a szemléletre négyzet oldalai összemérhetetlenségének bizonyításánál.