

## Az Európai Matematika Kezdetek.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. november 3.

## Az európai civilizáció kezdete (a nem-görög területeken).

### A folyamamenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják, zömmel gót és germán törzsek.
- TACITUS: ... nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek.

### Az ókor vége, a korai középkor.

- 253-tól a Római Birodalom erjedése, lassú fölbomlása, keresztényüldözések. Kialakul lassan a két császárság, a két birodalom.
- Népvándorlás a I.sz. IV. századtól: hunok, avarok; támadások Róma ellen.
- 381: II. Egyetemes Konstantinápolyi Zsinat, a keresztény hitvallás végleges megfogalmazása.

## Az ókor vége, a korai középkor.

- 391: A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.
- 434-452: Attila hódításai, a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, a központ a Kárpát medencében.
- 451: a Catalaunum-i csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához.
- 451-511: Klodvig király: a Frank Állam megalapítása.
- 529: A nyugati szerzetesség megalapítása, Nursiai Benedek kolostort alapít Monte Cassinon, Benedek rend (bencések).
- További rendek, kolostorok, bennük ISKOLÁK.

## Iskolák.

### Kezdet.

A VIII. századtól az egyes (világi) uralkodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. Nagy Károly meghívja iskolájába a yorki **ALCUIN**-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplínák oktatása is, elsőnek a zene.

### a yorki Alcuin kb. 735-804

- kezdőknek szánt aritmetikai és geometriai traktátusokat írt,
- kb. 200 évig iránytmutatók voltak a francia és a brit iskolákban,
- Elhíresült tanítása: a világ teremtéséről (Noé bárkája).

## Egyetemek.

### A legkorábbiak.

- ❶ Bologna 1088,
- ❷ Párizs 1150,
- ❸ Oxford 1167, Cambridge 1209,
- ❹ Salamanca 1239 (III. Ferdinánd Kasztília királya),
- ❺ Krakkó 1364 (III. Kázmér),
- ❻ továbbiak a XII-XV. században: Bázeli, Bécsi, Heidelbergi, Lipcsei, Prágai és Salernói.

### Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

- Egyik sem független az egyháztól.
- Az oktatás nyelve a **latin**, mivel ez a katolikus egyház hivatalos nyelve. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

## Az első egyetemek.

### Az elérhető ismeretanyag.

- Kezdetben csak latin (római) forrásokra támaszkodik.
- A római matematika igen kezdetleges (számírás!), egyszerű és praktikus aritmetika csupán.
- Elérhető néhány görög mű, de nem autentikus, alacsony színvonalú latin fordításban.

## Az egyetemek.

### A továbbiak kezdete.

- **SEVERINUS BOETIUS** (480-524, ősi római család sarja), az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján **traktátusokat** állít össze elemi aritmetikából és geometriából: Euklidész I. és II. könyvét lefordította, de a bizonyításokat — mint szerinte fölöslegességeket — elhagyta.
- Mellékelte néhány (részben hibás) geometriai számítást. Pl. nem utalt azok közelítő jellegére. Számolások abakuszon.
- Nikomachosz Aritmetikáját, Arisztotelész, K. Ptolemaiosz egyes műveit is fordította.
- Keveset érthetett meg a lefordított művekből, matematikája tisztán empirikus.
- Leghíresebb műve: Consolationes Philosophicae, amit gyaníthatóan fogsága (hítség) alatt írt.

## Az egyetemek.

### Iszlám kapcsolatok: mecsetiskolák.

- **GERBER** (kb. 940-1003, francia)
- Itáliában és Hispániában nevelkedett, előbb németföldi szolgálat után Reims, majd Ravenna püspöke, 999-ben pápává választották: II. Szilveszter.
- Vélhetően az első európai, aki a hindu-arab számokat használta.
- Természetesen a 0 még nem szám nála.
- Boetius tradíciójának folytatója, de nem haladta meg azt. *Könyvecske a számok osztásáról*,  $\sqrt{3} \approx \frac{12}{7}$ .
- Gerber-szabály:  $\cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$  (gömbi derékszögű háromszögben, a befogó,  $\beta$  a rajta levő hegyesszög).

## Az egyetemek.

## Iszlám kapcsolatok: mecsetiskolák.

- Nagy Károly udvarába hívta a **ALCUIN**-t (735-804 a „yorki”), aki szintén írt matematikai traktátusokat, de rejtélyes tanító traktátusokat is.
- Egy elhíresült mondása: *A mai emberiség a vízözönt Noé bárkájában túlélte 8 lélek leszámozottja, ezért kevésbé tökéletes, mint a teremtés eredeti emberisége.* (a 8 ugyanis nem tökéletes szám)
- Egy rejtvénye: *100 kosár gabonát osztunk szét úgy, hogy minden férfi 3 kosárral, minden nő 2 kosárral és minden gyerek 1/2 kosárral kap. Hány férfi, nő és gyerek között osztottuk szét a gabonát?*

## A megoldás.

Megoldandó a természetes számok fölött az

$$\begin{aligned}x + y + z &= 100 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 100\end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszer.

- A rejtvénynek 6 pozitív megoldása van:
- ezek (2, 30, 68), (5, 25, 70), (8, 20, 72), (11, 15, 74), (14, 10, 76), és (17, 5, 78).

## Megjegyzés.

Ez, illetve az ilyen típusú feladatok igen népszerűek voltak e korban, főleg a keleti kultúrákban, mint „100 madár probléma”, de megtalálható a pisai Leonardonál is, mint „30 madár probléma”.

## Az egyetemek.

## A matematika szerepe a korai középkorban.

- Boetius: QUADRIVIUM: aritmetika, geometria, csillagászat, zene; hosszú ideig ezt oktatták a teológia mellett.
- Később TRIVIUM: quadrivium, retorika, dialektika (a vitatkozás művészete → hitviták).
- A matematika (aritmetika, geometria) fontos az egyháznak, mert
- „ez készít föl a legjobban a hitvitákban való eredményes szereplésre”,
- alapvető a változó idejű ünnepnapok (pl. a húsvét) meghatározásában.

## Az egyetemek.

## A matematika szerepe a korai középkorban.

- Az udvari asztrológusok kivételezett helyzetben voltak, mert
  - ők határozták meg a fontos döntések meghozatalának legkedvezőbb időpontját,
  - ideértve még az orvosi beavatkozásokét is.
- Az asztrológia fölébe kerekedett az asztronómiának (a csillagászatnak), sőt olykor a matematikának is:
  - az egyetemeken több helyen az asztrológia keretében oktatták a matematikát, a csillagászatot, sőt,
  - az orvoslást is:
  - még Gallilei is az orvoslást is tanító asztrológia részleg tagja volt.

## Az egyetemek.

### A görög tudományosság első föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civilizáció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- Az első manufaktúrák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.
- Az „ülő kereskedők” megjelenése, „kereskedelmi kirendeltségek” létrejötte. Hitelezések.
- Kapcsolat a „hispaniai mór államokkal”: tudomány, mecsetiskolák.
- ROGER BACON (1214-94): az első tudós, akit „eltiltottak az írástól”, de pápai megbízásból filozófiával foglalkozhatott. Ő — ellentétben legtöbb kortársával — előnyben részesítette a kísérleteket a spekulációval (skolasztika) szemben.

## Az első „igazi” európai matematikus.

### A PISAI LEONARDO (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei: Liber abaci (1202, 1228), Practica geometrie (1220), Flos (1225) és Liber quadratorum (1225).
- A könyvek címeiről:
- Liber abaci → Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve (abacus vagy abare az abaci eredete?),
- Flos „Virágocska”, zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is.
- Liber quadratorum → Négyzetszámok könyve (Sain M.??? sic!)

## Leonardo: Liber abaci

### Aritmetika.

- A „hindu-arab” számjegyek előnyben részesítését szorgalmazta.
- a mai értelemben vett törtek és az egységtörtek (az 1 számlálójú törtek) közötti konverzió:

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

- Egy érdekes jelölésrendszere:

$$\frac{162}{2910} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}.$$

## Leonardo: Liber abaci

### Egy érdekes feladat a XII. fejezetből.

*7 anyóka mendegél Róma felé, minden anyókéval mendegél 7 öszvér, minden öszvéren 7 zsák van, minden zsákban 7 kenyér van, minden kenyér mellett 7 kés van, minden kés 7 tokban van. Mennyi mindezek összege?*

### Egy régebbi változat: RHIND 79. feladat.

- Van 7 ház, 49 macska, 343 egér, 2401 kalász, 16807 búzaszem.
- Vélhetően a következő feladatról van szó:
- Ha van 7 ház, minden házban 7 macska, minden macska megeszik 7 egeret, minden egér elpusztítana 7 kalászt, és minden kalászban 7 mag van, akkor hány szem gabona menekül meg?

## Leonardo: Liber abaci

## Középkori orosz kézirat.

*Mendégél 7 anyóka, minden anyókánál 7 bot van, minden boton 7 ágacska, minden ágacsán 7 tarisznya, minden tarisznyában 7 lepény, minden lepényben 7 veréb, minden verébben 7 zúza. Mennyi ez összesen?*

## XIX. századi angol nonszensz-vers (nursery rhyme).

As I was going to St. Ives,  
I met a man with seven wives;  
Every wife had seven sacks,  
Every sack had seven cats,  
Every cat had seven kits,  
Kits, cats, sacks, and wives,  
How many were going to St. Ives?

## Leonardo: Liber abaci

## A probléma, amelyet mindenki ismer.

*Hány pár nyúl jön a világra egy év alatt, ha kezdetben egyetlen párunk van, és minden egyes hónapban minden pártól egy újabb pár születik föltéve, hogy a párok a második hónaptól kezdődően produktívak.*

## Határozatlan egyenletekre vezető problémák 1.

**A 30 madár probléma:** Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonként 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké  $\frac{1}{2}$ . Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtaiból?

## Leonardo: Liber abaci

## Határozatlan egyenletekre vezető problémák 2.

**A megoldás.** A feladat az

$$\begin{aligned}x + y + z &= 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 30\end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszerre vezet, amelynek egyetlen pozitív megoldása az  $x = 3$ ,  $y = 5$ ,  $z = 22$ .

**Megjegyzés.** E feladat egy variánsa az ókori kínai, hindu, valamint a kora-középkori arab forrásokból is ismert **100 madár problémának**.

## Leonardo: Liber abaci

## Határozatlan egyenletekre vezető problémák 3.

**1. Lóvásárlási probléma.** Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

## Megoldás.

Ha  $s$  a ló ára, akkor megoldandó az ismeretlenekre:

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}y &= s \\ y + \frac{1}{4}x &= s\end{aligned}$$

egyenletrendszer,  $x$  és  $y$  a „kupeczek” pénze.

## Leonardo: Liber abaci

A legkisebb egész megoldás:

$$\begin{aligned}x &= (3 - 1) \cdot 4 = 8 \\y &= (4 - 1) \cdot 3 = 9 \\s &= 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11\end{aligned}$$

Általánosítás 3 szereplőre.

2. Lóvásárlási probléma. A megoldandó egyenletrendszer most

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}(y + z) &= s \\y + \frac{1}{4}(x + z) &= s \\z + \frac{1}{5}(x + y) &= s\end{aligned}$$

## Leonardo: Liber abaci

Megoldás 1.

- Általános jegyeket tartalmaz a **szöveges** megoldás.
- Új határozatlant vezet be:  $x + y + z = t$ ,
- Kivonja belőle mindhárom korábbi egyenletét:

$$\frac{2}{3}(y + z) = \frac{3}{4}(x + z) = \frac{4}{5}(x + y) = t - s = D,$$

- A megoldandó egyenletrendszere így

$$\begin{aligned}y + z &= \frac{3}{2}D \\x + z &= \frac{4}{3}D \\x + y &= \frac{5}{4}D\end{aligned}$$

## Leonardo: Liber abaci

Megoldás 2.

- $x, y, z$ -re egész értéket akar kapni, ezért  $D$ -t 24-nek választja,
- így egyenletrendszere

$$\begin{aligned}y + z &= 36 \\x + z &= 32 \\x + y &= 30\end{aligned}$$

- amiből  $x = 13, y = 17, z = 19$ .

Megjegyzés.

Határozatlan egyenletrendszer esetén megoldása szerepel Diophantos Arithmetica c. könyvében, pl az I. 24 feladat megoldása.

## Leonardo: Flos.

Palermoi János első problémája.

- Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.
- Mai jelölésekkel a következő egyenletrendszert kell megoldani.
- 

$$\begin{aligned}x^2 + 5 &= y^2 \\x^2 - 5 &= z^2\end{aligned}$$

- Leonardo megoldása  $x = 3 + \frac{5}{12}, y = 4 + \frac{1}{12}, z = 2 + \frac{7}{12}$ .
- A Liber quadratorumban több fejezetet szentelt e probléma általánosításainak.

## Leonardo: Liber quadratorum.

## Palermoi János első problémája általánosítása.

- A következő egyenletrendszert vizsgálja

$$x^2 + C = y^2$$

$$x^2 - C = z^2$$

- Speciális terminológiája: Ha  $x^2$  és  $C$  megoldása e problémának, akkor  $C$  számot *CONGRUUM*-nak, míg az  $x^2$  négyzetet *QUADRATUS CONGRUENTUS*-nak nevezi.
- A műben részletesen, nagy gonddal foglalkozik a congruus-congruentus párok keresésével.

## Leonardo: Flos.

## Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

## Leonardo elemzése.

- $x \notin \mathbb{N}$ , mert  $x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$ , amiből egyrészt  $x < 2$ , másrészt  $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$ .
- $x \notin \mathbb{Q}^+$ , sőt racionális szám négyzetgyöke sem lehet, mert az egyenlet  $x = \frac{20 - 20x^2}{10 + x^2}$  alakban is írható, és a jobb oldalon ez esetben racionális, míg a bal oldalon irracionális szám állna.
- Megmutatta (nem korrekten), hogy  $x$  nem lehet kvadratikussal irracionális, például  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$  alakú szám sem ( $a, b \in \mathbb{Q}^+$ ).

## Leonardo: Flos.

## Palermoi János második problémája.

- Egy közelítő megoldás hatvanados törtekkel:
- 

$$\begin{aligned} x &= 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40 \\ &= 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} \\ &\quad + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}. \end{aligned}$$

- Ez  $3 \cdot 10^{-11}$  pontosságú, csak a hatodik hatvanados jegy nagyobb a korrektnél kb. másfélszer.
- Decimálisan:

1,36883102451989026063100137174211

## Leonardo: Flos.

## Palermoi János második problémája.

## Megjegyzések.

- Pontatlansága ellenére kijelenthetjük, hogy ez volt az első komoly kísérlet a harmadfokú egyenletek gyökjelekkel való, tehát algebrai megoldására.
- Más írásaiból azonban az tűnt ki, hogy osztotta az iszlám tudósok, így Omar Khajjam, azon véleményét, hogy a harmad- és magasabb fokú egyenletek csak geometriailag oldhatók meg egzaktan.
- Előbbi eljárásában impliciten az is benne van, hogy Euklidész X. könyve nem írja le az összes algebrai irracionális, hiszen egyenletének nincs megoldása az ott tárgyalt  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ , illetve  $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  alakú irracionálisok körében.

## Leonardo: Liber quadratorum.

A mű első könyve — amely zömmel pitagoraszai számhármassokkal foglalkozik — a következő bejelentéssel kezdődik.

*Az első  $n$  páratlan szám összege  $n^2$ .*

Itt csak illusztrálja állítását, a bizonyítás a könyv végén van.

## Az illusztráció

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

## Leonardo: Liber quadratorum.

Az I. könyv fő problémája.

*Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.*

A feladat pontosabb megfogalmazása.

*Keressünk két olyan négyzetszámot, amelyek összege is négyzetszám.*

Tehát (mai szóhasználat): Pitagoraszai számhármassokat keres.

**Megjegyzés.** Nem ad meg eljárást, konkrét számokkal dolgozik, DE...

## Leonardo: Liber quadratorum.

## 1. módszer.

- Legyen  $y^2$  páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan  $x^2$  négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk.
- Legyen  $y^2 = 9 = 3^2$ .
- Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat,  
 $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$ ,
- tehát  $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ .

## Leonardo: Liber quadratorum.

Mit rejt az 1. módszer.

- Tekintsük a kiindulási páratlan négyzetszámnál kisebb összes páratlan számot. Ezek összege a keresett másik négyzetszám. A kettő összege pedig nyilván megint négyzetszám hiszen 1-gyel kezdődő egymást követő páratlan számok összege.
- Világos, hogy e módszer — a kirótt föltétel mellett — teljesen általános, hiszen ha  $d$  páratlan négyzetszám, akkor
- 

$$\begin{aligned} y^2 &= d \\ x^2 &= 1 + 3 + \dots + (d-2) = \left(\frac{d-1}{2}\right)^2 \\ z^2 &= x^2 + y^2 = 1 + 3 + \dots + (d-2) + d = \left(\frac{d+1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

## Leonardo: Liber quadratorum.

## Mit rejt az 1. módszer.

- ugyanis

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) = \left( \frac{(2n - 1) + 1}{2} \right)^2 = n^2.$$

- Ezután bizonyítást (illusztrációt) is ad Euklidesz Elemek II. könyve stílusában geometriai eljárással: egy egyenesszakasz alkalmas fölosztásával.

## Leonardo: Liber quadratorum.

## 2. módszer: négyel osztható négyzetszámok.

Kiindulási észrevétele a következő fölbontás (amit szövegesen ad meg):

$$y^2 = 4k = 2(2k) = (2k - 1) + (2k + 1).$$

## Leonardo számolása:

- $y^2 = 36 = 6^2 = 17 + 19$ ,
- $x^2 = 1 + \dots + 15 = 64 = 8^2$ ,
- $z^2 = x^2 + y^2 = 1 + \dots + 15 + 17 + 19 = 100 = 10^2$ .

## Leonardo: Liber quadratorum.

## Általánosan.

$$y^2 = 4k = 2(2k) = (2k - 1) + (2k + 1)$$

$$x^2 = 1 + \dots + (2k - 3) = (k - 1)^2$$

$$z^2 = 1 + \dots + (2k - 3) + ((2k - 1) + (2k + 1)) = (k + 1)^2$$

## Leonardo: Liber quadratorum.

## 3. módszer: 3-mal osztható páratlan négyzetszámok.

- Csak számokkal adjuk meg.
- Az alap:  $y^2 = 9k = 3(3k) = (3k - 2) + 3k + (3k + 2)$ .
- Leonardo példája:

$$y^2 = 81 = 3 \cdot 27 = 25 + 27 + 29 = 9^2,$$

$$x^2 = 1 + \dots + 23 = 144 = 12^2,$$

$$z^2 = 1 + \dots + 23 + (25 + 27 + 29) = 144 + 81 = 225 = 15^2.$$

## Leonardo: Liber quadratorum.

## 4. módszer: 6-tal osztható négyzetszámok.

- A legkisebb ilyen a 36, de a 144-et választja.
- A számpélda

$$y^2 = 144 = 6 \cdot 24 = (19 + 21) + (23 + 25) + (27 + 29)$$

$$x^2 = 1 + 3 + \dots + 17 = 81 = 9^2$$

$$\begin{aligned} z^2 &= (1 + 3 + \dots + 17) + (19 + 21 + \dots + 29) \\ &= 81 + 144 = 225 = 15^2. \end{aligned}$$

## Leonardo: Liber quadratorum.

## 4. módszer: 6-tal osztható négyzetszámok.

- Általánosan a probléma:
- 

$$y^2 = 36k = (6k - 5) + \dots + (6k + 5)$$

$$x^2 = 1 + \dots + (6k - 7) = (3k - 3)^2$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 + \dots + (6k - 7) + (6k - 5) + \dots + (6k + 5) \\ &= 36k + (3k - 3)^2 = (3k + 3)^2 \end{aligned}$$