

MEGOLDHATÓK-E AZ EGYENLETEK.

IDŐUTAZÁS A MATEMATIKA 4000 ÉVES TÖRTÉNETÉBEN.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. november 24.

Mi az, hogy egyenlet.

Egy egyszerű definíció.

Egy vagy több olyan matematikai objektumot — például számot (hosszúságot, területet és hasonlókat is ideértve), függvényt, mátrixot — keresünk, amely(ek) bizonyos előre adott föltételeknek tesznek eleget.

Számokat keresünk 1.

- (1a) Melyek azok a $k > 1$ természetes számok, amelyek két prímszám összegére bonthatók, azaz amelyekre megoldható az

$$x + y = 2k \quad k > 1$$

egyenlet a prímszámok körében.

- Goldbach sejtése: tetszőleges $k > 1$ -re van megoldás.

Mi az, hogy egyenlet.

Számokat keresünk 2.

- (1b) Melyek azok az x valós/komplex számok, amelyekre

$$\begin{aligned}x^2 + x - 3 &= 0, \\x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= 0, \\x^2 + 1 &= 0.\end{aligned}$$

- (1c) Palermoi János (XIII. sz. eleje) kérdése a II. Frigyeshez látogató pisai Leonardohoz (Fibonacci). *Melyik az a négyzetszám, amelyhez 5-öt adva is, meg 5-öt levonva is négyzetszámot kapunk.*
- Azaz, mely x, y, z (racionális) számokra teljesül, hogy

$$\begin{aligned}x^2 + 5 &= y^2 \\x^2 - 5 &= z^2\end{aligned}$$

Mi az, hogy egyenlet.

Számokat keresünk 3.

- (1d) Ókori kínai probléma (Kr.e. I. évezred) 3 jó kévéből, 2 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 39 tau gabonát kapunk. 2 jó kévéből, 3 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 34 tau gabonát kapunk. 1 jó, 2 közepes és 3 rossz kévéből pedig 26 tau gabonát. Mennyi gabonát kapunk 1-1 jó, közepes és rossz kévéből?
- E feladat mai formalizálással a

$$\begin{aligned}3x + 2y + z &= 39 \\2x + 3y + z &= 34 \\x + 2y + 3z &= 26\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását kívánja.

Mi az, hogy egyenlet.

Mátrixot keresünk.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix. Határozzuk meg azt az $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrixot, amelyre

$$X^{-1}AX = D,$$

ahol D diagonális mátrix.

Mi az, hogy egyenlet.

Függvényeket keresünk.

(2a) Melyek azok az f függvények, amelyekre

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

minden olyan x, y -ra, amelyekre az f függvény értelmezve van.

(2b) Melyek azok az f függvények, amelyekre

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

minden olyan x, y -ra, amelyekre az f függvény értelmezve van.

Mi az, hogy egyenlet.

A továbbiakban

$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ alakú egyenletekre szorítkozunk, ahol $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, azaz polinom, ahol $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ valamely $\mathbb{K}$ számtestre.

Ókori eredmények.

Lineáris egyenletek, egyenletrendszerek.

- Lineáris egyenletek megoldottak valamennyi folyammenti kultúrában.
- Kínában a legfőbb 5 határozatlan egyenletrendszerekkel is boldogultak: Feng csen, azaz elimináció módszerével.

Magasabbfokú egyenletek

- Mezopotámiában meg tudtak oldani minden olyan másodfokú egyenletet, amelynek van pozitív gyöke.
- Megoldási eljárásuk lényege teljes a négyzetté kiegészítés.
- Ugyanott hatvány táblázatok segítségével igen speciális harmadfokú egyenletekkel is boldogultak.

Ókori eredmények.

Észrevétel.

Minden tiszta empiria, semmi indoklás, pláne bizonyítás. Csak eljárásokat közöltek verbálisan.

A korai iszlám kultúrkör.

Feladat al-Khwarizmi híres értekezéséből (arab, IX. sz.)

Egy négyzet és tíz gyöke ugyanazon mennyiségnek harminckilenc dirhem, azaz mi legyen a négyzet, amelyet saját gyökének tízszeresével növelve harminckilencet ad.

Megoldási módszerük.

- Lényegében a Mezopotámiából ismert, szintén csak verbálisan írták le.
- Ami új: **geometriai indoklásokat** közöltek, amelyekben
- Euklidesz II. könyvére támaszkodtak.

Al-Khwarizmi két híres módszere.

- **al-jabr**: az amit ma mérlegelvnek mondunk, továbbá összeillesztés.
- **al-mukábalá**: az egynemű tagok összevonára.

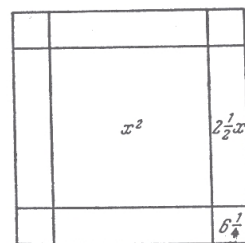
Al-Khwarizmi egy újítása.

- A megoldási, számolási eljárását, amely megegyezett az ismert mezopotámiaival, geometriai úton indokolja.
- Ebben Euklidesz Elemek c. művének II. könyvére támaszkodik, DE...
- Eljárása messze nem szigorú bizonyítás, szó sincs dedukcióról.

Al-Khwarizmi indoklása.

- Rajzoljunk egy négyzetet, és mindegyik oldalához illesszünk egy-egy $\frac{10}{4}$ magasságú téglalapot, majd az egészítsük ki négyzetté.
- Ennek területe $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$,
- oldala 8 hosszúságú, így a „belső négyzet” oldala $8 - 2 \cdot \frac{10}{4} = 3$.

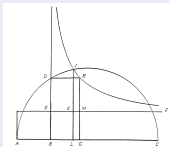
Szemléltessen.



Omar Khajjam egy feladata (perzsa, XII. sz.).

- Egy köb meg egy oldal és valamely szám együtt egyenlő egy négyzettel
- Számára ez a következő geometriai problémát rejtette: Adott a, b, c hosszúságú szakaszokhoz konstruáljunk olyan x szakaszt, amelyre $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.

Omar Khajjam geometriai megoldása.



$$x = BL$$

Kérdések, vélemények.

Kérdések.

- 1 Lehetséges-e algebrai módszerekkel is megoldani minden harmadfokú egyenletet? Khajjam geometriai úton az összes típust kezelni tudta.
- 2 Vannak-e olyan geometriai módszerek, amelyekkel negyedfokú egyenleteket lehet megoldani?
- 3 A harmadfokú esetben kúpszeleteket kell használni. Milyen görbék szerepelhetnének a negyedfokú esetben?

Kérdések, vélemények.

Vélemények.

- 1 Az iszlám tudósok szerint a másodnál magasabb fokú egyenletek csak geometriai úton oldhatók meg.
- 2 Elégé általános volt a XX. század második feléig az a nézet, hogy: az iszlám matematikusok e vélekedését először a XVI. századi itáliai „maestrok” és matematikusok cáfolták meg.
- 3 DE a XX. század utolsó harmadában földolgozott kódexek mást tanúsítanak:
- 4 Maestro BENEDETTO, Maestro DARDI és Piero della FRANCESCA korábbi traktátusaiban algebrai megoldások szerepelnek.

Maestro Dardi, XIV. sz., Pisa.

Aliabrea di algibra, 1344 körül

- Az

$$x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000$$

egyenlet megoldását

- a következő számolással kapta:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1200}{60}\right)^3 + 4000} - \frac{1200}{60} = \sqrt[3]{12000} - 20.$$

Megjegyzés.

Dardi a megoldást szöveges utasításként adta meg. Még az ő korában sem írtak mai értelemben vett formulákat, képleteket.

Kérdések Maestro Dardi traktátusával kapcsolatban

- ❶ Hogyan jöhetett erre rá?
- ❷ Indokolta-e eljárását?
- ❸ Általános érvényű módszere, azaz tetszőleges $x^3 + bx^2 + cx = n$ alakú egyenletre alkalmazható,
- ❹ vagy csak speciális (együttható) föltételek mellett működik?

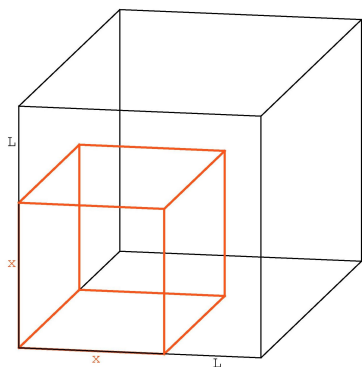
A traktátusban csak a másodikra van válasz: nem olvashatunk benne indoklásokat.

Egy rekonstrukció.

Egy lehetséges válasz az 1. és 3. kérdésre.

- Kísérjük meg Al-Khwarizmi eljárását általánosítani harmadfokú egyenletekre.
- Világos, hogy ekkor négyzet helyett kockával kell dolgozni.
- Tekintsünk egy $x + L$ oldalú kockát.

A kocka.



A kocka fölbontása.

E kocka 8 részre bontható:

- egy x oldalú kockára, térfogata x^3 ,
- három x alapú és L magasságú négyzetes hasábra, térfogatuk $3x^2L$,
- három x alapú és L magasságú négyzetes hasábra, térfogatuk $3xL^2$,
- egy L oldalú kockára, térfogata L^3 .
- Ezekből

$$x^3 + 3x^2L + 3xL^2 + L^3 = (x + L)^3.$$

A rekonstrukció.

Összehasonlítva egyenletünkkel.

$$x^3 + 3x^2L + 3xL^2 + L^3 = (x + L)^3 \quad (1)$$

$$x^3 + bx^2 + cx = n \quad (2)$$

Adjunk (2) mindkét oldalához L^3 -t.

Összehasonlítva (1)-gyel szükségképp teljesül, hogy $c = 3L^2$ és $b = 3L$,

Amiből $L = \frac{c}{b}$ és $b^2 = 3c$.

A konklúzió.

- Egy $x^3 + bx^2 + cx = n$ alakú egyenlet megoldása akkor írható
- $x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + n} - \frac{c}{b}$ alakban, ha
- $b^2 = 3c$.

Dardi módszere tehát CSAK speciális esetben alkalmazható. DE EZ tekinthető az egyik első kísérletnek a harmadfokú egyenletek algebrai megoldására, bár — néhány kortársához hasonlóan — csak speciális eseteket tud kezelni.

Áttörés a XVI. században.

Tartaglia eljárása.

- Az

$$x^3 + px + q = 0$$

egyenletre van „megoldóképlet”, azaz egy olyan „formula”, amelyben a 4 alpművelet valamint (egész kitevőjű) gyökvonás(ok) szerepel(nek), és bármely adott fokszámú egyenlet együtthatóit behelyettesítve megkapjuk a gyököket:

-

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

- Ez az ún. **Cardano-képlet**, BÁR..

Áttörés a XVI. században.

Az eljárás alapja.

Hasonlóan a másodfokú egyenletekre vonatkozó ókori eljáráshoz, itt is eggyel alacsonyabb fokú egyenlet megoldására lehetett visszavezetni a problémát.

A továbbblépés lehetősége.

- **Kérdés.** Vissza lehet-e vezetni a negyedfokú egyenlet megoldását egy harmadfokú egyenlet megoldására.
- **Válasz.** Igen.
- Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ alakú egyenletekhez meg lehet határozni olyan harmadfokú egyenleteket, amelyek együtthatói a, b, c, d -től és racionális konstansoktól függenek.
- Az első ilyen eljárást Cardano tanítványa (inasa?) Ferrari találta, ma is használatos.

Áttörés a XVI. században.

Zuanne de Tonini da **COI** feladata Girolamo **Cardano** számára.

Osszuk a 10-et három részre úgy, hogy azok folytonos arányban álljanak, s az első kettő szorzata 6 legyen.

A megoldandó egyenletrendszer, egyenlet.

$$x + y + z = 10$$

$$xz = y^2$$

$$xy = 6$$

vagyis az

$$y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$$

negyedfokú egyenlet.

Áttörés a XVI. században.

FERRARI eljárása.

- Alapja a geometriai úton igazolt

$$(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2sb + 2ab + b^2$$

azonosság, Euklidész Elemek II.4. tételének általánosítása.

- Az egyik oldalon teljes negyedik-, a másikon teljes második hatványt tudott kialakítani, ami után csak négyzetgyököt kellett vonni.
- Az átalakítás során egy harmadfokú egyenletet kellett megoldania.

Áttörés a XVI. században.

Az általános eset.

- A megoldandó egyenlet: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- Ferrari ötlete alapján a bal oldalt két legföljebb másodfokú polinom négyzetének különbségeként állíthatjuk elő:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha\right)^2 - \left(\left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)x + (\alpha^2 - d)\right)$$

- Az előbbi polinomok együtthatóinak meghatározásához meg kell oldani egy α -ra harmadfokú egyenletet, hiszen a második polinom diszkriminánsának zéróval egyenlőnek kell lennie.
- Az eljárás csak az együtthatókat és racionális konstansokat használ.

Áttörés a XVI. században.

Az eddigiek összegzése.

- A másod-, a harmad-, és a negyedfokú egyenletek mindig megoldhatók, vannak olyan megoldási eljárások, amelyek csak a fokszámtól függenek.
- A kulcs mindhárom esetben egy-egy eggyel alacsonyabb fokú egyenlet megoldása volt.
- Ezen **rezolvens egyenletek** együtthatói az eredeti egyenletek együtthatóiból és (racionális) számokból kaphatók a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával (azok polinomjai).

Ezen fölismerés a továbblépés kulcsa lehet. Tovább erősítés ad **Viéte** fölfedezése, ami általánosan és mai jelölésekkel a következő.

Viéte formulái.

Ha $-\alpha_1, \dots, -\alpha_n$ jelöli az

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

egyenlet gyökeit, akkor

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_n = a_1$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = a_2$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = a_3$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a_n,$$

ami azt (is) jelenti, hogy az egyenlet együtthatói a gyökök racionális függvényei.

Tovább ezen az úton.

Kérdések.

- 1 Van-e gyökképlet az ötödfokú egyenletekre?
- 2 Ha igen, akkor általában is igaz-e, hogy tetszőleges n -edfokú egyenlet gyökeit megkaphatjuk alkalmas n -nél alacsonyabb fokú egyenletek megoldásai révén.
- 3 Ezen rezolvens egyenletek az eredeti egyenlet együtthatói és racionális konstansok segítségével kaphatók-e meg.

A kérdések megválaszolása egy kb. 200 éve programot adott. Csak néhány „résztvevő”: Euler, Lagrange, Legendre.

A XVIII. század végén (a sikrtelenség miatt) néhányan bátortalanul fölvetették: **Biztosan léteznek a keresett gyökképletek???**

A megoldhatóság általában.

És, ha nincs gyökképlet ...

- A negatív eredmény bizonyítása nagyobb körütekintést igényel: **pontosan meg kell mondani**, hogy
- **MI AZ, AMI NINCS.**
- Egyáltalán: **Van-e minden egyenletnek gyöke?**
- **Gauss: VAN.**

Két egyszerű kérdés.

- 1 Van-e mindig gyökképlet, azaz van-e olyan megoldási eljárás, amely csak az egyenlet fokszámától függ, az együtthatóktól független.
- 2 Ha ilyen nincs, van-e minden esetben olyan (véges) eljárás, amely az együtthatókból „elvezet” a gyökökhöz.

A kérdések precíz megfogalmazása.

- 1 Legyen $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ tetszőleges polinom ($n \geq 2$). Létezik-e olyan csak n -től függő eljárás, amellyel az $f = 0$ egyenlet gyökei megkaphatók az $a_0, \dots, a_{n-1}$ együtthatókból és adott (racionális) számokból a négy alpművelet (összeadás, kivonás, szorzás és osztás), valamint gyökvonások (egész kitevős) véges sokszori alkalmazásával. Adott n esetén mindig ugyanúgy.
- 2 Ha az előbbire valamely n -re nemleges a válasz, akkor létezik-e olyan eljárás minden kérdéses n -re, amely a konkrét együtthatóktól, és bizonyos konstansoktól is függ az n -en kívül.

F. GAUSS, 1799. A klasszikus algebra alaptétele.

Minden valós együtthatós polinom fölbontható legfőljebb másodfokú valós együtthatós polinomok szorzatára.

A Válaszok.

1. kérdés.

- Az olasz Paolo RUFFINI 1798-as nem teljesen korrekt (nem teljes) bizonyítása szerint az első kérdésre a válasz NEM.
- Az első — korrekt — nemleges választ az első kérdésre 1826-ban a norvég Nils Henrik ABEL adta.
- A „sors iróniája”, hogy kezdetben mindketten úgy vélték, hogy megtalálták az ötödfokú egyenlet gyökképletét.

2. kérdés.

1832-ben a francia Evariste GALOIS mindkét kérdésre korrekt választ adott. Korrekt kritériumot adott arra, hogy a 2. kérdésre mely polinomok esetén igen a válasz. Módszere alapvetően különbözött elődeiétől: nem foglalkozott az ún. rezolvens egyenletekkel.

Galois eredményei 1.

Módszerének fő vonásai (mai terminológiával)

- Három új fogalmat vezetett be.
 - $A \subseteq \mathbb{C}$ halmaz (szám) **test**, ha zárt a szokásos négy alpműveletre.
 - Ha $T \subseteq K$ testek, akkor K a T **test bővítése**.
 - A $G \neq \emptyset$ halmaz **csoport**, ha definiálva van rajta egy asszociatív (általában szorzásként írt) művelet, van G -ben egységelem és minden elemnek van inverze.
- A probléma újrafogalmazása.** Megkapható-e véges sok lépésben az együtthatókat tartalmazó legszűkebb testnek (K) egy olyan ($K \subseteq T$) bővítése, amely tartalmazza a gyököket, és minden egyes lépésben egy ún. gyökmennyiséggel, $\sqrt[n]{a}$ alakú számmal bővítünk ($a \in K_i$, ahol $K \subseteq K_i \subseteq T$ egy ún. közbülső test).

Galois eredményei 2.

Az alapvető és teljesen új ötlete.

- Az előbbi kérdést átfogalmazta csoportelméleti kérdéssé.

Az ötlet megvalósítása 1.

- Legyen K a p polinom együtthatóit tartalmazó legszűkebb test, és $K \subseteq N$ a gyököket tartalmazó minimális test.
- Megadható az N test művelettartó permutációinak egy olyan csoportja, amelynek elemei a K -beli számokat nem mozgatják.
- Ez a p polinom ún. **Galois-csoportja**, $G(p|K)$.

Az ötlet megvalósítása 2.

A $G(p|K)$ csoport szerkezetétől, egy (viszonylag bonyolult) tulajdonság meglététől függ, hogy létezik-e a kívánt testbővítés.

Galois eredményei 3.

A végleges válaszok.

- Ha $n > 4$ és a p együtthatói „teljesen függetlenek” akkor nem létezik a kívánt bővítés, azaz az $n > 4$ esetben nincs gyökképlet.
- Bármely $n > 4$ esetén van olyan egyenlet, amelyhez nem létezik a kívánt bővítés, azaz gyökei nem kaphatók meg az együtthatókból a négy alpművelet és gyökvonások véges sokszori alkalmazásával.
- Példa.**

$$x^5 - 4x + 2 = 0$$