

A hellenizmus korának matematikája: Archimedesz.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. október 20.

Archimedeszről általában, művei

Archimedesz (l.e. 287 - 212.)

Fontosabb traktátusai.

- A gömbről és a hengerről I. és II.,
- A kör mérése,
- Síkidomok egyensúlyáról,
- A parabola kvadrátúrája,
- Spirálisokról,
- A módszer,
- Konoidokról és szferoidokról (forgási paraboloidokról, kétköpenyű hiperboloidokról és ellipszoidokról),
- Emelőkről,
- A súlypontokról (tömegközéppontokról).

Archimedeszről általában, művei

Archimedesz, vélemények a traktátusokról.

Th. Heath, *History of Greek Mathematics*.

Ezek az alkotások kivétel nélkül a matematikai írásművészet fontos momentumai. A probléma elleni támadási terv fokozatos kibontakozása, a tételek mesteri elrendezése, szigorú kikapcsolása mindennek, ami nem tartozik a dologhoz, az egész mű lekerekítettsége olyan lenyűgöző a maga tökéletességével, hogy az olvasót bizonyos tiszteletteljes bámulat keríti hatalmába.

Plutarchosz, *Párhuzamos életrajzok*, Marcellusz fejezet.

A geometria legnehezebb és legbonyolultabb kérdéseit is a lehető legegyszerűbb és legvilágosabb tételekbe foglalva oldja meg. Azt az utat, amelyeken eredményeihez eljutott számos esetben fátyol takarja.

Archimedeszről általában, művei

Archimedesz, vélemények a traktátusokról.

J. Wallis XVIII. sz.

... mintegy szándékosan rejtette el kutatásai nyomát, mintha sajnálná az utókortól a felfedezési módszerei titkát, de mégis arra akarná kényszeríteni, hogy eredményeit elismerje.

Archimedesz: A gömből és a hengerről.

3 posztulátum.

- ❶ Az azonos végpontú görbék közül az egyenesszakasz a legrövidebb.
- ❷ Azonos végpontú görbék közül a „belső” a rövidebb.
- ❸ Két vonal, felület vagy test különbsége önmagához valahányszor hozzáadva bármely előre megadott ugyanolyan fajtájú mennyiséget meghalad.

Egy egyszerű következmény.

2. posztulátum alapján egy körbe írt sokszög kerülete kisebb, a kör köré írté pedig nagyobb a kör kerületénél.

A 3. posztulátum a nevezetes (és korábban már említett)

EUDOXOS-ARCHIMEDESZ AXIÓMA.

Archimedesz: A gömből és a hengerről.

Néhány tétel 1.

- ❶ Az egyenes körhenger felszíne az alaplapok nélkül egyenlő annak a körnek a területével, amelynek sugara folytonos arányban van a magassággal és az alapkör átmérőjével.
- ❷ Bármely gömb felszíne négyszerese a benne foglalt legnagyobb kör területének.
- ❸ Minden olyan henger — amelynek alapköre egy gömbben levő legnagyobb kör, magassága e gömb átmérője — térfogata $3/2$ -szer akkora mint a gömb térfogata, és felszíne (az alapokkal együtt) $3/2$ -szerese a gömb felszínének. (Archimedesz Plutarchosz szerinti sírfelirata.)
- ❹ A parabolaszélet területe $4/3$ -szorosa a benne foglalt háromszögének.

Archimedesz: A gömből és a hengerről.

Néhány tétel 2.

- ❶ Legyen adott mennyiségek egy olyan sorozata, amelyben minden egyes tag az öt követő tag négyszerese (azaz egy $1/4$ kvóciensű mértani sorozat). Ha az összes tag összegéhez hozzáadjuk az utolsó tag egyharmadát, akkor a kapott összeg egyharmadával haladja meg az első tagot.
- ❷ Valamely meghatározandó Σ mennyiséget alulról közelíti az $S_n = a_1 + \dots + a_n$ összeg, amelyben a tagok pozitívak mégpedig úgy, hogy a $\Sigma - S_n$ különbség az n növelésével kisebbé tehető bármely előre adott ε mennyiségnél, s ugyanez érvényes a_n -re is. Ha meghatározunk egy olyan K mennyiséget, amely bármely n re kielégíti az

$$a_1 + \dots + a_n + R_n = K, \quad \text{ahol } 0 < R_n < a_n$$

föltételt, akkor $\Sigma = K$.

Archimedesz: A gömből és a hengerről.

Megjegyzések.

- A 2.2 Tétel úgy (is) ismert, mint Archimédész (egyik) approximációs módszere, továbbá S_n egy konvergens sorozat első n tagjának összege.
- Az 1.4. Tétel (a parabolaszélet területére vonatkozó) Archimedesz által adott bizonyítása(i) nemcsak tudománytörténeti jelentőségűek, hanem jelentős metodikai újdonságot hordoz(nak).
- Itt jelenik meg először egymás mellett a heurisztikus sejtés és a szigorú (deduktív) bizonyítás.
- Ezt részletesen is megvizsgáljuk.

Archimedesz: A módszer.

Honnan tudunk róla?

- Archimedesz említi egy Erathoszteneshez írott levelében.
- Heron utalt rá a Metrika c. traktátusában.

Megtalálásának története.

- 1906-ban J. L. Heiberg megvizsgálta egy a X-XII. századi pergament a Jeruzsálemi Szent Sír Kolostorban.
- E palimpszesztuson az új szöveg alatt régi görög írás sejlett föl.
- Eltávolítva a latin szöveget görög nyelvű írásokat talált.
- Ez ismert Archimedesz traktátus töredékek mellett egy teljes traktátust tartalmazott.
- Ez volt a [Módszer](#), amelynek elején egy Erathosztenesnek írott levél olvasható.

Archimedesz: A módszer.

Levél Erathoszteneshez 1. rész.

Mint már említettem, tudom, hogy szorgalmas és kiváló tanára vagy a filozófiának, és nagyon érdeklődsz a matematikai vizsgálatok mikéntje iránt, úgy gondolom hasznos összeállítanom és leírnom e könyvben néhány speciális módszert, amelynek révén te is képes leszel bizonyos matematikai problémák fölismerésére a mechanika segítségével. Úgy vélem, hogy ez nem kevésbé hasznos, mint ugyanezen tételek bizonyításának megtalálása. Számos dolog ugyanis először mechanikai módszerek révén lett világos számomra.

Ezeket később geometriailag igazoltam, mert az előbb említett módszerek nem nyújtanak valódi bizonyítást. Egyszerűbb azonban a bizonyítást megtalálni akkor, ha korábban e módszerrel bizonyos tudásra teszünk szert, mintha ezen előzetes tudás nélkül próbálkoznánk.

Archimedesz: A módszer.

Levél Erathoszteneshez 2. rész.

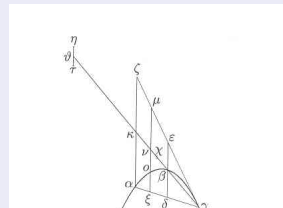
Most leírom neked a módszert, egyrészt azért, mert már korábban beszéltem róla, de sokan úgy tekintették azt, mint haszontalan beszéd, másrészt pedig azért, mert igen hasznosnak bizonyult a matematika számára. Tulajdonképpen hangsúlyozni akarom, lesznek olyanok a jelenlegi és a jövőbeni generációkban, akik e módszer segítségével képesek lesznek más tételeket megtalálni, olyanokat, amelyek eddig nem kerültek látókörükbe. Most előbb leírjuk azt, ami először lett világos nekünk a mechanikai módszerrel, nevezetesen azt, hogy bármely parabolaszelet egyharmadával nagyobb az ugyanolyan alapú és magasságú háromszögnél, majd mindazt, ami ennek révén világosodott meg számunkra. A könyv végén megadjuk a tételek geometriai bizonyítását, azon állításokét, amelyeket már korábban elküldtünk neked.

Archimedesz: A módszer.

Állítás.

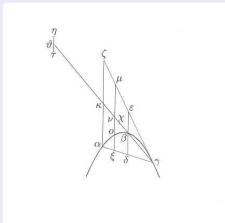
Legyen adott az $\alpha\beta\gamma$ szelet, amelyet az $\alpha\gamma$ egyenesszakasz és az $\alpha\beta\gamma$ parabolaív határoz meg; jelölje δ az $\alpha\gamma$ felezőpontját, s a $\delta\beta\epsilon$ egyenesszakasz legyen párhuzamos a parabola tengelyével, majd kössük össze a β pontot α és γ -val. Állítom, hogy az $\alpha\beta\gamma$ szelet egyharmadával nagyobb az $\alpha\beta\gamma$ háromszögnél.

Ábra.



Archimedesz: A módszer.

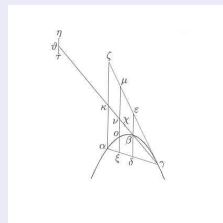
A konstrukció 1.



- $\alpha\beta\gamma$ az $\alpha\gamma$ egyenesszakasz és az $\alpha\beta\gamma$ parabolaív által meghatározott parabolaszélet,
- $\gamma\zeta$ a parabola érintője a γ pontban,
- δ az $\alpha\gamma$ szakasz felezőpontja,
- $\delta\beta\varepsilon$ a parabola tengelyével párhuzamos egyenes δ -n keresztül,

Archimedesz: A módszer.

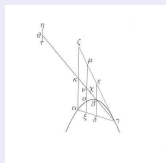
A konstrukció 2.



- ξ az $\alpha\gamma$ egyenesszakasz tetszőleges (változó) pontja,
- $\xi\sigma\nu\mu$ a $\delta\varepsilon$ egyenessel párhuzamos egyenes,
- $\alpha\kappa\zeta$ a $\delta\varepsilon$ egyenessel párhuzamos egyenes,
- $\kappa\vartheta = \kappa\gamma$.

Archimedesz: A módszer.

A konstrukció 3.



- Archimédész Konoidokról és szferoidokról szóló traktátusának 2.2. Állítása szerint

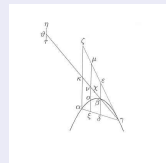
$$\delta\beta = \beta\varepsilon,$$

- amiből következik, hogy

$$\alpha\kappa = \kappa\zeta \quad \text{és} \quad \xi\nu = \nu\mu.$$

Archimedesz: A módszer.

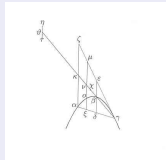
A heurisztikus gondolatmenet 1.



- A parabolaszélet területét összehasonlítja az $\alpha\gamma\zeta$ háromszög területével a következő mechanikai elvek alapján.
- *egyenesszakasz súlya*: a szakasz hossza,
- *alakzat területe*: olyan párhuzamos, súlyozott egyenesszakaszok összege, amelyek kitöltik az alakzatot,

Archimedesz: A módszer.

A heurisztikus gondolatmenet 2.

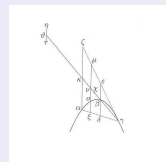


- az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területe: a ξo -val párhuzamos, a széleten belüli, súlyozott egyenesszakaszok összege,
- az $\alpha\gamma\zeta$ háromszög területe: a $\xi\mu$ szakasszal párhuzamos, e háromszögön belüli, súlyozott egyenesszakaszok összege.
- Bebizonyította, hogy

$$\vartheta\kappa \cdot \xi o = \kappa\nu \cdot \xi\mu,$$

Archimedesz: A módszer.

A heurisztikus gondolatmenet 3. Út a sejtéshez.



- majd mechanikai elvek alapján értelmezte az egyenlőséget:
- (i) Tekintsük a $\vartheta\kappa$ és a $\kappa\nu$ szakaszokat egy olyan emelő két karjának, amelynek alátámasztási pontja κ .
- (ii) Helyezzük a ξo szakasz súlyát a ϑ pontba, és legyen ν azon pont, ahová a $\xi\mu$ szakasz súlyát helyezve az emelő egyensúlyban lesz.

Archimedesz: A módszer.

A heurisztikus gondolatmenet 4. Út a sejtéshez.



- (iii) Világos, hogy ha azt az összes ξo -szerű szakasz súlyával megtesszük, akkor egyensúlyi helyzetet érünk el azáltal, hogy az összes $\xi\mu$ -szerű szakasz súlyát azok felezőpontjába helyezzük.
- (iv) Az összes $\xi\mu$ -szerű szakasz súlyának a felezőpontokba (a tömegközéppontokba) helyezése egyenértékű azzal, ha az $\alpha\gamma\zeta$ háromszög súlyát e háromszög tömegközéppontjába helyezzük.

Archimedesz: A módszer.

A heurisztikus gondolatmenet 5. Út a sejtéshez.

- (v) Archimédész a Síkidomok egyensúlyáról szóló traktátusában megmutatta, hogy az utóbbi tömegközéppont azon χ pont a $\gamma\kappa$ szakaszon, amelyre

$$\kappa\chi = \frac{1}{3}\gamma\kappa.$$

- (vi) A kétkarú emelőkre vonatkozó törvény értelmében

$$\kappa\chi \cdot t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta}) = \vartheta\kappa \cdot t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}}),$$

- ahol $t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta})$ és $t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}})$ rendre az $\alpha\beta\zeta$ háromszög, ill. az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területét jelöli.

Archimedesz: A módszer.

A heurisztikus gondolatmenet 6. Út a sejtéshez.

Az egyenlőségből adódik, hogy

- $$\frac{t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta})}{t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}})} = \frac{\kappa\vartheta}{\kappa\chi} = \frac{3}{1},$$
- (νm) amiből már következik a keresett egyenlőség:

$$\frac{t(\alpha\beta\gamma_{\text{par}})}{t(\alpha\gamma\zeta_{\Delta})} = \frac{4}{3}.$$

Kritikus pont.

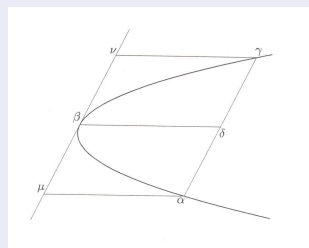
Archimédész hangsúlyozta:

EREDMÉNYÉT NEM MATEMATIKAI ÚTON ÉRTE EL,
ÍGY MATEMATIKAI TÉTEL CSAK AKKOR LESZ
BELŐLE HA AZT GEOMETRIAI ÚTON BEBIZONYÍTJA.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

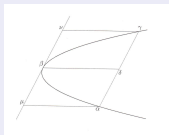
Deduktív bizonyítás.

Tekintsünk egy parabolaszettet:



Archimedesz: A parabola kvadraturája.

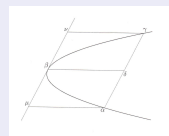
Deduktív bizonyítás. Konstrukció 1.



- 1. Legyen $\alpha\beta\gamma$ a parabolaszett, továbbá $\beta\delta$ olyan egyenes, amely felezi az összes olyan húrt, amely párhuzamos $\alpha\gamma$ -val. Így δ felezőpontja az $\alpha\gamma$ húrnak.
- 2. A 18. Állítás szerint a parabola β pontbeli érintője párhuzamos $\alpha\gamma$ -val.
- 3. Húzzuk meg a $\beta\delta$ egyenessel párhuzamos $\nu\gamma$ és $\mu\alpha$ szakaszokat.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

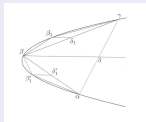
Deduktív bizonyítás. Konstrukció 2.



- 4. Euklidesz I.41. Tétele szerint az $\alpha\beta\gamma$ háromszög területe fele az $\alpha\mu\nu\gamma$ paralelogramma területének.
- 5. Az $\alpha\beta\gamma$ háromszög területe több a parabolaszett területének felénél.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

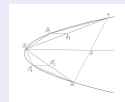
Deduktív bizonyítás. Konstrukció 3.



- 6. Legyen δ_1 és δ'_1 a $\beta\gamma$, ill. az $\alpha\beta$ húr felezőpontja, továbbá a $\beta_1\delta_1$ és a $\beta'_1\delta'_1$ szakaszok párhuzamosok $\beta\delta$ -val, azaz megismételjük az $\alpha\beta\gamma$ parabolaívre alkalmazott konstrukciónkat a $\beta\beta_1\gamma$ és $\alpha\beta'_1\beta$ parabolaívekre.
- 7. $t(\beta\beta_1\gamma_\Delta) + t(\alpha\beta'_1\beta_\Delta) = \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta)$

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

Deduktív bizonyítás. Konstrukció 4.



- 8. Ha megismételjük a 6. pontbeli eljárást az $\alpha\beta'_1$, $\beta'_1\beta$, $\beta\beta_1$, $\beta_1\gamma$ parabolaívekre,
- 9. majd tovább folytatjuk eljárásunkat az így kapott parabolaívekre, akkor a

$$t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4^2}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \dots \quad (*)$$

geometriai sor véges kezdő szeleteit kapjuk.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

Megjegyzések.

1. A modern matematikában járatosok számára világos, hogy a parabolaszlet területe az iménti konvergens geometriai sor összege.
2. Ez a megközelítés azonban az ókori matematikusok számára értelmezhetetlen volt.
3. Arisztotelész filozófiájában szerepel ugyan kétféle végtelen is, a „potenciálisan végtelen” és az „aktuálisan végtelen”.
4. A matematikában azonban csak az előbbi fogalom volt használatos olymódon, ahogy az például Euklidesz számos tételében is szerepel.

A még elvégzendő feladat.

Összegezni ezen végtelen sort, természetesen véges eljárással.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

Deduktív bizonyítás. Fölhasznált tételek 1.

- 1. (Archimedesz, A parabola kvadraturája, 23. Állítás.) *Legyen adott mennyiségek egy olyan sorozata, amelyben minden egyes tag az öt követő tag négyszerese. Ha az összes tag összegéhez hozzáadjuk az utolsó tag egyharmadát, akkor a kapott összeg egyharmadával haladja meg az első tagot.*
- **Megjegyzés.** Állítása modern terminológiával: ha $c_1, \dots, c_n$ egy $\frac{1}{4}$ kvóciensű mértani sorozat, akkor

$$c_1 + \dots + c_n + \frac{1}{3}c_n = \frac{4}{3}c_1. \quad (1)$$

- **Megjegyzés.** Archimédész bizonyításában $n = 5$, de effektíve nem használta ezen megszorítást.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

Deduktív bizonyítás. Fölhasznált tételek 2.

2. (Archimedesz approximációs módszere.) Valamely meghatározandó Σ mennyiséget alulról közelíti az $S_n = a_1 + \dots + a_n$ összeg, amelyben a tagok pozitívok mégpedig úgy, hogy a $\Sigma - S_n$ különbség az n növelések kisebbé tehető bármely előre adott ε mennyiségnél, s ugyanez érvényes a_n -re is. (Lényegében S_n egy konvergens sorozat első n tagjának összege.) Ha meghatározunk egy olyan K mennyiséget, amely bármely n re kielégíti az

$$a_1 + \dots + a_n + R_n = K, \quad \text{ahol} \quad 0 < R_n < a_n \quad (2)$$

föltételt, akkor igazolhatjuk, hogy $\Sigma = K$.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

Deduktív bizonyítás. Az approximációs módszer igazolása.

- Archimedesz eljárása kettős indirekt föltevésen alapul.
- Megmutatta, hogy a $\Sigma > K$ és a $\Sigma < K$ föltevés egyaránt lehetetlen, tehát csak a $\Sigma = K$ eset lehetséges.
- Először tegyük föl, hogy $\Sigma > K$. Mivel a $\Sigma - S_n$ — az n -et alkalmasan választva — akármilyen adott mennyiségnél kisebb lehet,
- az n -t úgy választjuk, hogy

$$\Sigma - S_n < \Sigma - K.$$

- Ez azonban azt jelentené, hogy $K < S_n$, ami lehetetlen.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

Deduktív bizonyítás. Az approximációs módszer igazolása.

- Ha pedig $\Sigma < K$, akkor alkalmas n -re $a_n < K - \Sigma$.
- Ekkor azonban (2) alapján $K < S_n + a_n$,
- amiből

$$K - S_n < a_n < K - \Sigma \quad \Rightarrow \quad \Sigma < S_n,$$

- és ez ugyancsak lehetetlen.

Tehát szükségképp

$$\Sigma = K.$$

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

Deduktív bizonyítás. Fölhasznált tételek 2.

3. (Euklidesz, X.1. Tétel.) Ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobbikból levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

A sejtés bizonyítása 1.

- Emlékezzünk az ábrákra, és végezzünk el n lépést az ott említett konstrukcióval.
- Ha (1)-et a

$$c_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta), \quad k = 1, \dots, n$$

sorozatra alkalmazzuk, akkor a

Archimedesz: A parabola kvadrátúrája.

A sejtés bizonyítása 2.

$$\begin{aligned}
 & t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \dots \\
 & + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta) \\
 & = \frac{4}{3} t(\alpha\beta\gamma_\Delta)
 \end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk.

Archimedesz: A parabola kvadrátúrája.

A sejtés bizonyítása 3.

- Alkalmazzuk az approximációs módszert, használjuk a korábbi jelöléseket.
- Legyen $a_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta)$.
- Az $R_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} t(\alpha\beta\gamma_\Delta)$ választással azt kapjuk, hogy

$$K = \frac{4}{3} t(\alpha\beta\gamma_\Delta).$$

- Világos, hogy ez esetben teljesül az $a_n > R_n$ feltétel is.

Archimedesz: A parabola kvadrátúrája.

A sejtés bizonyítása 4.

- Jelölje Σ az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területét.
- Konstrukciónkból Euklidesz tétele alapján az is következik, hogy az

$$S_n = t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \frac{1}{4}t(\alpha\beta\gamma_\Delta) + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n t(\alpha\beta\gamma_\Delta)$$

- összeg tetszőleges pontossággal közelíti alulról a parabolaszélet Σ területét.
- Így az approximációs módszerrel azt kapjuk, hogy

$$\Sigma = K = \frac{4}{3} t(\alpha\beta\gamma_\Delta),$$

- amit bizonyítani akartunk.

Archimedesz: A parabola kvadrátúrája.

Záró megjegyzések 1.

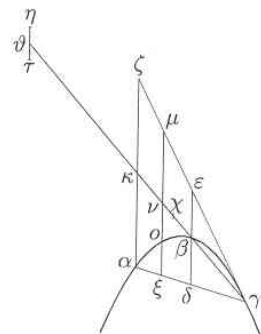
- Ha mai tudásunkkal nézzük ezen eljárást láthatjuk, hogy Archimedesz lényegében a $(*)$ végtelen mértani sort összegét határozta meg, amely nyilvánvalóan az $\alpha\beta\gamma$ parabolaszélet területe.
- Tette mindezt a végtelen sor, annak konvergenciája ismerete nélkül. Eljárása mindezen ismeretek nélkül is korrekt. Annak szigorúsága messze meghaladta a Newton és Leibniz által közel két évezreddel később a területszámításoknál alkalmazottat.
- A matematikával ismerkedő középiskolások, de gyakran még az egyetemi hallgatók számára is nem mindig különülnek el megfelelő mértékben a heurisztikus gondolatmenetek a szigorú (deduktív) bizonyításoktól. Különösen fontosnak tartjuk ezen különbség mély megértését a matematika tanárai számára.

Archimedesz: A parabola kvadraturája.

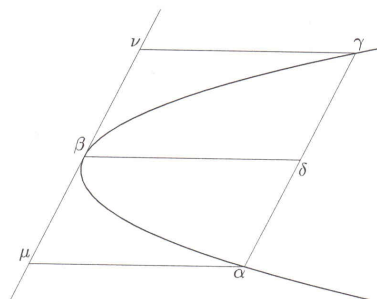
Záró megjegyzések 2.

- A matematika alkalmazói számára is alapvető, hogy különbséget tudjanak tenni a heurisztikus gondolatmenetek, a velül kapott sejtések, és a deduktíve (matematikailag korrekten) bizonyított állítások között.
- ARCHIMÉDESZ MUNKÁIBÓL KITŰNIK, HOGY Ő —
A TUDOMÁNYOK TÖRTÉNETÉBEN ELŐSZÖR —
ÉLES KÜLÖNBSÉGET TETT A FIZIKAI ÉS A
MATEMATIKAI GONDOLATMENETEK, ÉRVELÉSEK
KÖZÖTT.

1. ábra



2. ábra



3. ábra

