

A XX. SZÁZAD ALGEBRÁJÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSE

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. december 1.

A „Modern” algebra kialakulása 1.

A kezdetek, a csoportok és a testek.

- Lagrange - Ruffini: „helyettesítések kompozíciója”, azaz véges halmaz permutációi és szorzatuk, inverziük.
- Galois: lényegében megjelenik a véges permutációcsoport és a véges test fogalma (utóbbi implicit csak!).
- A csoport absztrakt fogalmának megjelenésének lépései: Cayley (1849 és 1878), Dedekind: „... az algebrai számokkal végzett műveleteknél nem használjuk ki igazán, hogy az elemek algebrai számok.” (1859)
- C. Jordan: megjelenik az **izomorfizmus** fogalma, tőle származik az Abel-csoport megnevezés.
- Csoportkonstrukciók (részcsoport, faktorcsoport ill. homomorf kép, direkt szorzat), az első struktúratétel: a **véges Abel-csoportok alaptétele**. (Frobenius 1880-tól)

A „Modern” algebra kialakulása 2.

További struktúrák.

- W. R. Hamilton (1840-60): Két-, ill. négydimenziós számok: a komplex számok és a kvaterniók. Test fölötti zérusosztómentes algebrák.
- **Definíció.** Legyen $\mathcal{V}$ vektortér az F test fölött, és definiáljunk egy további — szorzásként írt — műveletet, amelyre

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad \text{ahol } \alpha \in F, x, y \in \mathcal{V}.$$

A kapott struktúrát **F fölötti algebrának** nevezzük.

- Az algebra *asszociatív*, *kommutatív*, ill. *zérusosztómentes*, ha a szorzás asszociatív, kommutatív, ill. zérusosztómentes.
- A valós számtest fölötti véges dimenziós, asszociatív és zérusosztómentes algebrák a következők: a valós számok teste, a komplex számok teste, a kvaterniók (ferde)teste. **Frobenius tétele** (1882)

A „Modern” algebra kialakulása 3.

A test fogalmának általánosítása: a gyűrű.

- Minta az egész számok.
- Ideálok, első alkalmazás: a Fermat-probléma.
- Kérdés: lehet-e a véges Abel-csoportok alaptételéhez hasonló tételt igazolni gyűrűkre?
- Egyáltalán: itt igaz-e az a „szép” tétel, hogy
- *Minden gyűrű direkt fölbonthatatlan gyűrűk direkt szorzatára bontható.*
- A válasz több oknál fogva NEM (csoportokra is ez a válasz), nem teljesül a számelmélet alaptételéhez hasonló állítás.

Gyűrűk.

- 1 Két lehetőség van:
 - 1 Általánosítjuk a direkt szorzat fogalmát.
 - 2 Speciális gyűrűosztályokat tekintünk, és további feltételeket támasztunk.
- 2 Az 1. esettel később foglalkozunk.
- 3 A 2. esetben a következőt tesszük.
 - 1 Összegyűjtjük egy adott osztályban a „rossz” gyűrűket, pontosabban a „rossz” gyűrűrészeket, amelyekre nem igaz a kívánt struktúratétel, amelyek azt „elrontanák”.
 - 2 Ezek — ha bizonyos további feltételek teljesülnek — az ún. **radikálosztályok**.

Gyűrűk.

Néhány fogalom

- **Definíció.** Legyen R kommutatív gyűrű, és I ideálja. Az

$$\{r \in R \mid \exists k \in \mathbb{N}, \text{ hogy } r^k \in I\} = \sqrt{I}$$

ideál az I ideál **radikálja**, vagy **nil-radikálja**.

- **Definíció.** Legyen R egységelemes gyűrű. A

$$J(R) = \{a \in R \mid 1 - a \text{ invertálható}\}$$

ideált R **Jacobson-radikáljának** nevezzük.

- **Definíció.** Azt mondjuk, hogy R **Artin-gyűrű**, ha balideáljai bármely nemüres halmazában van minimális elem.

Gyűrűk.

Egy struktúratétel.

Wedderburn-Artin tétel. Legyen R egységelemes Artin-gyűrű. Az $R/J(R)$ faktorgyűrű véges sok ferdetest fölötti teljes mátrixgyűrű direkt szorzatára bontható.

Általános (univerzális) algebra 1.

Két kiindulási kérdés.

- 1 Léteznek nagyon hasonló tételek csoportokra és gyűrűkre. Van-e valamiféle közös általánosításuk? Ilyenek az az izomorfia-tételek és a faktorstruktúra konstrukciók. Például:
 - legyenek A, B csoportok (gyűrűk). Ha $\varphi: A \rightarrow B$ szürjektív homomorfizmus, akkor van olyan $N \triangleleft A$ normálosztó (ideál), hogy

$$A/N \cong B.$$

- 2 Lehet-e a korábban mondott feltételeket kielégítően általánosítani a direkt szorzat fogalmát.
 - Fölbontható-e minden algebrai struktúra (esetleg további feltételeket szabva) direkt fölbonthatatlan algebrák direkt szorzatára?

Általános (univerzális) algebra 2.

Az első válaszok: G. Birkhoff 1936.

- A művelet: $A^n \rightarrow A$ leképezés, az algebra: (A, F) pár, ahol F műveletek egy halmaza. Hasonló algebraik.
- A homorfizmus, a kongruencia, a részalgebra, a direkt szorzat, azonosság, stb. általános fogalma.
- Algebrák homorfiatétele: Ha A, B hasonló algebraik és $\varphi: A \rightarrow B$ szürjektív homorfizmus, akkor van az A algebrainak olyan ϑ kongruenciája, hogy

$$A/\vartheta \cong B.$$

- Azonosság, azonosságokkal definiálható osztályok: varietások.
- **Birkhoff tétele.** Hasonló algebraik valamely $\mathcal{V}$ osztálya pontosan akkor definiálható azonosságok egy halmazával, ha zárt a részalgebraik, a homomorf képek és a direkt szorzatok képzésére.

Általános (univerzális) algebra 3.

A direkt szorzat általánosítása.

- **Definíció.** Legyenek A_i , $i \in I$ hasonló algebraik. Az

$$A \subseteq \prod_{i \in I} A_i$$

algebra ezen algebraik egy **szubdirekt szorzata**, ha a $\pi_i: A \rightarrow A_i$ projekciók szürjektívek minden $i \in I$ -re.

- **Birkhoff tétele:** Minden algebra izomorf szubdirekt irreducibilis algebraik egy szubdirekt szorzatával.
- **Sajnos** a szubdirekt irreducibilis algebraik meghatározása általában igen bonyolult, több esetben máig megoldatlan kérdés.

Általános (univerzális) algebra 4.

Kapcsolat a logikával.

- Varietas elsőrendű nyelve.
- Elsőrendű (és általánosabb) ítéletek megőrzése konstrukcióknál.
- Kifejezésfüggvény, polinom.
- Varietas (algebra) tulajdonságok jellemzése elsőrendű nyelven.

Általános (univerzális) algebra 5.

Varietasok Malcev-típusú jellemzései.

- **A.I. Malcev tétele.** (1954) A $\mathcal{V}$ varietásban pontosan akkor teljesül, hogy bármely algebra bármely két kongruenciája a szorzásnál fölcserélhető, ha létezik e varietás nyelvén olyan μ kifejezés, hogy a

$$\mu(x, y, y) = \mu(y, y, x) = x$$

azonosság $\mathcal{V}$ minden algebraján teljesül.

- **A. F. Pixley** (1963). A $\mathcal{V}$ varietásban pontosan akkor teljesül, hogy minden algebra kongruenciahálójá disztributív és bármely két kongruencia a szorzásnál fölcserélhető, ha létezik a varietásban olyan ν kifejezésfüggvény, amelyre teljesül a

$$\nu(x, y, x) = \nu(x, y, y) = \nu(y, y, x) = x$$

azonosság.

Általános (univerzális) algebra 6.

Varietások Malcev-típusú jellemzései.

B. Jónsson (1967). *A $\mathcal{V}$ varietásban pontosan akkor teljesül, hogy minden algebra kongruenciahálójá disztributív, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $p_0, p_1, \dots, p_n$ kifejezésfüggvények, amelyekre teljesülnek az alábbi azonosságok.*

$$\begin{aligned} p_i(x, y, x) &= x, & \text{ha } 0 \leq i \leq n \\ p_0(x, y, z) &= x, & p_n(x, y, z) = z \\ p_i(x, x, y) &= p_{i+1}(x, x, y), & \text{ha } i \text{ páros} \\ p_i(x, y, y) &= p_{i+1}(x, y, y), & \text{ha } i \text{ páratlan} \end{aligned}$$

Általános (univerzális) algebra 7.

Varietások Malcev-típusú jellemzései: általánosabb eset.

Tétel. (K.L. 1975.) *A $\mathcal{V}$ varietásban pontosan akkor teljesül, hogy minden algebra bármely részalgebrája egy alkalmas kongruencia osztálya, ha minden f n -ér kifejezésfüggvényhez van olyan k_f háromváltozós kifejezésfüggvény, hogy*

$$f(x_1, \dots, x_n) = k_f(x_0, x_1, f(x_0, x_2, \dots, x_n))$$

azonosság minden $\mathcal{V}$ -beli algebrán.

Általános (univerzális) algebra 8.

Teljességi kérdések. (A klasszikus Lagrange-tétel általánosításai.)

- **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, F)$ véges algebra *primál* (függvény-teljes), ha minden $f: A^n \rightarrow A$ leképezés (A -n definiált n -változós függvény) kifejezésfüggvény (polinom).
- **Csákány B., Szendrei Ágnes, Szabó L.** eredményei (a 80-as évek) szerint e kérdéskör szoros kapcsolatban van az algebra automorfizmusai csoportjával: annak „erősen” tranzitívnak és „elég nagy” kell lennie.