

KLASSZIKUS ALGEBRA GYAKORLÓFELADATOK (2016 TAVASZ)

- 1. feladat.** Van-e olyan z komplex szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 1$ és $|z - i| = 3$? Ha van, akkor adjon meg egy példát; ha nincs, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen szám!
- 2. feladat.** Léteznek-e olyan z, w komplex számok, amelyekre $|z + w| = |z| + |w|$? Ha léteznek, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nem léteznek ilyen számok!
- 3. feladat.** Igaz-e tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, hogy ha $\sqrt[n]{z}$ -nek van valós értéke, akkor z is valós? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 4. feladat.** Igaz-e, hogy ha z primitív nyolcadik egységgyök, akkor z^{2014} is primitív nyolcadik egységgyök? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 5. feladat.** Igaz-e, hogy ha z primitív tizenkettedik egységgyök, akkor $z^6 = -1$? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 6. feladat.** Igaz-e tetszőleges R gyűrű és $a, b \in R$ esetén, hogy $-(ab) = (-a)b$? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 7. feladat.** Igaz-e minden egységelemes R gyűrűben, hogy $1 + 1 \neq 0$? (Itt 1 és 0 az R gyűrű multiplikatív, illetve additív egységelemét jelöli.) Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 8. feladat.** Igaz-e, hogy minden integritástartomány test? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 9. feladat.** Van-e olyan egységelemes gyűrű, amelyben végtelen sok egység van? Ha van, akkor adjon meg egy példát; ha nincs, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen gyűrű!
- 10. feladat.** Van-e a $\mathbb{Z}_{23}[x]$ gyűrűben zérusosztó? Ha van, akkor adjon meg egy példát; ha nincs, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs zérusosztó!
- 11. feladat.** Létezik-e olyan $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, amelynek $\sqrt{2}$ kétszeres gyöke? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!
- 12. feladat.** Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, amelynek i gyöke, de $-i$ nem gyöke? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!
- 13. feladat.** Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ ötödfokú polinom, amelynek 6 komplex gyöke van? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!
- 14. feladat.** Igaz-e tetszőleges $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra, hogy ha f -nek nincs valós gyöke, akkor f konstans polinom? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 15. feladat.** Igaz-e, hogy ha egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom irreducibilis $\mathbb{C}$ felett, akkor irreducibilis $\mathbb{R}$ felett is? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 16. feladat.** Létezik-e 2014-edfokú irreducibilis polinom $\mathbb{R}$ felett? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!
- 17. feladat.** Létezik-e olyan irreducibilis polinom $\mathbb{R}$ felett, amelynek van valós gyöke? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!
- 18. feladat.** Igaz-e minden $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább másodfokú polinomra, hogy ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ felett, akkor f -nek nincs komplex gyöke? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 19. feladat.** Létezik-e negyedfokú irreducibilis polinom $\mathbb{Z}_2$ felett? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!
- 20. feladat.** Igaz-e minden $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ esetén, hogy ha $f \mid g$ és $g \mid f$, akkor $f = g$? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 21. feladat.** Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, amelyre $\ln_k(f, x^3 - 1) = x - 1$? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!
- 22. feladat.** Igaz-e, hogy minden $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak végtelen sok osztója van? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!
- 23. feladat.** Léteznek-e olyan $f \neq g \in \mathbb{R}[x]$ polinomok, melyekre minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $f(c) = g(c)$? Ha léteznek, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincsenek ilyen polinomok!
- 24. feladat.** Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, melyre minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $f(c)^3 = c$? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!

25. feladat. Létezik-e olyan $0 \neq f \in \mathbb{Z}[x]$ főpolinom, amelynek $\frac{1}{2}$ gyöke? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!

26. feladat. Létezik-e 2014-edfokú irreducibilis polinom $\mathbb{Q}$ felett? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!

27. feladat. Igaz-e minden $f \in \mathbb{Q}[x]$ legalább másodfokú polinomra, hogy ha f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, akkor f -nek nincs valós gyöke? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!

28. feladat. Igaz-e minden $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomra és c valós számra, hogy ha c kétszeres gyöke f' -nek, akkor c háromszoros gyöke f -nek? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!

29. feladat. Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ szimmetrikus polinom, melynek tagjai között szerepel $x_1 x_2^2$? Ha létezik, akkor adjon meg egy példát; ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom!

30. feladat. Igaz-e, hogy bármely $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén f komplex gyökeinek köbösszege racionális szám? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!

31. feladat. Igaz-e tetszőleges R gyűrű és $a, b \in R$ esetén, hogy ha $a = \pm b$, akkor $a \mid b$ és $b \mid a$? Ha igaz, akkor bizonyítsa be; ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát!

32. feladat. Igaz-e, hogy a $\mathbb{Z}_3[x] / (x^4 + x + 1)$ maradékosztály-gyűrű egy 81-elemű test?

33. feladat. Igaz-e, hogy $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ algebrai szám?