

Név:

Összpontszám:

Klasszikus algebra gyakorlat

2. zárthelyi megoldása

(2017. 05. 05.)

1. Feladat. (6 pont)

(A) Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ ötödfokú polinom, amelynek 6 komplex gyöke van? Ha igen, akkor adjon meg egyet, ha nem, akkor bizonyítsa be, hogy valóban nincs ilyen polinom.

(M) **Nem létezik.** A klasszikus algebra alaptételéből következik, hogy egy ötödfokú valós együtthatós polinomnak, multiplicitással számolva pontosan 5 komplex gyöke van.

(B) Létezik-e olyan $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, amelynek $\sqrt{2}$ kétszeres gyöke? Ha van, akkor adjon meg egyet, ha nincs ilyen, akkor ezt bizonyítsa be.

(M) **Van.** Az $(x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$ polinomnak a $\sqrt{2}$ kétszeres gyöke.

(C) Igaz-e, hogy ha egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom irreducibilis $\mathbb{C}$ fölött, akkor $\mathbb{R}$ fölött is irreducibilis. Ha igaz, akkor bizonyítsa be, ha nem, adjon meg egy ellenpéldát.

(M) **Igaz**, mert bármely $\mathbb{R}$ fölötti fölbontása egyben $\mathbb{C}$ fölötti fölbontás is. Másképpen: ha $\mathbb{C}$ fölött irreducibilis, akkor elsőfokú, így bármely számtest fölött irreducibilis.

(D) Létezik-e olyan $0 \neq f \in \mathbb{Z}[x]$ főpolinom, amelynek az $\frac{1}{2}$ gyöke? Ha igen, adjon meg egy példát, ha nem, igazolja.

(M) Ilyen főpolinom **nem** létezik, mert ha valamely nemzérő $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak az $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, ln. k.o. $(a, b) = 1$ gyöke, akkor b osztója a polinom főegyütthatójának (Rolle-tétele).

(E) Léteznek-e olyan $f \neq g \in \mathbb{R}[x]$ polinomok, hogy $f(c) = g(c)$ minden $c \in \mathbb{R}$ -re? Ha léteznek, adjon meg egy példát, ha nem, igazolja. Változik-e a helyzet, ha polinomok $\mathbb{Z}_{11}$ fölöttiek?

Nem léteznek $\mathbb{R}$ fölött, mert ekkor szükségképp $f - g$ -nek $\deg(f - g)$ -nél több zéróhelye lenne, ami ellentmond a klasszikus algebra alaptételének. $\mathbb{Z}_{11}$ fölött azonban az x^{11} és az x polinomok ilyenek az Euler-Fermat tételből következően.

(F) Igaz-e minden $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomra és a valós számra, hogy ha a kétszeres gyöke f' -nek, akkor a háromszoros gyöke f -nek. Ha nem, adjon meg egy ellenpéldát, ha igaz, bizonyítsa be.

Hamis. Az $f = (x - a)^3 + b$, $b \neq 0$ polinomra $f(a) \neq 0$, de f' -nek az a kétszeres gyöke.

2. Feladat. (3 pont)

Bontsa föl irreducibilis tényezőkre a szorzatára az $x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomot.

Megoldás. Azonnal látható, hogy az 1 gyök, így $x^4 + x + 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 1) = (x + 2)(x^3 + x^2 + x + 2)$. A második tényezőnek már nincs gyöke $\mathbb{Z}_3$ -ban (egyszerű számolás), így lévén harmadfokú, szükségképp irreducibilis. A keresett fölbontás így

$$(x + 2)(x^3 + x^2 + x + 2)$$

3. Feladat. (3 pont)

Határozza meg az $x^4 + 16$ polinom irreducibilis fölbontását $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött.

Megoldás. Célszerű előbb a komplex együtthatós fölbontást megkeresni, amihez csak a $\sqrt[4]{-16} = 2\sqrt[4]{-1}$ értékeit kell meghatározni. Ezek a következők: $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$. Így a $\mathbb{C}$ fölötti fölbontás:

$$x^4 + 16 = (x - (\sqrt{2} + \sqrt{2}i))(x - (\sqrt{2} - \sqrt{2}i))(x - (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i))(x - (-\sqrt{2} - \sqrt{2}i)),$$

amiből az első két- és a második két tényező összeszorozásával kapható az $\mathbb{R}$ fölötti fölbontás:

$$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4).$$

4. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ egyenletet.

Megoldás.

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = (x^2 - x + \alpha)^2 - ((2\alpha - 1)x^2 - (2\alpha + 4)x + (\alpha^2 + 8))$$

A második tag diszkriminánsa: $D = -8\alpha^3 + 8\alpha^2 - 48\alpha + 48$, aminek egy gyöke $\alpha = 1$. Így

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = (x^2 - x + 1)^2 - (x - 3)^2 = (x^2 - 2)(x^2 - 2x + 4).$$

Ebből a gyökök:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

5. Feladat. (4 pont)

A gyökök kiszámítása nélkül adja meg az $f = 3x^3 - 5x^2 + 1$ polinom gyökei köbeinek összegét.

Megoldás. Ha x_1, x_2, x_3 a három gyök, akkor

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$$

$a = -3$, $b = 3$, és így

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

$$\sigma_1 = \frac{5}{3}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\frac{1}{3},$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{125}{27} - 1 = \frac{98}{27}.$$